

Faculté des sciences

Non-formalité de l'opérade des petits disques à repères

Auteur·es : Noé Legrand

Promoteur·rices : Pascal Lambrechts

Lecteur·rices : Pedro Vaz, Tim Van der Linden

Année académique 2025-2026

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Non-formalité de l'opérade des petits disques à repères

Noé Legrand
Promoteur : Pascal Lambrechts
Lecteurs : Pedro Vaz, Tim Van der Linden

Mémoire
Août 2026

*Je remercie Pascal Lambrechts pour sa patience, son
écoute et la richesse de ses explications.
Je remercie Valérie Goffaux pour ses conseils et
mes parents pour leur soutien.*

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter une récente preuve de Shunji Moriya, concernant la *non-formalité* de l'*opérade des petits disques à repères* en dimension impaire [21]. L'objectif est de rendre la preuve de Moriya accessible pour un public déjà familier aux notions de topologie algébrique, mais non-expert dans le domaine des opérades et de leur formalité.

Le travail effectué dans ce mémoire se divise en deux grands axes :

- L'identification, la synthèse et la présentation de la plupart des outils et concepts nécessaires à la compréhension de la preuve de Moriya (chapitres 1 et 2).
- Une ré-appropriation et reformulation de cette preuve (chapitre 3), avec ajout de nombreux détails. La preuve initiale de Moriya tient sur quelques pages.

La notion d'*opérade*, tout comme la notion de *formalité* sont les deux concepts clefs que nous présenterons en détail dans ce travail. Nous en donnerons une description générale dans les chapitres 1 et 2 respectivement, avant de recentrer notre attention, dans le chapitre 3, sur leur rôle dans la preuve de Moriya. Introduisons déjà brièvement ces deux notions ici.

Une **opérade** (définition 1.3) est une structure algébrique qui encapsule la notion d'opérations. Concrètement, il s'agit d'un ensemble d'opérations regroupées en fonction de leur arité, avec une composition, permettant d'assembler les opérations entre elles. Même si les opérades se conçoivent naturellement dans les ensembles, les opérades peuvent être définies dans n'importe quelle catégorie monoïdale.

L'un des avantages des opérades mis en avant dans notre travail est leur capacité à transporter de la structure, à travers certains types de foncteurs (proposition 1.27). En d'autres termes, les opérades donnent un formalisme adéquats pour munir des foncteurs comme l'homologie, d'opérations algébriques supplémentaires.

Donnons un exemple très concret (exemple 1.12), qui s'avère être l'un des exemples fondateurs étudiés en profondeur dans les années 60. Prenons $\Omega^k X$ un espace de lacet itéré sur un espace topologique X , c'est-à-dire, $\Omega^k X = \Omega(\Omega(\dots\Omega(X)))$, l'ensemble des lacets de lacets de lacets ... sur X . La concaténation, sur cet espace, est un exemple d'opération. On peut alors montrer, que toutes les opérations sur un tel espace sont encapsulées par ce qu'on appelle l'*opérade des petits cubes*, notée $\mathcal{C}_k$ (l'on considère également parfois l'*opérade des petits disques*, notée $\mathcal{D}_k$). Formellement, on dit qu'il y a une action de $\mathcal{C}_k$ sur $\Omega^k X$, et en plus, tout espace qui admet une action de $\mathcal{C}_k$ est

un espace de lacet itéré, à homotopie près. Ce résultat est plus connu sous le nom du théorème de reconnaissance (théorème 1.13).

Lorsque l'on transporte cette action à travers l'homologie, on obtient alors un nouvel ensemble d'opérations, noté $H_*(\mathcal{C}_k)$, qui induit une action sur l'espace $H_*(\Omega^k X)$. Par exemple, pour le cas $k = 2$, ceci nous donne sur $H(\Omega^2(X))$ une structure d'*algèbre de Gerstenhaber* (corollaire 1.41).

Dans ce travail, nous considérons quasi-exclusivement une variante de l'opérade des petits cubes/petits disques, à savoir, l'**opérade de Kontsevich**, notée $\mathcal{K}_d$. Cette opérade, homotopiquement équivalente à l'opérade des petits disques (théorème 1.18), a l'avantage d'être plus facilement manipulable. Intuitivement, elle se visualise comme l'espace des configurations de n points dans $\mathbb{R}^d$.

La notion de *formalité* (topologique) trouve ses sources dans la théorie de l'homotopie rationnelle, développée par Quillen and Sullivan à la fin des années 60. Elle existe de manière tout à fait indépendante des opérades. Intuitivement, un espace topologique X est **formel**, si sa cohomologie contient autant d'information que les cochaines sur cet espace X .

L'un des atouts de la formalité que nous mettons en avant dans ce travail est sa capacité à faire *dégénérer des suites spectrales* (proposition 2.30). Une suite spectrale peut être pensée comme un outil d'approximation de l'homologie. Dire qu'une suite spectrale dégénère, revient à dire que cette approximation se stabilise de manière extrêmement rapide, ce qui peut avoir des avantages considérables.

La formalité topologique a alors son équivalent opéradique. Une **opérade est formelle** (définition 2.15) si l'homologie de cette opérade est équivalente aux chaines sur cette opérade. Concrètement, pour une opérade $\mathcal{O}$, cela se traduit par l'existence d'un zigzag

$$C_*(\mathcal{O}) \xleftarrow{\simeq} \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\simeq} \dots \xleftarrow{\simeq} \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\simeq} H(\mathcal{O}).$$

où les objets $C_*(\mathcal{O})$ et $H_*(\mathcal{O})$ seront proprement défini dans la propriété 1.27.

L'opérade de Kontsevich, $\mathcal{K}_d$, est un exemple d'opérade formelle [15]. Cette formalité fut utilisée par Kontsevich lui-même pour des applications en physique [13]. Elle a aussi été utilisée pour estimer l'homologie de l'espace des plongements [14]. Pour cette dernière application, il est également utile de considérer une version augmentée de l'opérade de Kontsevich, à savoir, l'**opérade de Kontsevich à repères**, notée $f\mathcal{K}_d$. Intuitivement, cette opérade correspond aux configurations de n points dans $\mathbb{R}^d$, avec l'ajout d'une orientation propre à chaque point. Notre travail porte alors sur l'étude de la formalité de l'opérade de Kontsevich à repères. Nous montrerons qu'elle n'est pas formelle pour une dimension impaire plus grande que 4 (chapitre 3).

Pour montrer la non-formalité de $f\mathcal{K}_d$, il est déjà utile de mettre en avant deux propriétés clefs des espaces topologiques formels.

- Les espaces formels induisent des *suites spectrales dégénérantes* (comme déjà mentionné, proposition 2.30)
- Les *produits de Massey* dans un espace formel sont tous nuls (proposition 2.12)

Les définitions précises des *produits de Massey* et des *suites spectrales* seront données dans leur section dédiée (sections 2.1.2 et 2.2.1). Ce qu'il faut retenir, c'est que la contraposée de ces deux propriétés nous donne une condition de non-formalité. Notre travail consistera donc à mettre en évidence un équivalent opéradique à ces deux propriétés topologiques.

La proposition 2.29 nous donne alors l'équivalent de la dégénérescence de suite spectrale, pour la formalité dite *multiplicative*. Cette proposition sera un ingrédient clef du corollaire 3.17, affirmant la non-formalité *multiplicative* de l'opérade de Kontsevich à repères (en dimension impaire).

La condition sur le produit de Massey s'avèrera plus difficilement transposable dans le monde des opérades. Cela fera l'objet de la toute dernière section (section 3.3), dans laquelle, nous montrerons la non-formalité de l'opérade de Kontsevich à repères (théorème 3.23).

Nous concentrerons notre travail sur le traitement de la (non) formalité de $f\mathcal{K}_d$ selon Moriya. Toutefois, cette question trouve des résonances avec d'autres travaux récents. Citons par exemple l'étude de la formalité de l'opérade des petits disques à repères en dimension paire [11], ou encore l'introduction d'une notion de formalité *équivariante* [2].

Pour donner une cohérence à l'ensemble du document, des propositions intermédiaires avec des preuves personnelles ont été ajoutées. Les preuves qui ne sont pas personnelles sont de toute façon reformulées et ré-appropriées, avec la source précisément indiquée dans l'énoncé du théorème ou au début de la preuve.

Concernant les pré-requis, il nous tenait à cœur de rendre le texte accessible par un pair, à savoir, un étudiant de dernière année de master ayant suivi les cours avancés en topologie et algèbre. plusieurs annexes sont disponibles en fin de travail, introduisant des notions de topologie algébrique, qui n'ont pas spécialement été vues (en détail en tout cas) dans les cours suivis à l'UCLouvain.

La première annexe concerne des rappels d'algèbre et de topologie algébrique, incluant notamment une présentation des algèbres différentielles graduées ainsi que des isomorphismes de Kunneth, qui s'avèrent jouer un rôle clef pour notre travail. La deuxième annexe survole les espaces (co)simpliciaux introduisant la notion de normalisation et le théorème d'Eilenberg-Zilber. La troisième annexe concerne la construction de suites spectrales. Quelques résultats classiques y sont alors également démontrés. Lorsqu'un résultat ou une définition de l'annexe est utilisé, sa référence est explicitement mentionnée.

Toutes les illustrations de ce travail ont été réalisées à la main, avec le logiciel pour tablette *Concept*.

Table des matières

Introduction	7
1 Les opérades	13
1.1 Une opérade, qu'est ce que c'est ?	14
1.2 Opérades topologiques	19
1.3 Transport d'opérations en homologie	32
2 Autour de la formalité	43
2.1 Formalité	44
2.2 Suites spectrales et formalité	54
3 Non-formalité de l'opérade de Kontsevich à repères en dimension impaire	69
3.1 La deuxième page pour l'opérade des directions à repère	71
3.2 Non-formalité multiplicative	79
3.3 Obstruction à la formalité opéradique	84
Conclusion	93
A Éléments de topologie algébrique	95
A.1 Homologie	96
A.2 (Co)Algèbres différentielles graduées	100
A.3 Monoïdalité	109
A.4 Cohomologie	116
B Objets (co)simpliciaux	119
B.1 Définitions et exemples d'objets (co)simpliciaux	119
B.2 Normalisation	123
B.3 Théorème d'Eilenberg-Zilber	125
C Suites spectrales	127
C.1 Les étapes de construction	128
C.2 A quoi ressemble les premières pages ?	132

Chapitre 1

Les opérades

Table des matières

1.1	Une opérade, qu'est ce que c'est ?	14
1.2	Opérades topologiques	19
1.2.1	L'opérade des petits disques, l'opérade des directions, et l'opérade de Kontsevich	20
1.2.2	Produit semi-direct d'opérades	29
1.3	Transport d'opérations en homologie	32
1.3.1	Les opérades de chaines	32
1.3.2	L'homologie du produit semi-direct	36
1.3.3	Actions d'opérades de chaines	38

Nous introduisons la notion d'opérade dans ce chapitre. Pour motiver cet outil, nous montrerons comment les opérades nous permettent d'enrichir la structure algébrique de l'homologie de certains espaces. Cet enrichissement est utile dans de nombreux cas. Par exemple, nous utiliserons, dans la preuve de Moriya, la structure d'*algèbre de Gerstenhaber* sur $H_*(\Omega^2(X))$, l'homologie des espaces de double lacets.

Nous commencerons ce chapitre par un exemple introductif qui illustre l'idée de *transport de structure*.

Nous donnerons alors les définitions d'opérade, opérade multiplicative, action d'opérades, dans un contexte ensembliste, plus intuitif.

Nous ferons ensuite un détour par les opérades topologiques, où nous introduirons deux objets cruciaux de ce travail : l'opérade des directions $\mathcal{S}_d$ et l'opérade de Kontsevich $\mathcal{K}_d$. Cette dernière est homotopiquement équivalente à l'opérade des petits disques et sera notre objet d'étude pour ce travail. Nous en profiterons également pour définir le produit semi-direct d'opérade, qui permettra de définir les *opérades à repères*.

Dans la section 1.3.1, nous donnerons une définition plus générale, s'appliquant à toute catégorie monoïdale. Nous expliquerons alors comment transporter la structure d'opérade à travers certains foncteurs, comme le foncteur d'homologie. Nous explorerons comment ce transport interagit avec les opérades multiplicatives, le produit semi-direct d'opérades et les actions d'opérades.

Motivation : L'homologie des monoïdes topologiques

En guise d'exemple introductif, commençons par considérer un **monoïde topologique**, à savoir, un espaces topologiques X muni d'une structure de monoïde pour laquelle la multiplication $m : X \times X \longrightarrow X$ et l'unité $u : \{*\} \longrightarrow X$ sont des applications continues.

Dans une telle configuration, nous pouvons alors envoyer les flèches m et u en homologie pour définir, grâce au morphisme de Kunneth Q (A.38), les flèches $m_H := H_*(m) \circ Q$ et $u_H := H_*(u)$

$$\begin{array}{ccc} H_*(X \times X) & \xrightarrow{H_*(m)} & H_*(X) \\ \uparrow Q & \nearrow m_H & \\ H_*(X) \otimes H_*(X) & & \end{array} \quad H_*(\{*\}) \xrightarrow{u_H} H_*(X)$$

On peut vérifier que m_H et u_H munissent $H_*(X)$ d'une structure d'algèbre graduée (définition A.17). Nous obtenons alors un premier exemple d'enrichissement de structure. Le produit de X se transporte en homologie pour donner un produit sur $H_*(X)$.

Avoir une structure supplémentaire sur l'homologie nous permet de plus facilement la manipuler et la calculer. Par exemple, on peut montrer que le produit que nous avons construit est étroitement lié à une structure d'*algèbre de Hopf*. Nous avons alors un théorème de caractérisation des algèbres de Hopf, sur les corps de caractéristique nulle, en terme d'algèbre gradué commutative libre (voir [10], section 3C pour plus d'informations).

Nous allons montrer, dans ce chapitre, comment les opérades offrent un cadre adéquat pour traiter ce genre de phénomènes, à savoir, le transport de structure en homologie.

1.1 Une opérade, qu'est ce que c'est ?

Intuitivement, une opérade peut être pensée comme un ensemble d'opérations, triées en fonction de leurs arités. Prenons l'exemple d'un monoïde (non unitaire). Nous savons qu'un monoïde X comporte une opération, que l'on peut noter $\mu : X \times X \longrightarrow X$,

qui respecte un axiome d'associativité. Au lieu de travailler avec des axiomes, nous pourrions plutôt exhiber toutes les possibilités de composition possible entre ces opérations.¹ Par exemple, nous pourrions considérer l'opération ternaire que nous noterions comme

$$\begin{aligned}\mu_3 : X \times X \times X &\longrightarrow X \\ x, y, z &\longmapsto \mu(\mu(x, y), z).\end{aligned}$$

Notons que nous aurions très bien pu considérer l'opération

$$\begin{aligned}X \times X \times X &\longrightarrow X \\ x, y, z &\longmapsto \mu(x, \mu(y, z)),\end{aligned}$$

qui s'avère être exactement la même. C'est précisément là que se situe une caractéristique des structures associatives : il existe une opération d'arité 2 correspondante à une et une seule opération d'arité 3. Nous pourrions faire le même procédé pour les opérations d'arité 4. Quelle que soit la combinaison effectuée, dans le cas des monoïdes, nous n'obtiendrons qu'une seule opération :

$$\begin{aligned}\mu_4 : X \times X \times X \times X &\longrightarrow X \\ w, x, y, z &\longmapsto ((w \cdot x) \cdot y) \cdot z = (w \cdot (x \cdot y)) \cdot z = \dots = w \cdot (x \cdot (y \cdot z))\end{aligned}$$

où $\mu(x, y)$ a été remplacé par $x \cdot y$ pour plus de lisibilité. En continuant comme ça indéfiniment, nous pouvons nous convaincre que pour les monoïdes associatifs, il n'existe qu'une seule opération d'arité n pour un n fixé. Via cet exemple, nous venons en réalité de faire la rencontre de l'opérade associative non unitaire.

Exemple 1.1 (Opérade associative). L'**opérade associative** est la donnée, pour toute arité n , du singleton $\mathcal{A}ss^u(n) := \{\mu_n\}$. L'opérade associative (unitaire) correspond donc à $\mathcal{A}ss^u := \{\mathcal{O}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. L'**opérade associative non unitaire** est caractérisée par $\mathcal{A}ss^\#(n) = \{\mu_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf pour $n = 0$, où $\mathcal{A}ss^\#(0) = \emptyset$.

Remarque 1.2. Il arrive parfois qu'on écrive uniquement $\mathcal{A}ss$ sans indice. Dans ce cas, soit le contexte est assez clair pour savoir si l'on parle de la version unitaire ou non, soit, l'on veut parler des deux versions en une fois.

En général, il est hélas rarement suffisant d'exhiber toutes les opérations pour caractériser une structure. Par exemple, imaginons que notre structure de monoïde de tout à l'heure n'était en fait pas associative. Dans ce cas, les opérations $((- \cdot -) \cdot -)$ et $(- \cdot (- \cdot -))$ seraient différentes. Mais d'un autre côté, ces opérations ne sont pas tout à fait indépendantes. Ce n'est pas comme si nous avions introduit un nouveau symbole

1. Cette démarche fait un peu penser à la dichotomie existante, en logique, entre les théories logiques (axiomatique) et l'ensemble de leurs modèles.

d'opération ternaire. Ici, $((-\cdot-)\cdot-)$ et $(-\cdot(-\cdot-))$ sont indubitablement liés à l'opération $(-\cdot-)$ en arité 2. En réalité, les deux opérations ternaires sont obtenues comme une sorte de composition de l'opération $(-\cdot-)$. Plus précisément, on définit une composition qui insère une opération m_i différente dans chacune des n entrées d'une opération m_n . On note cette composition comme $m_n \circ (m_{i_1}, \dots, m_{i_n})$. Par exemple, $((-\cdot-)\cdot-)$ serait obtenu comme $(-\cdot-) \circ ((-\cdot-), \text{id})$, ou encore, $(-\cdot-)\cdot(-\cdot-) = (-\cdot-) \circ ((-\cdot-), (-\cdot-))$. Nous avons donc muni un ensemble d'opérations d'une composition, et c'est exactement ce qu'on appelle une opérade

Définition 1.3 (Opérade non-symétrique). *Une opérade (non-symétrique) est une famille d'ensemble $\{\mathcal{O}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ munie, pour chaque $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, d'un morphisme*

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(k_1) \times \dots \times \mathcal{O}(k_n) \longrightarrow \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)$$

respectant les conditions :

1. (unité) Il existe $\text{id} \in \mathcal{O}(1)$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{O}(n)$,

$$\text{id} \circ (\mu) = \mu = \mu \circ (\text{id}, \dots, \text{id})$$

2. (associativité) Pour chaque $\mu \in \mathcal{O}(n)$, pour chaque $\sigma_i \in \mathcal{O}(k_i)$ et pour chaque $\gamma_{ij} \in \mathcal{O}(l_{ij})$,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_1 \circ (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1k_1}), \dots, \sigma_n \circ (\gamma_{n1}, \dots, \gamma_{nk_n})) = \\ (\mu \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) \circ (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1k_1}, \dots, \gamma_{n1}, \dots, \gamma_{nk_n}). \end{aligned}$$

avant de commenter les deux conditions, introduisons une petite notation.

Remarque 1.4 (Composition partielle). Comme il est souvent laborieux d'écrire toute la composition, une astuce consiste à introduire les **compositions partielles**. Elles permettent de diviser la composition en parties plus simples et sont définies en fonction de la composition dans l'opérade. On les définit, pour chaque $i = 1, \dots, n$ comme

$$\begin{aligned} \circ_i : \mathcal{O}(n) \circ \mathcal{O}(k) &\longrightarrow \mathcal{O}(n+k-1) \\ \mu, \sigma &\longmapsto \mu \circ (\text{id}, \dots, \underbrace{\sigma}_{i\text{-ème}}, \dots, \text{id}). \end{aligned}$$

Notons que si toutes les compositions partielles sont connues, il est possible de retrouver les compositions de la définition d'opérade en observant par exemple qu'au vu des axiomes, $\mu \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = ((\mu \circ_n \sigma_n) \circ_{n-1} \dots) \circ_1 \sigma_1$.

Nous attirons également l'attention du lecteur sur le fait que malgré l'axiome d'associativité, il arrive souvent que $(\mu \circ_i \sigma) \circ_j \gamma \neq \mu \circ_i (\sigma \circ_j \gamma)$.

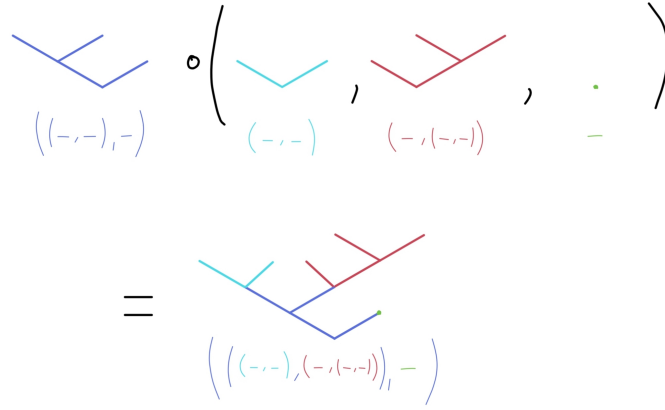


FIGURE 1.1 – La composition pour les arbres planaires plantés binaires.

donnons un exemple informel, qui permet d'acquérir une meilleure intuition des opérades.

Exemple 1.5 (Les arbres planaires plantés binaires, C.1 dans [16]). Un arbre à n feuilles peut naturellement être pensé comme une opération d'arité n . On dit qu'un arbre est

- planté, s'il possède un nœud interne particulier qui joue le rôle de racine,
- planaire, lorsqu'on l'identifie à sa représentation dans le plan,
- binaire si chacun de ses nœuds internes (sauf la racine) est connecté à exactement trois arêtes.

On considère alors $\mathcal{O}(n)$ comme l'ensemble des arbres planaires plantés binaires à n feuilles. La composition est donnée par la greffe d'un arbre sur un autre, comme en figure 1.1. On peut associer à chaque arbre un agencement de parenthèses, permettant de comprendre comment ils représentent des opérations.

Notons qu'il est aussi possible de considérer une variante de cette opérade, en oubliant le fait que les arbres soient binaires.

Exemple 1.6 (Les endomorphismes). L'ensemble des fonctions $X^n \rightarrow X$ sur un ensemble X , noté $\mathcal{E}nd_X(n)$, forme une opérade. La i -ème composition entre $f : X^n \rightarrow X$ et $g : X^k \rightarrow X$ est alors définie comme

$$f \circ_i g : X^{n+k-1} \rightarrow X$$

$$(x_1, \dots, x_{n+k-1}) \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+k-1}), x_{i+k}, \dots, x_{n+k-1}).$$

Revenons quelques instants à l'exemple du début de cette section 1.1. Nous avons compris que l'ensemble des opérations d'un monoïde avait une structure d'opérade,

à savoir, l'opérade associative (1.1). Cependant, la structure de monoïde semble fort éloignée de l'opérade associative quand cette dernière est considérée comme un objet abstrait. Nous aimerions en réalité être capable d'interpréter chaque élément de l'opérade comme une opération. Cette interprétation se fait par ce qu'on appelle une *action d'opérades*.

Un moyen d'introduire les actions d'opérades est par le biais des *morphismes d'opérades*.

Définition 1.7 (morphisme d'opérades). *Un **morphisme d'opérades** entre deux opérades $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, est une famille de morphismes $\varphi_n : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}'(n)$ tel que*

1. $\varphi_1(\text{id}_{\mathcal{O}}) = \text{id}_{\mathcal{O}'}$.
2. $\varphi_{\sum k_i}(\mu \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = \varphi_n(\mu) \circ (\varphi_{k_1}(\sigma_1), \dots, \varphi_{k_n}(\sigma_n))$.

Définition 1.8 (Actions et algèbres d'opérade). *Soit X un ensemble, une **action d'opérade** de $\mathcal{O}$ sur X est un morphisme de $\mathcal{O}$ à l'opérade des endomorphismes sur X (1.6) :*

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E}nd_X.$$

*On dit alors que $\mathcal{O}$ **agit** sur X ou encore, que X est une **algèbre sur $\mathcal{O}$** .*

Au regard de cette définition, on comprend bien qu'à chaque symbole d'opération $\mu \in \mathcal{O}(n)$, on associe une opération sur X sous la forme d'une fonction $X \times \dots \times X \longrightarrow X$ d'arité n .

Nous pouvons rendre la définition d'action plus explicite en utilisant notamment la bijection $\{X \times Y \rightarrow Z\} \xleftrightarrow{1:1} \{X \rightarrow [Y \rightarrow Z]\}$. Les deux conditions nécessaires pour être un morphisme sont alors rendues explicites.

Définition 1.9 (Actions et algèbres d'opérades explicites). *Soit X un ensemble, une **action d'opérade** de $\mathcal{O}$ sur X est pour chaque n , la donnée d'une fonction*

$$-[-, \dots, -] : \mathcal{O}(n) \times \overbrace{X \times \dots \times X}^n \longrightarrow X$$

tel que, pour $\text{id} \in \mathcal{O}(1)$, $\mu \in \mathcal{O}(n)$, $\sigma_i \in \mathcal{O}(k_i)$ et $x, x_{ij} \in X$,

1. $\text{id}[x] = x$
- 2.

$$\begin{aligned} (\mu \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) [x_{11}, \dots, x_{1k_1}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nk_n}] = \\ \mu(\sigma_1[x_{11}, \dots, x_{1k_1}], \dots, \sigma_n[x_{n1}, \dots, x_{nk_n}]). \end{aligned}$$

*On dit alors que $\mathcal{O}$ **agit** sur X ou encore, que X est une **algèbre sur $\mathcal{O}$** .*

La notion d'action d'opérade nous permet de trouver ce genre de résultats.

Proposition 1.10 (Les algèbres sur $\mathcal{A}ss$). *Soit X un ensemble. X est une algèbre sur $\mathcal{A}ss^u$ si et seulement si X est un monoïde (associatif et unitaire).*

Démonstration. On vérifie que l'élément dans $\mathcal{A}ss(2)$ induit une multiplication associative. Inversement, une multiplication associative caractérise un morphisme de $\mathcal{A}ss$ vers $\mathcal{E}nd_X$. $\square$

Nous savons maintenant que $\mathcal{A}ss$ permet de caractériser les monoïdes associatifs. En réalité, toute opérade qui contient $\mathcal{A}ss$ définit également une structure de monoïde. En d'autres termes, si je suis une opérade qui contient $\mathcal{A}ss$ et qui agit sur un ensemble, j'induirai un produit associatif sur cet ensemble. Cette idée motive la définition d'opérade multiplicative, lorsque l'on veut garantir que notre opérade contient un produit associatif.

Définition 1.11 (opérade multiplicative). *Une opérade $\mathcal{O}$ est **multiplicative** si elle est munie d'un morphisme d'opérades*

$$\mathcal{A}ss^u \longrightarrow \mathcal{O}.$$

*Un **morphisme d'opérades multiplicatives** entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ est un morphisme d'opérades $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ pour lequel le triangle*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O} \\ & \nearrow & \downarrow \varphi \\ \mathcal{A}ss^u & & \mathcal{O}' \\ & \searrow & \end{array}$$

*commute.*²

1.2 Opérades topologiques

Jusqu'à présent, nous avons introduit la définition d'opérade dans les ensembles. En étudiant les définitions de plus près, nous pouvons tout à fait remplacer les ensembles par des espaces topologiques et les fonctions par des fonctions continues. Nous obtenons ainsi la notion d'opérade topologique.

Nous introduirons dans cette section deux opérades qui se retrouveront au cœur de la preuve de Moriya dans le chapitre 3, à savoir, l'opérade de Konsevich à repères, $f\mathcal{K}_d$, et l'opérade des directions à repères $f\mathcal{S}_d$.

2. Notons que la catégorie des opérades multiplicatives est en fait la catégorie *coslice* par rapport à l'objet $\mathcal{A}ss^u$.

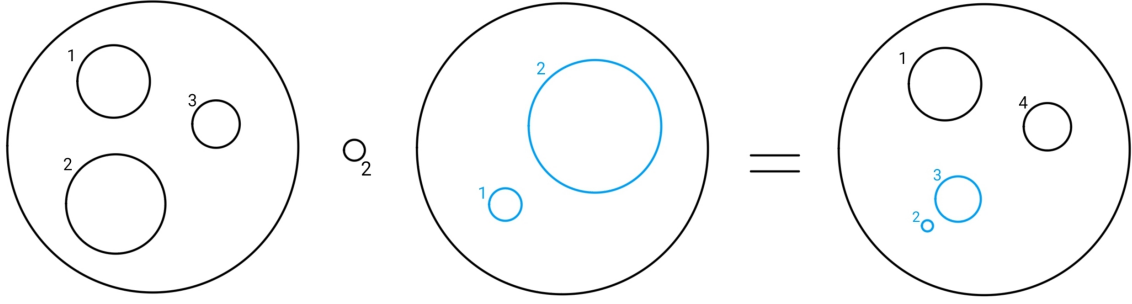


FIGURE 1.2 – Illustration d'une composition partielle pour l'opérade des petites disques en dimension 2.

Notons que tous les exemples précédents, dans les ensembles, peuvent être vu comme des opérades topologiques, en munissant ces ensembles de la topologie discrète.

1.2.1 L'opérade des petits disques, l'opérade des directions, et l'opérade de Kontsevich

Nous allons maintenant définir trois opérades topologiques très populaires. Le lien fort qu'il existe entre ces trois opérades sera présenté. Nous ferons un détour en mentionnant le théorème de reconnaissance qui constitue à lui seul une motivation à l'étude des opérades.

L'une des opérades topologiques les plus connues est l'opérade des petits disques.

Exemple 1.12 (Opérade des petits disques / petits cubes). Approchons cette opérade visuellement. Une approche formelle est également possible mais ne nous apporterait pas un avantage dans notre traitement.

Notons l'**opérade des petits disques** $\mathcal{D}_d := \{\mathcal{D}_d(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Visuellement, un élément de $\mathcal{D}_d(n)$ est une configuration ordonnée (et l'ordre est important) de n petites boules ouvertes de dimension d , deux à deux disjointes et incluses dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Imaginons $A^1 \in \mathcal{D}_d(n)$ et $A^2 \in \mathcal{D}_d(k)$ deux telles configurations de n et k boules respectivement. La i -ème composition partielle consiste à remplacer la i -ème boule de A^1 , par A^2 tout entier (en tant que boule unité), en ajustant le rayon de la boule unité par le rayon de la i -ème boule de A^1 ayant disparu, comme en figure 1.2. Notons qu'une ré-indexation des boules est nécessaire.

L'**opérade des petits cubes** $\mathcal{C}_d$ suit exactement la même construction mais à la place de prendre des boules, on prend des rectangles de dimension d (produit cartésien de d intervalles), voir figure 1.3. C'est une variante de l'opérade $\mathcal{D}_d$ qui lui est homotopiquement équivalent.

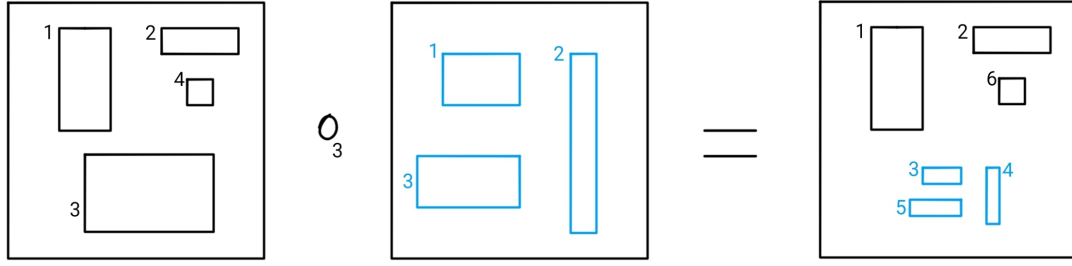


FIGURE 1.3 – La composition partielle dans l’opérade des petits cubes en dimension 2.

Pour formellement définir une topologie sur $\mathcal{D}_d(n)$ (ou $\mathcal{C}_d(n)$), il faut d’abord représenter les configurations de boules comme un plongement. En voyant alors $\mathcal{D}_n$ comme une espace de plongements, nous pouvons le munir de la topologie compact-ouvert³.

Nous disions dans la section précédente que chaque élément d’une opérade pouvait être pensé comme une opération. A quelle opération un agencement de petits disques ou de petits cubes pourrait-il bien correspondre ?

Commençons par investiguer cette question pour $d = 1$. L’opérade des petits disques et l’opérade des petits cubes coïncident en dimension 1. Elle est alors parfois appelée l’opérade des petits intervalles. Prenons X un espace topologique avec un point particulier, $x_0 \in X$, appelé le point de base. Considérons alors l’espace⁴ des lacets sur X :

$$\Omega(X) := \{[0, 1] \xrightarrow{\alpha} | \alpha \text{ continu, et } \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}.$$

Il est courant de munir cet espace d’une opération binaire, $*$, la concaténation. Sur base de deux lacets α et β , leur concaténation $\alpha * \beta$ correspond au lacet qui parcourt α et β l’un après l’autre, mais ce, deux fois plus vite. Formellement, l’opération de concaténation peut être définie comme :

$$\begin{aligned} * : \Omega(x) \times \Omega(X) &\longrightarrow \Omega(x) \\ \alpha, \beta &\longmapsto \left[\begin{array}{l} \alpha * \beta : [0, 1] \longrightarrow X \\ t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \beta(2(t - 1/2)) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases} \end{array} \right] \end{aligned}$$

En regardant le domaine de $\alpha * \beta$, on peut par exemple colorier les parties du segment qui correspondent au lacet α et les parties qui correspondent au lacet β . On voit apparaître alors deux intervalles, qui pourraient tout à fait correspondre à l’élément $(0, 1/2) \sqcup (1/2, 1) \in \mathcal{C}_1(2)$.

3. A savoir, la topologie engendrée par les $V(K, U) := \{f \in \mathcal{D} \mid f(k) \subset U\}$ pour K compacte dans le domaine de f et U ouvert dans le codomaine de f .

4. Il est possible de munir $\Omega(X)$ d’une topologie. En général, on choisit la topologie *compact-ouverte*.

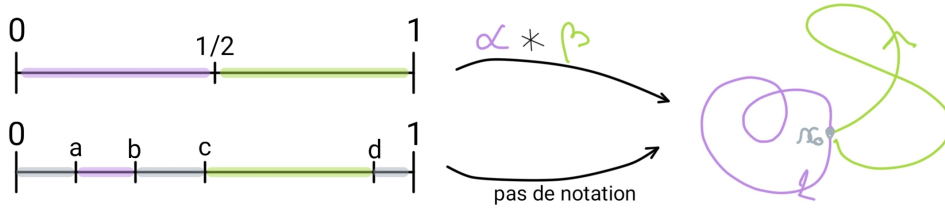


FIGURE 1.4 – Différentes concaténations de deux chemins.

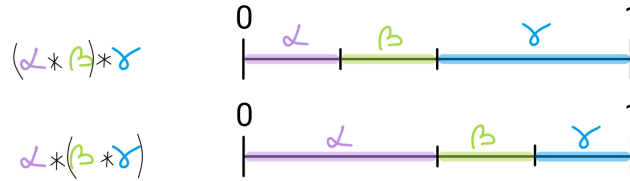


FIGURE 1.5 – Différentes concaténations de trois chemins.

En fait, nous pourrions facilement associer à chaque élément de $\mathcal{C}_1(2)$ une manière de concaténer les lacets. Notons $(a, b) \sqcup (c, d) \subset [0, 1]$ deux intervalles ouverts représentant un élément de $\mathcal{C}_1(2)$, comme en figure 1.4. Nous pouvons alors imaginer une opération de concaténation qui consisterait à rester sur le point de base de 0 à a , parcourir tout α entre a et b , rester sur le point de base entre b et c , parcourir tout β entre c et d , et finalement rester sur le point de base pour le temps restant.

Cette dynamique se généralise pour les opérations d'arité supérieure. prenons par exemple la concaténation $((- * -) * -)$, elle correspondrait à l'élément $(0, 1/4) \sqcup (1/4, 1/2) \sqcup (1/2, 1) \in \mathcal{C}_1(3)$. L'opération $(- * (- * -))$ serait l'élément $(0, 1/2) \sqcup (1/2, 1/4) \sqcup (1/4, 1) \in \mathcal{C}_1(3)$, comme représenté en figure 1.5. Et de la même manière que précédemment, à chaque disposition d'intervalle, il serait possible d'associer une manière de concaténer. La composition dans l'opérade des petits intervalles $\mathcal{C}_1$ met alors en évidence une riche structure dans la manière qu'il existe de concaténer de chemins.

Après avoir exploré intuitivement la dimension 1, qu'en est-il des dimensions supérieures? Pour la dimension deux, nous pouvons alors considérer l'espace des doubles lacets. Cet espace correspond à l'ensemble des fonctions continues du carré vers l'espace topologique pointé X qui envoient le bord du carré sur le point de base.

$$\Omega^2(X) := \{[0, 1]^2 \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ continu, et } \alpha(\partial([0, 1]^2)) = x_0\}$$

Cette espace correspond, d'une certaine manière, aux lacets de lacets. On peut alors faire le même jeu que précédemment. À chaque configuration de rectangles, on associe une opération. Par exemple, une configuration qui comporte trois rectangles sera une opération ternaire. Cette opération prendra trois lacets de lacets α, β et γ , créera un nouveau lacet de lacet qui correspondra exactement à α sur le premier carré, β sur le deuxième, et γ sur le troisième. La figure 1.6 suggère une illustration de la situation. La

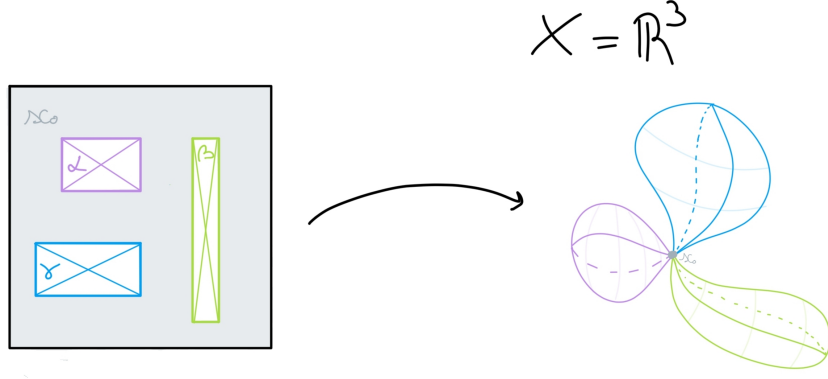


FIGURE 1.6 – Exemple de concaténation de trois doubles lacets α, β et γ dans $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

composition dans l'opérade $\mathcal{C}_d$ se traduit alors en une compatibilité entre les différentes manières de concaténer ces lacets de lacets.

Toute cette discussion informelle nous a permis de percevoir comment l'opérade des petits cubes de dimension d , $\mathcal{C}_d$, agissait sur $\Omega^k(X)$. Ce qui est plus spectaculaire, c'est que l'inverse est également vrai. L'opérade des petits cubes capture parfaitement la structure des espaces de lacets itérés

Théorème 1.13 (Théorème de reconnaissance, section 1.7 dans [17]). *Soit Y un espace connexe⁵. Y est une algèbre sur $\mathcal{C}_d$, si et seulement s'il existe un espace X tel que Y est homotopiquement équivalent à $\Omega^k(X)$.*

Démonstration. La démonstration dépasse le cadre de ce travail. □

Même si elle est très intuitive, manipuler l'opérade des petits disques ou des petits cubes n'est pas toujours facile. Dans ce mémoire, nous allons travailler avec une variante de cette opérade, à savoir, l'*opérade de Kontsevich*. Pour construire l'opérade de Kontsevich, il faut passer par les **espaces de configurations** qui consiste à regarder toutes les possibilités de placer n point dans $\mathbb{R}^d$:

$$\text{Conf}_d(n) := \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \mid \vec{x}_i \neq \vec{x}_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

Remarquons que nous avons une fonction $\mathcal{D}_d(n) \longrightarrow \text{Conf}_d(n)$ qui consiste à associer, à chaque configuration de boules, la configuration de leur centre. Il est important de mentionner que l'ordre des points (tout comme l'ordre des boules dans $\mathcal{D}_d$) fait partie de la structure. Deux configurations ayant les mêmes points, mais dans un ordre différent, sont donc deux configurations différentes.

5. Pour être précis, il est également nécessaire que Y ait le même type d'homotopie qu'un CW-complexe avec un point de base non dégénéré

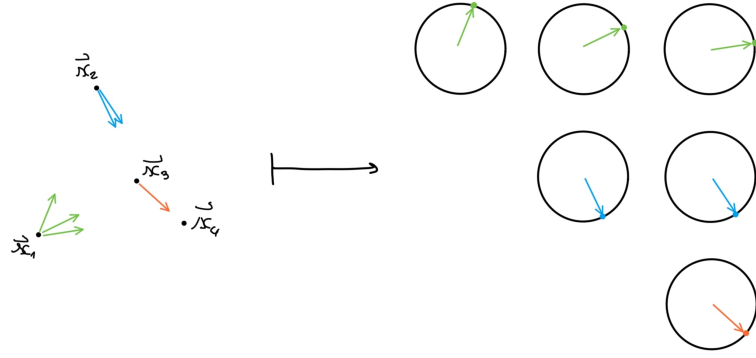


FIGURE 1.7 – Représentation du morphisme associant à un élément de $\text{Conf}_2(4)$ un élément de $\mathcal{K}_2(4)$.

Nous pouvons montrer que cette fonction est une équivalence homotopique (section 2.3 dans [13]). Il s'avère néanmoins assez compliqué de munir Conf_d d'une structure d'opérade. Nous allons alors en quelque sorte regarder Conf_d à travers un autre espace topologique : le produit de sphères.

L'astuce consiste à simplifier les espaces de configurations, en ne considérant que la direction de la position relative entre chaque point d'une configuration. En d'autres termes, nous définissons une fonction θ , qui à chaque configuration, associe tous les vecteurs de directions possibles (figure 1.7) :

$$\begin{aligned} \theta^{(n)} : \text{Conf}_d(n) &\longrightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} S^{d-1} \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) &\longmapsto \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|} \end{aligned}$$

Notons que nous avons seulement considéré les vecteurs directionnels partant d'un point d'indice plus petit à un point d'indice plus grand. Il va de soi que regarder les vecteurs directionnels partant d'un point d'indice plus grand à un point d'indice plus petit représenterait un doublon d'information.

La prochaine étape consiste alors à munir $\prod_{1 \leq i < j \leq n} S^{d-1}$ d'une structure d'opérade.

Exemple 1.14 (Opérade des directions, section 2 dans [22]). **L'opérade des directions** en dimension d , notée $\mathcal{S}_d$, correspond, en arité $n \geq 2$, au produit⁶ de $\binom{n}{2}$ sphères

6. Il peut être utile de se souvenir que $\binom{n}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$.

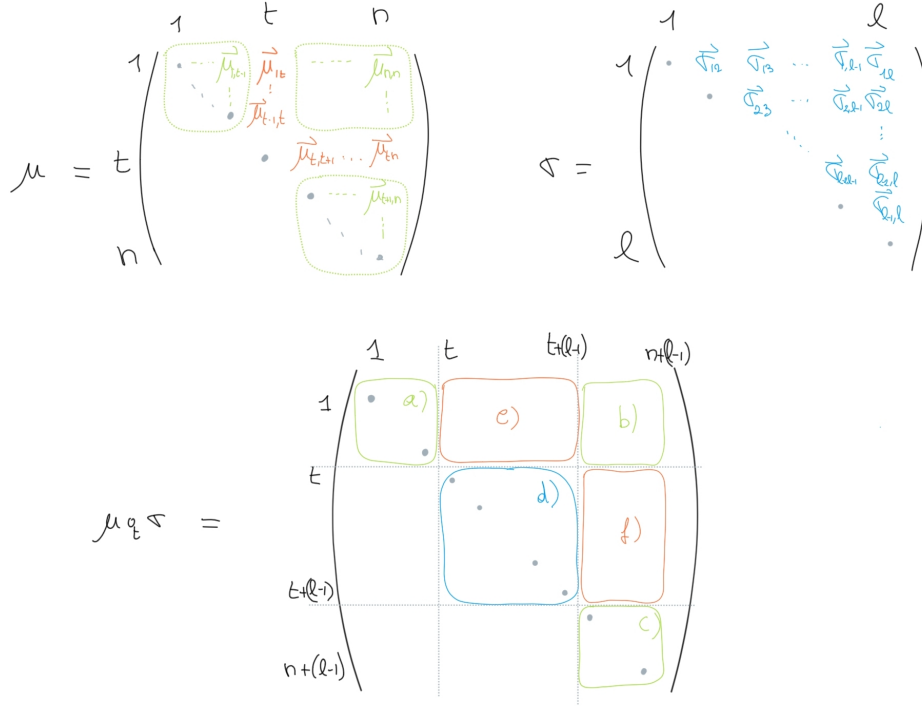


FIGURE 1.8 – Illustration du fonctionnement de la composition dans l'opérade des directions

de dimension d , et en arité $n < 2$ au singleton.

$$\mathcal{S}_d(n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} S^{d-1} \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$\mathcal{S}_d(n) := \{*\} \quad \text{pour } n = 0, 1.$$

La composition dans cette opérade correspond à des duplications de vecteurs (ou éventuellement des projections).

Pour mieux la comprendre, plaçons chaque vecteur de $\mathcal{S}_d(n)$ dans une matrice triangulaire supérieure de dimensions $n \times n$, en suivant l'indexation i, j donné par le produit (L'intuition géométrique derrière cette définition viendra avec l'opérade de Kontsevich). Étant donné $\mu \in \prod_{1 \leq i < j \leq n} S^{d-1}$ et $\sigma \in \prod_{1 \leq i < j \leq k} S^{d-1}$, nous cherchons à définir $\mu \circ_t \sigma \in \prod_{1 \leq i < j \leq n+k-1} S^{d-1}$. Cet élément $\mu \circ_t \sigma$ peut aussi être représenté par une matrice triangulaire $n + k - 1$. Divisons cette matrice en six régions comme en figure 1.8.

Les régions (a), (b) et (c) seront juste une copie d'une partie de la matrice μ . Plus précisément (a) correspondra aux entrées $i, j < t$ de μ , (b) correspondra aux entrées $i < t, t < j$ de μ et (c) correspondra aux entrées $t < i, j$. La région (d) correspondra exactement à la matrice σ . Les l colonnes de la région (e) sont $l - 1$ copie de la t -ème colonne de μ . Similairement, les l rangées de (f) seront une copie de la t -ème rangée de

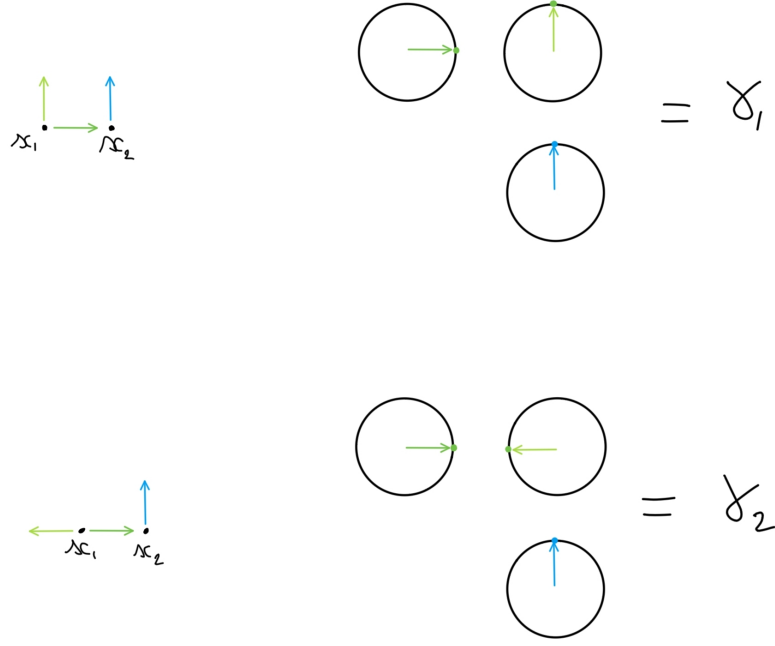


FIGURE 1.9 – Élément de $\mathcal{S}_2(3)$ illustrant la non-surjectivité de θ .

μ .

On termine cette définition de composition dans $\mathcal{S}_d$ en remarquant que si $\sigma \in \mathcal{S}_d(1)$, alors la composition consiste en l'identité, et que si $\sigma \in \mathcal{S}_d(0)$, alors la composition consiste en la suppression de la t -ème ligne et t -ème colonne de μ .

On peut vérifier que la composition ainsi définie munie $\mathcal{S}_d$ d'une structure d'opérade (théorème 5 dans [22]).

Maintenant que nous avons une structure d'opérade sur l'image de $\theta : \text{Conf}_d \longrightarrow \mathcal{S}_n$, nous aimerions pouvoir penser l'espace de configurations comme une opérade. L'un des principaux problèmes est que θ_n n'est pas surjective.

La figure 1.9 montre deux éléments de $\mathcal{S}_2(2)$ qui ne peuvent pas avoir d'antécédents via θ .

En effet, en regardant γ_1 1.9, on peut placer x_1 et x_2 , mais on ne parviendra jamais à placer x_3 parce que quelle que soit la position de x_1 et x_2 , les demi-droites partant du vecteur vert clair et du vecteur bleu ne s'intersectent jamais. La même situation peut être observée pour γ_2 .

Une solution pour pallier ce manque de surjectivité est de considérer l'image de θ comme opérade, à la place de $\mathcal{S}_d$ tout entier. Hélas, $\text{Im}(\theta)$ n'est pas stable pour la composition. En

effet, on peut vérifier avec la définition de composition que l'élément $(0, 1) \in \mathcal{S}_2(2) = S^d$ composé par $(1, 0)$ donne exactement γ_1 :

$$\begin{pmatrix} \cdot & (0, 1) \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \circ_1 \begin{pmatrix} \cdot & (1, 0) \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & (1, 0) & (0, 1) \\ \cdot & \cdot & (0, 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \gamma_1 \notin \text{Im}(\theta). \quad (1.1)$$

On remarque néanmoins que γ_2 est presque dans l'image de θ . En effet, si on perturbe correctement, ne fût-ce qu'un tout petit peu, l'une des trois composantes de γ_1 , on serait alors capable de créer une configuration qui lui correspond. En fait, même si $\gamma_1 \notin \text{Im}(\theta)$, γ_1 est dans la fermeture de $\text{Im}(\theta)$, que l'on notera $\overline{\text{Im}}(\theta)$. Grâce à un bon formalisme, Sinha montre alors :

Théorème 1.15 ($\overline{\text{Im}}(\theta)$ est une opérade, théorème 4.5 [24]). *Avec les notations précédemment introduites, $\mathcal{S}_d$ induit une structure d'opérade sur $\overline{\text{Im}}(\theta)$.*

Notons que γ_2 donne un exemple d'élément qui n'est pas dans $\overline{\text{Im}}(\theta)$. En effet, quelques soit les composantes de γ_2 que l'on perturbe, il reste impossible de créer une configuration lui correspondant.

Grâce au théorème 1.15 on définit l'opérade de Kontsevich.

Exemple 1.16 (Opérade de Kontsevich). L'opérade de Kontsevich, notée $\mathcal{K}_d$, est la sous-opérade de $\mathcal{S}_d$ correspondant à la fermeture de l'image de θ .

Pour interpréter la composition dans l'opérade de Kontsevich, il est utile de mettre en correspondance les éléments de l'opérade avec des configurations de $\mathbb{R}^d$ à travers θ . Le problème est que rien ne nous garantit que θ est injectif. Par exemple, deux configurations de $\mathbb{R}^d$ qui diffèrent par une translation ou une homothétie (multiplication par un scalaire) de $\mathbb{R}^d$ correspondront aux mêmes éléments dans $\text{Im}(\theta) \subset \mathcal{K}_d$. Identifier ces configurations ensemble ne nuira pas, cela dit, à notre interprétation.

Considérons alors $\widetilde{\text{Conf}}_d$ comme étant le quotient de Conf_d par les translations et homothéties de $\mathbb{R}^d$. Même si cette astuce ne résout pas totalement le manque d'injectivité (on peut par exemple penser à la configuration de trois points alignés, quelle que soit la position du point du milieu, on obtiendra la même image à travers θ), nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.17 (injectivité à homotopie près de θ , théorème 4.2 dans [24]). $\widetilde{\text{Conf}}_d(n)$ est homotopiquement équivalent à $\mathcal{K}_d(n)$.

Grâce aux théorèmes 1.15 et 1.17, nous pouvons interpréter les compositions dans $\mathcal{K}_d$ et donc certaines compositions dans $\mathcal{S}_d$

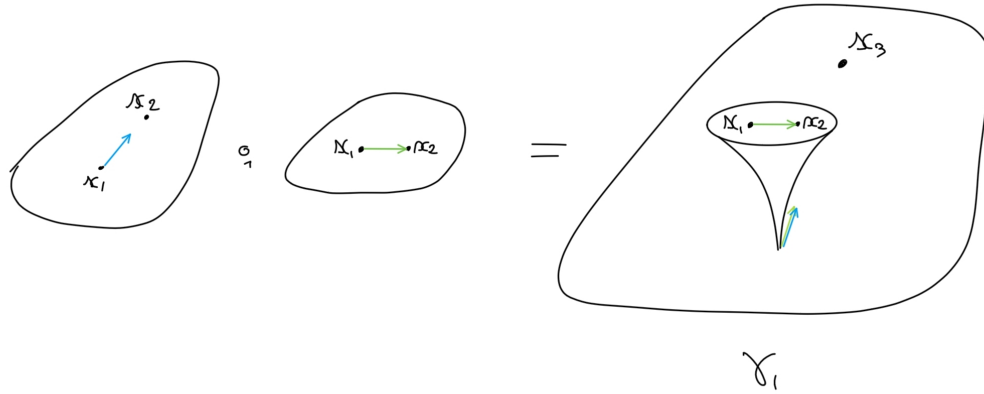


FIGURE 1.10 – Illustration de la composition de l'équation 1.1 dans l'opérade de Kontsevich.

La i -ème composition entre deux configurations μ et σ peut être interprétée comme l'ajout, infinitésimalement proche, de tous les points de σ à la place du i -ème point de μ . La figure 1.10 représente ainsi la composition de l'équation 1.1. Cette composition n'est pas sans rappeler celle de l'opérade des petits disques.

Par ailleurs, on comprend aussi le sens de ce dédoublement de composantes dans la formule de composition $\circ_t$ de $\mathcal{S}_d$. Ce dédoublement correspond à l'ajout de point dans la configuration. En effet, aux yeux des points déjà présents, tous les nouveaux points ajoutés ont exactement la même position relative que le point d'indice t remplacé.

Finalement, nous pouvons citer ce théorème qui nous permet de relier ensemble nos trois exemples

Théorème 1.18 (Equivalence homotopique de $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{K}_d$). *L'opérade des petits disques de dimension d est homotopiquement équivalente, comme opérade, à l'opérade de Kontsevich. Plus précisément, il existe un zigzag de morphismes d'opérades entre $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{K}_d$ qui sont des équivalences homotopiques.*

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve. Notons que dans [22], en section 3, Salvatore exhibe un zigzag de morphismes d'opérade possible. $\square$

Notons pour terminer deux avantages à travailler avec l'opérade de Kontsevich plutôt que l'opérade des petits disques. Le premier est que $\mathcal{K}_d$ se plonge dans l'opérade des directions, qui contrairement aux petits disques, à une formule de composition facile à manipuler. Le deuxième, est que l'opérade de Kontsevich peut être munie d'une structure multiplicative.

Proposition 1.19 (L'opérade de Kontsevich est multiplicative). *L'opérade de Kontsevich $\mathcal{K}_d$ et l'opérade des directions $\mathcal{S}_d$ sont des opérades multiplicatives.*

Démonstration. Selon la définition 1.11, $\mathcal{K}_d$ est multiplicative s'il existe un morphisme d'opérades

$$\mathcal{A}ss \longrightarrow \mathcal{K}_d.$$

Commençons par choisir une opération en arité 2 dans $\mathcal{K}_d(2)$ qui sera l'image de l'unique point de $\mathcal{A}ss(2)$. Prenons par exemple le vecteur $v_0 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{K}_d(2) = S^{d-1}$. Nous allons montrer que ce choix caractérise un morphisme d'opérades en montrant que toutes les compositions possibles issues de ce v_0 sont identiques (ceci traduit le fait que dans $\mathcal{A}ss$, toutes les compositions pour une arité donnée, induisent toujours le même élément). Par exemple, il faut notamment montrer que $v_0 \circ (v_0, \text{id}) = v_0 \circ (\text{id}, v_0)$ dans $\mathcal{K}_d(3)$. Cependant, comme la composition dans $\mathcal{K}_d$ (qui est induite par celle de $\mathcal{S}_d$) consiste uniquement en des dédoublements de vecteurs (ou éventuellement des projections), nous aurons forcément que toutes telles compositions correspondront à la matrice triangulaire supérieure avec uniquement des v_0 comme composantes ; et ce quelle que soit l'agencement de compositions choisi. Par exemple :

$$v_0 \circ (v_0, \text{id}) = \begin{pmatrix} \cdot & v_0 & v_0 \\ \cdot & \cdot & v_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = v_0 \circ (\text{id}, v_0).$$

Notons que si l'opérade associative $\mathcal{A}ss$ est unitaire (voir 1.1), alors l'image par n'importe quel foncteur de $* \in \mathcal{A}ss^u(0)$ en arité 0 sera l'élément $* \in \mathcal{K}_d(0) = \mathcal{S}_d(0)$, qui correspond, pour la composition dans $\mathcal{S}_d$, à l'unique matrice de dimension 0.

Remarquons également qu'exactement le même argument permet de dire que $\mathcal{S}_d$ est une opérade multiplicative. $\square$

1.2.2 Produit semi-direct d'opérades

Le produit semi-direct permet de définir la notion d'*opérade à repères* centrale dans notre travail. Pour commencer, notons qu'il existe une notion d'action d'un groupe G sur une opérade $\mathcal{O}$ qui nous permet d'élargir notre trousse d'exemples. La situation qui motive cette construction est liée à l'opérade des petits disques, $\mathcal{D}_d$, précédemment introduite. Intuitivement, nous voulons associer à chacune des boules dans une configuration de $\mathcal{D}_d(n)$ une orientation. Pour ce faire, nous allons adjoindre à chaque configuration de n boules un n -uplet d'élément de SO_d , le groupe des rotations de $\mathbb{R}^d$. La i -ème entrée de ce n -uplet représentera l'orientation de la i -ème boule. La loi de composition se trouvera alors modifiée en fonction de la rotation de la boule qui sera remplacée.

Formellement : Étant donné un groupe topologique G , définissons une G -opérade comme une opérade topologique $\mathcal{O}$, tel que⁷

- G agit continument sur chaque espace $\mathcal{O}(n)$,
- La composition est G -équivariante :

$$g(\mu \circ (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) = (g\mu) \circ (g\sigma_1, \dots, g\sigma_n)$$

pour $g \in G$ et $\mu, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{O}$,

- L'unité est préservée

$$g \text{ id} = \text{id}$$

Définition 1.20 (Produit semi-direct d'opérade, définition 2.1 dans [23]). *Soit G , un groupe et $\mathbb{O}$ une G -opérade, le **produit semi-direct** de $\mathcal{O}$ par G , noté $\mathcal{O} \rtimes G$, est défini en arité n par*

$$(\mathcal{O} \rtimes G)(n) := \mathcal{O}(n) \times G^{\times n}.$$

Il est muni d'une composition

$$(\mathcal{O} \rtimes G)(n) \times (\mathcal{O} \rtimes G)(k_1) \times \dots \times (\mathcal{O} \rtimes G)(k_n) \longrightarrow (\mathcal{O} \rtimes G)(\sum k_i).$$

En notant $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$ et $\vec{h}^{(i)} = (h_1^{(i)}, \dots, h_{k_i}^{(i)})$, cette composition est caractérisée par

$$(\mu, \vec{g}), (\sigma_1, \vec{h}^{(1)}), \dots, (\sigma_n, \vec{h}^{(n)}) \longmapsto (\mu \circ (g_1 \sigma_1, \dots, g_n \sigma_n), \vec{g} \circ (\vec{h}^{(1)}, \dots, \vec{h}^{(n)}))$$

où l'expression $\vec{g} \circ (\vec{h}^{(1)}, \dots, \vec{h}^{(n)})$ désigne le vecteur

$$(g_1 \vec{h}^{(1)}, \dots, g_n \vec{h}^{(n)}) := (g_1 h_1^{(1)}, \dots, g_1 h_{k_1}^{(1)}, \dots, g_n h_1^{(n)}, \dots, g_n h_{k_n}^{(n)}).$$

Remarque 1.21 (Opérade issue d'un groupe). La notation de la définition suggère une structure d'opérade sur le membre de droite de $\mathcal{O} \rtimes G$. Nous pouvons noter cette opérade $G^{\times -}$. Remarquons que la composition dans cette opérade s'exprime en fonction de la diagonale topologique Δ et de la multiplication $\cdot_G$ dans G . Plus précisément, $\vec{g} \circ (\vec{h}^{(1)} \dots \vec{h}^{(n)})$ consiste à dupliquer un certain nombre de fois chaque composante de $\vec{g}$ et à multiplier, termes à termes, toutes les répliques de la composante g_i avec les composantes de $\vec{h}^{(i)}$.

Passons à des exemples. En guise d'introduction, nous avons déjà expliqué comment SO_d agissait sur $\mathcal{D}_d$.

Remarquons alors que SO_d agit également sur $\mathcal{S}_d$. En effet, SO_d agissant, par définition, sur chaque sphère S^d , il agit aussi sur leur produit, composantes par composantes. La composition dans $\mathcal{S}_d$ étant définie par réorganisations et duplications de composantes

7. Ces conditions correspondent en fait à ce que serait une notion d'opérade dans la catégorie (monoïdale) des espaces topologiques munis d'une action de groupe.

(éventuellement projections), on peut facilement vérifier que la composition dans $\mathcal{S}_d$ est compatible avec l'action. Finalement, $\text{id} \in \mathcal{S}_d(1) = \{*\}$ est trivialement préservé par l'action.

Concernant l'opérade de Kontsevich $\mathcal{K}_d$, il suffit de remarquer qu'elle est fermée dans $\mathcal{S}_d$ sous l'action de SO_d . En effet, la rotation de n'importe quel élément de $\mathcal{K}_d(n)$ correspondra à un espace de configuration ayant subi la même rotation, et sera donc, toujours dans la fermeture de l'image de θ .

Notation 1.22. Notons $f\mathcal{D}_d$, $f\mathcal{S}_d$ et $f\mathcal{K}_d$ pour les produits semi-directs des opérades $\mathcal{D}_d$, $\mathcal{S}_d$ et $\mathcal{K}_d$ avec SO_d . On ajoutera le qualificatif **à repère** pour désigner ces opérades. Par exemple, l'opérade des petits disques à repère pour $f\mathcal{D}_d$.

On cite alors un résultat attendu, à mettre en relation avec son équivalent sans repères (1.18).

Théorème 1.23 (Équivalence homotopique entre $f\mathcal{D}_d$ et $f\mathcal{K}_d$). *L'opérade des petits disques à repère est homotopiquement équivalente, comme opérade, à l'opérade de Kontsevich à repère. Plus précisément, il existe un zigzag de morphismes d'opérades entre $f\mathcal{D}_d$ et $f\mathcal{K}_d$ qui sont des équivalences homotopiques.*

Démonstration. La preuve consiste à montrer que le zigzag du théorème 1.18 de la version sans repère est constitué de morphismes G -invariants. Comme pour la version sans repère, la preuve ne sera pas réalisée ici. (Voir [22] section 3 pour plus d'informations). $\square$

Remarque 1.24 (Transport de la multiplicativité). Il est utile de remarquer que si $\mathcal{O}$ est une G -opérade qui s'avère en plus être multiplicative au sens de la définition 1.11, alors $\mathcal{O} \rtimes G$ sera également une opérade multiplicative. Cette observation vient du fait que $\mathcal{O}$ peut toujours se plonger, en tant qu'opérade dans $\mathcal{O} \rtimes G$ via l'inclusion $\mu \longrightarrow (\mu, 1, \dots, 1)$. Vérifier que cette inclusion est un morphisme d'opérades revient à vérifier que les éléments de la forme $(\mu, 1, \dots, 1)$ sont stables par composition dans $\mathcal{O} \rtimes G$, ce qui est bien le cas. On obtient donc une structure multiplicative induite par celle de $\mathcal{O}$

$$\mathcal{A}ss \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \rtimes G.$$

En combinant cette observation à la remarque 1.19 disant que $\mathcal{K}_d$ et $\mathcal{S}_d$ sont multiplicatives, on constate que $f\mathcal{K}_d$ et $f\mathcal{S}_d$ sont deux opérades multiplicatives.

1.3 Transport d'opérations en homologie

Dans cette section, nous généralisons la notion d'opérade dans la catégorie des complexes de chaîne, et même à toute *catégorie monoïdale* $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ (voir A.3). Nous utilisons le terme de catégorie monoïdale pour pouvoir regrouper les catégories des ensembles, $(\text{ENS}, \times, \{*\})$, des espaces topologiques $(\text{TOP}, \times, \{*\})$ et des complexes de chaînes $(\text{Ch}, \otimes, R)$ autour d'un même concept. Il existe une définition de catégorie monoïdale abstraite que nous n'énoncerons pas explicitement pas dans ce document.

Nous investiguerons comment les opérades se transportent à travers certains types de foncteurs, les *foncteurs monoïdaux* (F, η, ι) (voir A.3.4). Finalement, nous explorerons comme ce transport se comporte avec les actions d'opérades.

Pour rappeler le contexte, ce qui nous a motivé à introduire les opérades dans ce document était cette volonté de munir l'homologie de structures supplémentaires, à l'image de ce qui a été fait en 1 avec les monoïdes topologiques. Nous avons déjà réalisé la première étape de ce projet, en comprenant que les opérations d'une structure pouvaient être ré-exprimées en terme d'opérades $\mathcal{O}$ et d'action d'opérades sur X . Notre objectif maintenant est de transporter ces actions à travers l'homologie. De cette manière, nous obtiendrons une nouvelle action, sur $H_*(X)$, d'une opérade que nous noterons $H_*(\mathcal{O})$.

Mentionnons également que ce transport de structure est essentiel pour énoncer la définition de *formalité* opéradique qui au cœur de notre travail.

1.3.1 Les opérades de chaînes

Nous définissons ici la notion d'opérade dans la catégorie des complexes de chaînes, vue comme une catégorie monoïdale $(\text{Ch}, \otimes, R)$. Notons que cette définition englobe la définition dans les ensembles, ou les espaces topologiques.

Définition 1.25 (Opérade de chaîne). *Soit R un anneau commutatif, une opérade de chaînes (non-symétrique) est une famille de complexe de chaînes $\{\mathcal{O}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ munie⁸, pour chaque $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, d'un morphisme de complexes de chaînes*

$$\circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{O}(k_n) \longrightarrow \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)$$

respectant les conditions :

8. Le produit tensoriel dans ce qui suit doit être compris comme le produit tensoriel de complexes chaînes défini en A.26

1. (unité) Il existe un morphisme de chaines⁹ $u : R \longrightarrow \mathcal{O}(1)$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n) \otimes R^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{id} \otimes u^{\otimes n}} & \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(1) \\ & \searrow & \downarrow \circ \\ & & \mathcal{O}(n) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R \otimes \mathcal{O}(n) & \xrightarrow{u \otimes \text{id}} & \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(n) \\ & \searrow & \downarrow \circ \\ & & \mathcal{O}(n) \end{array}$$

2. (associativité) Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{O}(n) \otimes \bigotimes_i^n \mathcal{O}(k_i)) \otimes (\bigotimes_i^n \mathcal{O}(l_{i1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(l_{ik_n})) & \\ & \swarrow \circ \otimes \text{id} \quad \searrow \tau & \\ \mathcal{O}(\sum k_i) \otimes (\bigotimes_i^n \mathcal{O}(l_{i1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(l_{ik_n})) & & \mathcal{O}(n) \otimes \bigotimes_i^n (\mathcal{O}(k_i) \otimes \mathcal{O}(l_{i1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(l_{ik_n})) \\ & \searrow \circ & \downarrow \text{id} \otimes \circ \\ & \mathcal{O}(\sum_{i,j} l_{ij}) & \mathcal{O}(n) \otimes \bigotimes_i^n \mathcal{O}(\sum_j l_{ij}) \\ & \swarrow \circ & \searrow \circ \\ & \mathcal{O}(\sum_{i,j} l_{ij}) & \end{array}$$

avec τ un morphisme qui réorganise les termes du produit tensoriel.

Un **morphisme d'opérades de chaines** est une famille de morphismes de complexes de chaines, pour lequel, chaque membre de la famille commute avec les compositions.

Notation 1.26 (Composition sur les éléments homogènes). Lorsque nous avons un élément $\mu \otimes \sigma \in \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k)$, nous écrirons $\mu \circ_i \sigma \in \mathcal{O}(n+k-1)$ pour désigner l'image à travers $\circ$ de $\mu \otimes u(1) \otimes \cdots \otimes \underbrace{\sigma}_{i\text{-ème}} \otimes \cdots \otimes u(1)$.

On remarque bien sûr que cette définition est extrêmement similaire à la définition d'opérade d'ensemble ou d'opérade topologique précédemment donnée (voir définition 1.3).

Pour donner des exemples d'opérades de chaines, nous souhaitons transporter la structure d'opérade de tous nos exemples précédents à travers le foncteur d'homologie. L'un des avantages de la définition d'opérade est que tous les axiomes sont exprimés (ou du moins exprimable) en termes de commutativité de diagrammes. Ainsi, la commutativité de ces diagrammes sera préservée par fonctorialité. Cela dit, il faut toutefois être prudent, tous les foncteurs ne permettent pas pour autant de transporter une structure d'opérade. Il faut que ce foncteur préserve la structure monoïdale. De tels foncteurs sont

9. R est vu comme un complexe de chaines concentré en degré 0 (voir exemple A.12).

appelés des foncteurs *lax-monoïdaux*. Nous savons que les foncteurs C_* , H_* et H sont de tels foncteurs, lorsqu'ils sont accompagnés du produit en croix $\times$, et des morphismes de Kunnet Q et Q^g , généralisé ou non (voir dans l'annexe A.3 pour plus d'informations).

Concrètement :

Proposition 1.27 (Transport de structure). *Soit $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux opérades dans deux catégories monoïdales $(\mathcal{C}, \times, I)$ et $(\mathcal{C}', \otimes, I')$ (voir A.3), soit $(F, \eta, \iota) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$, l'un des trois foncteurs $(C_*, \times, \iota_C)$, (H_*, Q, id) et (H, Q^g, id) préservant la structure monoïdale, comme dans la section A.3.4.*

Alors $F(\mathcal{O})$ définit une opérade de chaines, avec, en arité n ,

$$F(\mathcal{O})(n) := F(\mathcal{O}(n))$$

où la composition $\circ_F : F(\mathcal{O})(n) \otimes F(\mathcal{O})(k_1) \otimes \cdots \otimes F(\mathcal{O})(k_n) \longrightarrow F(\mathcal{O})(\sum k_i)$ est définie comme :

$$\begin{array}{ccc} F(\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(k_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(k_n)) & \xrightarrow{F(\circ_{\mathcal{O}})} & F(\mathcal{O}(\sum k_i)) \\ \uparrow \eta & \nearrow \circ_F & \\ F(\mathcal{O}(n)) \otimes F(\mathcal{O}(k_1)) \otimes \cdots \otimes F(\mathcal{O}(k_n)) & & \end{array}$$

Et l'unité comme

$$\begin{array}{ccc} F(I) & \xrightarrow{F(u)} & F(\mathcal{O}(1)) \\ \uparrow \iota & \nearrow u_F & \\ I' & & \end{array}$$

En plus, si $\varphi_n : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{K}(n)$ caractérise un morphisme d'opérades, dans ce cas, $F(\varphi_n) : F(\mathcal{O}'(n)) \longrightarrow F(\mathcal{K}'(n))$ caractérise également un morphisme d'opérades

Démonstration. Pour vérifier que $F(\mathcal{O})$ est une opérade, il faut vérifier la commutativité des trois diagrammes de la définition 1.25. Pour ce faire, il faut regarder le diagramme correspondant à travers F , et grâce à la naturalité de η (A.43), nous pouvons conclure à la commutativité des diagrammes pour $F(\mathcal{O})$. Par exemple, la figure 1.11 montre la commutativité pour l'un de ces diagrammes. $\square$

Le fait de pouvoir transformer les opérades topologiques en opérades de chaines nous donne alors une pléthore d'exemples. Mettons-en un en évidence :

Exemple 1.28 (Opérade de chaines associative). Considérons l'opérade associative $\mathcal{A}ss$ de l'exemple 1.1 caractérisée par des singletons en chaque arité. On définit alors l'opérade $\mathcal{A}ss_{\text{Ch}} := H_*(\mathcal{A}ss)$. Explicitement, en arité n , cette opérade correspond à I , le module gradué R , concentré en degré 0 (voir l'homologie du point A.7).

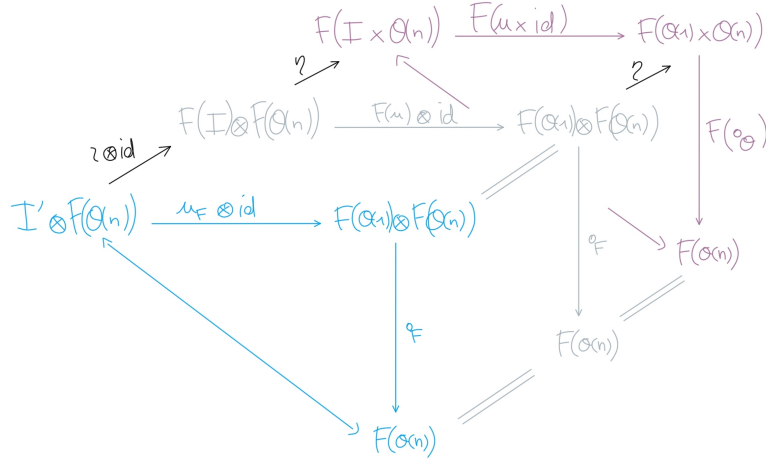


FIGURE 1.11 – Démonstration de la commutativité pour l'un des diagrammes (en bleu) correspondant à l'unité dans l'opérade $F(\mathcal{O})$. La commutativité de l'un des carrés supérieurs suit de A.43 ; la commutativité du grand rectangle arrière se montre à la main avec les définitions ; les autres parties du diagramme commutent par définition.

Définition 1.29 (Opérade de chaînes multiplicative). Une **opérade de chaînes multiplicative** est définie comme étant une opérade de chaînes $\mathcal{O}$ munie d'un morphisme d'opérades

$$\mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Proposition 1.30 (Transport de la multiplicativité). Soit F l'un des trois foncteurs H_* , C_* ou H , et $\mathcal{O}$ une opérade multiplicative, alors $F(\mathcal{O})$ est une opérade multiplicative.

Démonstration. Pour les foncteurs H_* et H ceci suit directement du fait qu'ils envoient des morphismes d'opérades sur des morphismes d'opérades (1.27) et que l'opérade associative est préservée par ces foncteurs.

Pour C_* , étant donné $\varphi : \mathcal{A}ss \longrightarrow \mathcal{O}$, on peut construire, en chaque arité

$$\mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u(n) \xrightarrow{\iota_C} C_*(\mathcal{A}ss^u(n)) \xrightarrow{C_*(\varphi_n)} C_*(\mathcal{O}(n)).$$

où ι_C est le morphisme défini en section A.3.4, qui envoie 1 sur l'unique simplexe de dimension 0. On vérifie bien que ι_C caractérise un morphisme d'opérades. $\square$

La proposition précédente signifie entre autres que les opérades $H_*(\mathcal{K}_d)$, $H_*(f\mathcal{K}_d)$, $H_*(\mathcal{S}_d)$ et $H_*(f\mathcal{S}_d)$ (et leur équivalent à travers le foncteur C_* plutôt que H_*) sont toutes des opérades de chaînes multiplicatives.

$$\begin{array}{ccc}
H_*((\mathcal{O} \rtimes G)(n) \times (\mathcal{O} \rtimes G)(k)) & \xrightarrow{H_*(\circ_{\mathcal{O} \rtimes G})} & H_*(\mathcal{O} \rtimes G)(n+k-1) \\
\uparrow Q \cong & \nearrow \circ_{H_*(\mathcal{O} \rtimes G)} & \uparrow Q \cong \\
H_*(\mathcal{O} \rtimes G)(n) \otimes H_*(\mathcal{O} \rtimes G)(k) & & H(\mathcal{O}(n+k-1)) \otimes H_*(G)^{\otimes(n+k-1)} \\
\uparrow Q \cong & \nearrow \text{def} & \\
H_*(\mathcal{O}(n)) \otimes H_*(G)^{\otimes n} \otimes H_*(\mathcal{O}(k)) \otimes H_*(G)^{\otimes k} & \nearrow \circ_{H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)} &
\end{array}$$

FIGURE 1.12 – Définition de la composition partielle dans l'opérade $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)$.

1.3.2 L'homologie du produit semi-direct

Soit $\mathcal{O}$ une G -opérade comme définie en section 1.2.2. Tous les coefficients d'homologie de cette section sont pris sur un corps.

Nous avons vu comment transporter une opérade en homologie, regardons le cas particulier de l'opérade $\mathcal{O} \rtimes G$ définie en section 1.2.2. Nous allons montrer comment la composition dans $H_*(\mathcal{O} \rtimes G)$ peut être décomposée en quatre étapes. Comprendre la composition dans $H_*(\mathcal{O} \rtimes G)$ s'avèrera crucial pour la démonstration de Moriya du chapitre 3. C'est notamment la nature de cette composition qui nous contraindra à l'étude de la (non) formalité de $f\mathcal{K}_d$ pour une dimension impaire seulement.

Pour comprendre la composition de $H(\mathcal{O} \rtimes G)$, définissons une opérade équivalente, qui correspond à $H(\mathcal{O} \rtimes G)$ vue à travers l'isomorphisme de Kunneth.

Définition 1.31 (L'opérade du produit semi-direct de l'homologie). *Nous définissons $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)$ comme l'opérade qui correspond, en arité n , au complexe de chaînes $H_*(\mathcal{O}(n)) \otimes H_*(G)^{\otimes n}$, et qui hérite de la composition de l'opérade $H_*(\mathcal{O} \rtimes G)$ à travers l'isomorphisme de Kunneth, voir figure 1.12. L'action de $H_*(G)$ sur $H_*(\mathcal{O})$ est définie pour chaque n , comme le morphisme $Q \circ H_*(\xi)$, où ξ est l'action de G sur $\mathcal{O}(n)$,*

$$\begin{array}{ccc}
H_*(G \times \mathcal{O}(n)) & \xrightarrow{H_*(\xi)} & H_*(\mathcal{O}(n)) \\
\uparrow Q & \nearrow \xi' & \\
H_*(G) \otimes H_*(\mathcal{O}(n)) & &
\end{array}$$

Lemme 1.32 (La composition dans $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)$). *Sur un corps, la composition de l'opérade $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)$ se divise en quatre étapes.*

1. La comultiplication de $H_*(G)$ (voir A.40) :

$$\text{id} \otimes \cdots \otimes H_*(\Delta) \otimes \cdots \otimes \text{id}.$$

2. L'échange et la réorganisation de la place de certains termes.
3. L'action de $H_*(G)$ sur $H_*(\mathcal{O})$,

$$\text{id} \otimes \xi' \otimes \cdots \otimes \text{id}.$$

4. La composition dans $H_*(\mathcal{O})$ et la multiplication dans $H_*(G)$.

Démonstration. Il faut se rappeler de la définition de la composition dans $\mathcal{O} \rtimes G$. On observe qu'elle se décompose (grossièrement) comme

1. *dupl* : une duplication de certains éléments du groupe, ce morphisme ressemble donc à quelque chose comme

$$\text{dupl} = \text{id} \times \cdots \times \Delta \times \cdots \times \text{id}$$

où le Δ représente la diagonale topologique.

2. *swap* : Un morphisme qui aligne tous les éléments au bon endroit pour faire la composition après
3. *action* : l'action qui est réalisée. Si on note $\xi : G \times \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n)$ l'action, alors, *action* ressemble à

$$\text{action} = \text{id} \times \xi \times \cdots \times \text{id}.$$

4. *comp&mult* : la composition de $\mathcal{O}$ et la multiplication dans G , qui ressemble à

$$\circ_{\mathcal{O}} \times \cdot_G \times \cdots \times \cdot_G.$$

Une fois qu'on obtient cette décomposition de $\circ_{\mathcal{O} \rtimes G}$, on peut envoyer le tout en homologie et conjuguer par l'isomorphisme de Kunneth Q :

$$\begin{aligned} \circ_{H_*(\mathcal{O}) \rtimes H(G)} &= Q^{-1} \circ H_*(\text{comp\&mult}) \circ H_*(\text{action}) \circ H_*(\text{swap}) \circ H_*(\text{dupl}) \circ Q \\ &= Q^{-1} H_*(\text{comp\&mult}) Q \circ Q^{-1} H_*(\text{action}) Q \\ &\quad \circ Q^{-1} H_*(\text{swap}) Q \circ Q^{-1} H_*(\text{dupl}) Q \end{aligned}$$

Pour comprendre $\circ_{H_*(\mathcal{O}) \rtimes H(G)}$, il "suffit" maintenant de comprendre chaque petite conjugaison.

Grâce au caractère monoïdal de l'isomorphisme de Kunneth (A.43), ces conjugaisons sont en fait plus faciles à comprendre qu'il n'y paraît. Par exemple

$$Q^{-1} \text{comp\&mult} Q = H_*(\circ_{\mathcal{O}}) \otimes H_*(\cdot_G) \otimes \cdots \otimes H_*(\cdot_G).$$

La décomposition de l'énoncé est alors directement obtenue. □

À la lumière de cette décomposition, nous pouvons observer que lorsque ξ' est triviale, la composition dans l'opérade $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H_*(G)$ (et donc aussi dans l'opérade $H_*(\mathcal{O} \rtimes G)$)

qui lui est isomorphe, lorsque l'on travaille sur un corps) se divise en deux composantes.

Définition 1.33 (Action triviale). *Une action ξ' de $H_*(G)$ sur $H_*(\mathcal{O})$ est **triviale**, si $\xi = \epsilon \otimes \text{id}$, avec $\epsilon : H_*(G) \longrightarrow R$, l'augmentation (counité) définie en A.40.*

Lemme 1.34 (Composition dans l'homologie d'un produit semi-direct). *Soit G un groupe topologique. Soit $\mathcal{O}$ une G -opérade. Si l'action de $H_*(G)$ sur $H_*(\mathcal{O}(n))$, à savoir, $H_*(\epsilon) \circ Q$, est triviale pour chaque n , alors la composition dans $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H(G)$ est le produit tensoriel des compositions dans $H_*(\mathcal{O})$ et $H_*(G)^{\otimes -}$ où $H_*(G)^{\otimes -}$ est l'opérade induite en homologie par le transport de l'opérade $G^{\times -}$ définie à la remarque 1.21.*

Démonstration. Pour montrer ce lemme, il faut reparcourir la décomposition en quatre étapes de la composition de $H_*(\mathcal{O}) \rtimes H(G)$ tout en regardant l'impact de chaque étape sur les termes de

$$(H_*(\mathcal{O}(n)) \otimes H_*(G)^{\otimes n}) \otimes (H_*(\mathcal{O}(k_1)) \otimes H_*(G)^{\otimes k_1}) \otimes \cdots \otimes (H_*(\mathcal{O}(k_n)) \otimes H_*(G)^{\otimes k_n}).$$

La difficulté réside dans la première étape, à savoir, le dédoublement de composante. Cette étape consiste à appliquer plusieurs fois

$$\text{id} \times \cdots \times H_*(\Delta) \times \cdots \times \text{id}$$

Concentrons-nous sur les occurrences de $H_*(\Delta)$ qui serviront à appliquer l'action (certaines occurrences de $H_*(\Delta)$ servent également pour la multiplication dans $H(G)^{\otimes -}$). Il faut remarquer que $H_*(\Delta)(g) = 1 \otimes g + g \otimes 1 + \sum g'_i \otimes g''_j$, avec g'_i et g''_j de degré strictement positif (on utilise le caractère counitaire de la comultiplication $H_*(\Delta)$ (A.40)). Ainsi, au moment de l'étape quatre, lorsque l'on applique l'action, tous les termes superflus seront tués à cause de la trivialité. Seul le terme $1 \otimes g$ survivra, ce qui voudra dire que les dédoublements liés à la comultiplication n'auront servi à rien.

Mis à part cette subtilité, les autres étapes ne font jamais interagir des termes issus de $H_*(\mathcal{O})$ avec des termes issus de $H_*(G)$. □

1.3.3 Actions d'opérades de chaines

La notion d'action d'opérades de chaines nous permet de clôturer notre objectif de ce chapitre, à savoir : transporter la structure opéradique d'un espace topologique vers l'homologie de cet espace.

La définition d'action donnée en 1.9 peut facilement se généraliser en réécrivant les deux conditions de la définition comme deux diagrammes commutatifs.

Définition 1.35 (Actions et algèbres d'opérades de chaines). *Soit A un complexe de chaîne, une **action d'opérade** de $\mathcal{O}$ sur A est pour chaque n , la donnée d'une fonction*

$$-[-, \dots, -] : \mathcal{O}(n) \otimes \overbrace{A \otimes \dots \otimes A}^n \longrightarrow X$$

*respectant les deux conditions de la définition 1.9. On dit alors que A est une **algèbre** sur l'opérade $\mathcal{O}$.*

Mentionnons quelques exemples notables d'actions d'opérades de chaines.

Proposition 1.36 (Algèbre sur $\mathcal{A}ss^{\text{Ch}}$). *Les algèbres différentielle graduées (associative) au sens de la définition A.27 sont exactement les algèbres sur l'opérade $\mathcal{A}ss^{\text{Ch}}$.*

Démonstration. Laissé en exercice, à mettre en relation avec la démonstration de 1.10. $\square$

Nous avons également un théorème dû à Cohen (1976) caractérisant les algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits disques. Le théorème fait appel aux algèbres de Gerstenhaber.

Définition 1.37 (Algèbre de Gerstenhaber, [23] section 5). *Une algèbre différentielle graduée A (voir définition A.27) est une **algèbre de Gerstenhaber** si elle est munie, en plus de la multiplication $\cdot : A \otimes A \longrightarrow A$ de degré 0, d'un morphisme d'algèbres différentielles $[-, -] : A \otimes A \longrightarrow A$ de degré 1, tel que*

- *L'opération $\cdot$ est graduée commutative (voir définition A.18).*
- *(antisymétrie) $[x, y] = (-1)^{(|x|+1)(|y|+1)}[y, x]$.*
- *(relation de jacobi) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{(|x|-1)(|y|-1)}[y, [x, z]]$.*
- *(relation de poisson) $[x, y \cdot z] = [x, y] \cdot z + (-1)^{|y|(|x|-1)}y \cdot [x, z]$.*

Théorème 1.38 (Les $H_*(\mathcal{D}_2)$ -algèbres, théorème 13.3.3 [16]). *Les algèbres sur l'opérade $H_*(\mathcal{D}_2)$ (à coefficient dans les rationnelles $\mathbb{Q}$) sont exactement les algèbres de Gerstenhaber.*

Remarque 1.39 (D'où viennent les opérations de Gerstenhaber?). Même si nous n'allons pas démontrer le théorème précédent, il est utile de comprendre d'où viennent les deux opérations $\cdot$ et $[-, -]$. Ces deux opérations sont d'arité deux, elles correspondent donc à des éléments de $H_*(\mathcal{D}_2)(2)$. Par la discussion de la section 2 sur les opérades topologiques, nous savons que $H_*(\mathcal{D}_2)(2) \cong H_*(\mathcal{K}_2)(2)$ parce que $\mathcal{D}_2(2)$ et $\mathcal{K}_2(2)$ sont homotopiquement équivalents (voir 1.18). Or, nous pouvons constater que par définition, $\mathcal{K}_2(2) = \mathcal{S}_2(2) = S^1$ le cercle. Ceci signifie que $H_*(\mathcal{D}_2)(2) = H_*(S^1) = R \cdot x_0 \oplus R \cdot x_1$ avec $|x_0| = 0$ et $|x_1| = 1$ (voir l'exemple A.8 sur l'homologie de la sphère). En d'autres termes, nous avons dans $H_*(\mathcal{D}_2)(2)$ un générateur x_0 de degré 0 et un générateur x_1 de degré 1.

Ces deux générateurs correspondront exactement aux opérations recherchées. En effet, étant donné le morphisme $H_*(\mathcal{D}_2)(2) \otimes A \otimes A \rightarrow A$ issue de l'action sur un module gradué A , par définition de graduation sur le produit tensoriel (voir définition A.16), nous avons qu'un élément dans $H_*(\mathcal{D}_2)(2)$ de degré 0 est identifiable à un morphisme $\bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes A_q \rightarrow A$. Alors qu'un élément de degré 1 est identifiable à un morphisme $\bigoplus_{p+q=n-1} A_p \otimes A_q \rightarrow A$, à savoir, un morphisme augmentant le degré (c'est-à-dire un morphisme de degré 1). Les deux générateurs x_0 et x_1 correspondent alors à des morphismes gradués de la forme $A \otimes A \rightarrow A$ de degré 0 et 1 respectivement.

Mentionnons également que le cas des algèbres sur l'homologie de l'opérade des petits disques à repère, à savoir, les $H_*(f\mathcal{D}_d)$ -algèbre a été étudié par Salvatore et Wahl (théorème 5.4 dans [23]). Ils montrent que ces algèbres ont notamment une structure d'algèbre de Gertenhaber ou d'*algèbre de Batalin-Vilkovisky*¹⁰ (en fonction de la parité).

Nous avons expliqué comment transporter la structure d'opérade à travers l'homologie. L'une des puissances des opérades, est le fait que l'action d'une opérade se transporte également naturellement.

Observation 1.40 (Transport d'une action en homologie). Étant donné une action φ d'une opérade $\mathcal{O}$ sur un espace topologique X , on définit une action de $H_*(\mathcal{O})$ sur $H_*(X)$ grâce au morphisme de Kunneth (A.38). Explicitement,

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathcal{O}(n) \times X \times \cdots \times X) & \xrightarrow{H_*(\varphi_n)} & H_*(X) \\ \uparrow Q & \nearrow \varphi_n^H & \\ H_*(\mathcal{O}(n)) \otimes H_*(X) \otimes \cdots \otimes H_*(X) & & \end{array}$$

On peut vérifier, grâce au caractère monoïdal du morphisme de Kunneth (A.43), que φ^H ainsi défini est bien une action d'opérade de chaîne.

Cette observation nous permet enfin de reformuler l'exemple des monoïdes topologiques présentés en 1 dans le formalisme des opérades. Dans cet exemple, nous avons muni l'homologie d'une structure d'algèbre graduée en ayant utilisé la structure de monoïde. Dans le langage des opérades, cette observation équivaut à la phrase suivante : "Si X est une $\mathcal{A}ss$ -algèbre, alors $H_*(X)$ est une $H_*(\mathcal{A}ss)$ -algèbre".

Notre formalisme nous permet néanmoins des observations beaucoup plus profondes. Par exemple, en combinant la caractérisation des $\mathcal{D}$ -algèbre (le théorème de reconnaissance 1.13) ainsi que la caractérisation des $H_*(\mathcal{D}_2)$ -algèbre (1.38), nous pouvons par exemple affirmer :

10. Voir [23] pour la définition de cette structure.

Corollaire 1.41 (L'homologie des espaces de double lacet). *Soit X un espace topologique connexe, alors l'homologie (rationnelle) de son espace de doubles lacets, $H_*(\Omega^2(X))$, est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber.*

Chapitre 2

Autour de la formalité

Table des matières

2.1	Formalité	44
2.1.1	Formalité topologique	44
2.1.2	Produit de Massey	49
2.1.3	Formalité opéradique	52
2.2	Suites spectrales et formalité	54
2.2.1	Construction de la suite spectrale de Bousfield-Kan	55
	D'une opérade à un espace cosimplicial (étape -1)	55
	D'un espace cosimplicial à un bicomplexe différentiel (étape 0)	58
2.2.2	Convergences de suite spectrale	59
2.2.3	Dégénérescence de suites spectrales	64

Nous définirons dans ce chapitre plusieurs types de formalité : Pour les algèbres différentielles graduées, pour les espaces topologiques (formalité d'un point de vue cohomologique ou homologique) et pour les opérades (formalité (stricte) ou formalité multiplicative).

Le résultat de Moriya, que nous démontrerons dans le chapitre 3, concerne la formalité opéradique (multiplicative et au sens stricte). Nous introduisons toutefois également la formalité topologique pour deux raisons : D'une part, nous déduirons la formalité de certaines opérades, comme $\mathcal{S}_d$ par exemple, de la formalité de certain espaces topologiques (voir la proposition 2.17). Notons que la formalité de $\mathcal{S}_d$ nous sera utile dans la preuve du chapitre 3. D'autre part, nous nous inspirerons d'un critère de non-formalité topologique, à savoir le *produit de Massey* défini dans ce chapitre, pour construire un équivalent dans notre contexte opéradique (ceci sera fait en section 3.3).

Plus concrètement, le but de ce chapitre est d'explorer deux critères de non-formalité qui seront centraux dans la preuve de Moriya :

- L'existence d'un *produit de Massey* non-nul. Ce critère concerne à priori les espaces topologiques et les algèbres différentielles graduées. Nous construirons une version opéradique, propre à $f\mathcal{K}_d$, dans le chapitre 3.
- La non-dégénérescence de suites spectrales. Ce critère concerne les opérades multiplicatives (proposition 2.29) et les espaces topologiques (proposition 2.30).

Concernant le deuxième critère, nous allons construire une *suite spectrale* en partant d'une opérade, ou d'un espace topologique. Une *suite spectrale* peut être comprise comme un moyen d'approximer l'homologie d'un espace. Pour être capable de construire une telle approximation, nous devrons faire un détour par les objets cosimpliciaux présentés en annexe B.

2.1 Formalité

Pour cette section et dans tout ce qui suit, nous fixerons l'anneau R comme étant le corps des rationnels $\mathbb{Q}$.

Nous définissons dans cette section les différentes formes de formalités : formalité d'algèbre, d'espace topologique et d'opérade.

Nous montrerons que les sphères et les groupes de Lie sont formels. L'opérade des directions $\mathcal{S}_d$ tout comme l'opérade de Kontsevich $\mathcal{K}_d$ le sont également. L'étude de leur équivalent à repères, $f\mathcal{S}_d$ et $f\mathcal{K}_d$, fera l'objet du chapitre 3.

Nous définirons également le produit de Massey, et montrerons comment il joue le rôle d'une obstruction à la formalité d'algèbre (et par extension, d'espace topologique)

2.1.1 Formalité topologique

Commençons par introduire une notion de formalité pour les algèbres différentielles graduées définies en A.27. Souvenons-nous qu'un quasi-isomorphisme est un morphisme de chaînes qui induit des isomorphismes en homologie/cohomologie (définition A.1). Rappelons aussi que l'homologie d'une algèbre différentielle graduée $H(C)$ est également une algèbre différentielle graduée, avec des différentielles nulles, et un produit issu de l'algèbre initiale C (voir corollaire A.37).

Définition 2.1 (Formalité d'algèbre différentielle graduée). *C une algèbre différentielle graduée est **formelle**, s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes d'algèbres*

$$C \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} H(C)$$

entre C et son homologie.

Intuitivement, cette notion peut être comprise comme une forme de régularité dans le processus de prise de la (co)homologie d'un espace.

Remarquons que le fait que le zigzag soit composé de quasi-isomorphismes d'algèbre est crucial. En effet, étant donné un complexe de chaînes $C = \{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, nous pouvons toujours définir une fonction $f : C_i \rightarrow H_i(C)$ qui d'abord projette linéairement sur le noyau de la différentielle et associe ensuite la classe d'équivalence du quotient. C'est un exercice routinier de montrer 1) que cette fonction est un morphisme de chaînes, 2) qu'il induit un quasi-isomorphisme.

Exemple 2.2 (Une algèbre non-formelle). Prenons $\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\})$, l'algèbre commutative libre (A.21) avec une différentielle nulle sauf pour $d(z_5) = x_3 \wedge y_3$, exactement comme dans l'exemple A.28. On remarque d'abord que le produit de $\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\})$ caractérise bien un produit sur $H(\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\}); d)$ parce que le produit de cycles est un cycle et que un produit avec un bord est un bord (voir lemme A.36). On observe que $H(\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\}))$ est identique à $\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\})$ en tout degré sauf en degré 5 et 6 où l'homologie est triviale. Dans ce cas, on remarque que le quasi-isomorphisme précédemment décrit

$$\begin{aligned} f : \Lambda(\{x_3, y_3, z_5\}) &\longrightarrow H(\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\})) \\ x_3 &\longmapsto [x_3] \\ y_3 &\longmapsto [y_3] \\ z_5 &\longmapsto 0 \quad \text{car l'homologie est triviale,} \\ x_3 \wedge y_3 &\longmapsto 0 \quad \text{car l'homologie est triviale,} \\ x_3 \wedge z_5 &\longmapsto [x_3 \wedge z_5] \\ &\dots \end{aligned}$$

n'est pas un morphisme d'algèbres. En effet, $f(x_3 \wedge z_5) = [x_3 \wedge z_5] \neq 0 \in H^8(\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\}))$ mais $f(x_3) \wedge_H f(z_5) = [x_3] \wedge 0 = 0 \in H^8(\Lambda(\{x_3, y_3, z_5\}))$. Nous démontrerons plus tard, à l'aide de produit de Massey, que cette algèbre n'est pas formelle.

Regardons maintenant comme la notion de formalité d'un espace topologique est habituellement introduite. Pour ce faire, il nous faut introduire un nouvel objet. Pour un espace topologique X , nous définissons une algèbre différentielle graduée commutative, $A_{\text{PL}}(X)$, dénommée l'*algèbre des formes différentielles polynomiales* sur X . Nous n'allons pas rentrer dans les détails de la construction de cette algèbre, mais mettons en évidence deux propriétés clefs qu'elle possède (voir [7], chapitre 10, entre autre, corollaire 10.10) :

1. $A_{\text{PL}}(X)$ est une algèbre différentielle graduée commutative (voir A.27 et A.18 pour la définition exacte)

2. Il existe un zigzag de quasi-isomorphismes (définition A.1) d'algèbres différentielles graduées entre $A_{\text{PL}}(X)$ et les cochaines singulières $C^*(X)$.

$$A_{\text{PL}}(X) \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} C^*(X).$$

Grâce à ces deux propriétés, $A_{\text{PL}}(X)$ joue parfaitement le rôle de substitut commutatif de $C^*(X)$. En effet, rappelons-nous que même si $H^*(X)$ était gradué commutatif (théorème A.46), il n'y a aucune raison pour que $C^*(X)$ le soit. Par ailleurs, la propriété 2 implique justement que $H^*(X) \cong H(A_{\text{PL}}(X))$.

Définition 2.3 (Formalité des espaces topologiques). *Un espace topologique X est **formel** (cohomologiquement) s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes d'algèbres différentielles graduées*

$$A_{\text{PL}}(X) \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} H^*(X).$$

Donnons maintenant quelques exemples d'espaces formels. La formalité de ces espaces sera utilisée dans la preuve de Moriya du chapitre 3.

Exemple 2.4 (Formalité de la sphère). Considérons la sphère S^n , avec $n \geq 3$. Nous savons que la cohomologie de la sphère à deux générateurs, 1 et ξ , réparti en degré 0 et n .

Commençons par montrer la formalité pour le cas où n est impaire. Dans ce cas, la cohomologie de la sphère est exactement l'algèbre commutative libre graduée $\Lambda(\{u\})$ avec différentielle nulle. (voir A.21). Comme $A_{\text{PL}}(S^n)$ est commutatif, nous pouvons considérer un morphisme d'algèbres (grâce à la propriété universelle de $\Lambda(\{u\})$, voir propriété A.22) qui envoie u sur un représentant de ξ . Ce dernier commute avec la différentielle, ce qui induit un quasi-isomorphisme.

Pour le cas n pair, la situation est quelque peu différente. La cohomologie n'est plus l'algèbre graduée commutative libre, parce que pour n pair, $\Lambda(\{u\}) = \mathbb{Q}[u]$, l'anneau des polynômes, avec un générateur de degré n . Commençons par définir le morphisme d'algèbres qui envoie $u \in \Lambda(\{u\})$ sur un élément x de $A_{\text{PL}}(X)$ correspondant à la classe de ξ . Nous avons alors que $u^2 \in \Lambda(\{u\})$ est forcément envoyé sur x^2 qui est de degré $2n$. Mais la cohomologie est nulle pour ce degré, donc $x^2 = d(y)$ pour un certain $y \in A_{\text{PL}}(S^n)$. Nous allons alors définir un autre générateur, v de degré $2n-1$, et définir une différentielle

nulle, sauf pour $d(v) = u^2$.

$$\begin{array}{ccc}
& & A_{\text{PL}}(S^n) \longleftarrow \wedge(\{u, v\}) \\
n & & x \longleftarrow \vdash u \\
2n-1 & & \exists y \longleftarrow \vdash v \\
& d \downarrow & \downarrow d \\
2n & & x^2 \longleftarrow \vdash u^2 \\
3n-1 & & y \cdot x \longleftarrow \vdash u \cdot v \\
& d \downarrow & \downarrow d \\
3n & & x^3 \longleftarrow \vdash v^3 \\
\vdots & & \vdots \qquad \qquad \vdots
\end{array}$$

Nous avons alors, pour chaque k ,

$$d(u^{k-1}v) = d(u^{k-1})v + (-1)^{|u^{k-1}|}u^{k-1}d(v) = 0 + u^{k-1}d(v) = u^k.$$

Ce qui permet de conclure que cette fonction est un quasi-isomorphisme (car les u^k ne créent pas de classe d'homologie, et le v non plus). On conclut à la formalité en envoyant u et v sur 0 et $\xi \in H^*(S^d)$ respectivement.

Exemple 2.5 (Formalité des groupes de Lie). Il existe un résultat affirmant que la cohomologie des groupes de Lie connexes et compacts est une algèbre extérieure sur des générateurs de degré impair (voir [8], théorème 1.34). Un raisonnement similaire au cas de la sphère permet alors directement de conclure à la formalité. En effet, comme les générateurs sont de degré impair, nous pouvons considérer l'algèbre graduée commutative libre sans devoir faire des ajustements pour les puissances des générateurs (car toutes les puissances seront nulles, voir A.21).

Mettons en évidence le groupe de Lie $\text{SO}_d(\mathbb{R})$, le groupe spécial orthogonal, qui est donc formel.

Remarquons que si un espace est formel, suite à la propriété clef 2 de A_{PL} , il existe également un zigzag de quasi-isomorphismes d'algèbre entre $C^*(X)$ et $H^*(X)$.

Pour utiliser la formalité dans notre contexte des opérades, il nous sera également utile de considérer une version duale de la formalité que nous appellerons ici, formalité homologique.

Définition 2.6 (Formalité (homologique)). *Un espace topologique X est **formel** (homologiquement) s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes de coalgèbres différentielles graduées entre*

$$C_*(X) \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} H_*(X).$$

Faire le lien entre formalité et formalité homologique est plus difficile qu'il n'y paraît. L'une des difficultés, est qu'il n'est pas évident de munir le dual (dual linéaire, degré par degré) d'une algèbre d'une structure de coalgèbre lorsque les espaces ne sont pas finiment engendrés.

Sous certaines conditions néanmoins, nous pouvons affirmer que la formalité (cohomologique) implique la formalité homologique. Pour ce faire, il faut supposer d'une part que l'homologie est finiment engendrée en chaque degré et d'autre part, que l'espace soit connexe et ait une homologie triviale en degré 1 et 2. Ces deux hypothèses garantissent l'existence d'un certain *modèle minimal*, sous la forme d'une algèbre tensorielle, qui permet, d'une certaine manière, de simplifier le zigzag en un zigzag entre des algèbres finiment engendrés.

Un autre ingrédient nécessaire pour faire le lien entre formalité et formalité homologique repose dans le lien de dualité entre homologie et cohomologie. Pour l'exprimer formellement, nous devrions étudier le *théorème des coefficients universels*, et la manière avec laquelle il transporte la structure d'algèbre de la cohomologie, sur la structure de coalgèbre de l'homologie.

Comme dans ce travail, nous voulons nous concentrer sur des enjeux plus proches de la question des opérades, nous avons décidé d'omettre la preuve formelle de la proposition suivante, dont l'idée vient juste d'être esquissée.

Proposition 2.7 (Lien entre formalité cohomologique et formalité homologique). *Soit X un espace connexe tel que $H^1(X) = 0 = H^2(X)$, avec $H^n(X)$ fini pour chaque n , alors, si X est formel (cohomologiquement), X est également homologiquement formel.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est esquissée dans les paragraphes précédents, les détails ne font pas partie de ce document. □

Exemple 2.8 (Les sphères et SO_d sont homologiquement formels). Nous savons que la sphère de dimension $n \geq 3$ est formelle (2.4). Grâce à la proposition précédente, comme pour $n \geq 3$, la cohomologie de la sphère est nulle en degré 1 et 2, nous savons alors que la sphère est également homologiquement formelle.

De la même manière, nous savons déjà que SO_d est formel (2.5), le théorème 3D.4 dans [10] nous apprend également que son homologie rationnelle est triviale (pour $d \geq 3$) en degré 1 et 2, ce qui nous permet également d'utiliser la proposition précédente pour affirmer que SO_d est homologiquement formel.

2.1.2 Produit de Massey

Dans cette section, nous allons définir le produit de Massey, et montrer comment il donne un critère de non-formalité : nous montrerons que dans une algèbre formelle, tous les produits de Massey s'annulent.

Avant d'introduire la définition, commençons par une rapide intuition. Étant donné a, b, c trois éléments de C , une algèbre différentielle graduée (A.27), sous certaines conditions, le produit $abc \in C$ est alors parfois le bord de deux éléments différents z_1 et z_2 (ou dans la définition suivante, $z_1 = xc$ et $z_2 = ay$). Le produit de Massey, en quelque sorte, mesure à quel point ces éléments, z_1 et z_2 , appartiennent à la même classe d'équivalence ou non.

Définition 2.9 (Produit de Massey, [18] p302). *Soit C une algèbre différentielle graduée avec différentielle $d : C_n \rightarrow C_{n+1}$. Soit $[a], [b], [c] \in H(C)$ des classes de cohomologie telles que*

$$[a] \cdot [b] = 0 \quad [b] \cdot [c] = 0$$

*avec le produit induit dans $H(C)$ (voir A.37). Alors, étant donné $x, y \in H(C)$ tel que $d(x) = ab \in C_{|a|+|b|}$ et $d(y) = bc \in C_{|b|+|c|}$, on définit le **produit de Massey** des classes de cohomologie de $[a], [b], [c]$ comme étant*

$$\langle [a], [b], [c] \rangle := [ay + (-1)^{|a|-1}xc] \in H(C_{|a|+|b|+|c|-1}).$$

Pour que cette définition ait du sens, il faut vérifier deux choses. D'abord, que la classe d'homologie de $ay + (-1)^{|a|-1}xc$ soit bien définie, ensuite, l'indépendance des choix a, b, c, x, y effectués dans la définition.

Lemme 2.10 (Cyclicité). *Dans la définition du produit de Massey, l'élément défini comme $ay + (-1)^{|a|-1}xc$ est un cycle.*

Démonstration. On montre, par la formule de Leibniz de la différentielle (A.26) et le fait que c et a sont des cycles, que

$$d(ay + (-1)^{|a|-1}xc) = (-1)^{|a|}a(bc) + (-1)^{|a|-1}(ab)c = 0. \quad \square$$

la démonstration précédente permet de mettre en évidence notre intuition de départ. En effet, nous obtenons bien que $d(ay) = \pm abc = d(xc)$, l'élément abc est le bord de deux éléments différents.

En ce qui concerne l'indépendance des choix a, b, c, x, y effectués, la situation n'est pas aussi favorable. Pour avoir cette indépendance, nous sommes obligés de considérer le produit de Massey dans un certain quotient.

Lemme 2.11 (Indépendance des représentants, proposition 8.26 dans [18]). *Avec les notations de la définition 2.9, le produit $\langle [a], [b], [c] \rangle$ est indépendant du choix de a, b, c, x, y quand regardé dans le quotient*

$$\frac{H(C)}{[a] \cdot H(C) + H(C) \cdot [c]}$$

où le dénominateur est à comprendre comme $[a] \cdot H(C_{|b|+|c|-1}) + H(C_{|a|+|b|-1}) \cdot [c]$, vu comme un sous espace du numérateur $H(C_{|a|+|b|+|c|-1})$.

Démonstration. Par exemple, si l'on choisit $x, x' \in C$ tel que $d(x) = ab = d(x')$, on peut calculer

$$[(ay + (-1)^{|a|-1}x'c) - (ay + (-1)^{|a|-1}xc)] = (-1)^{|a|-1}[x' - x] \cdot [c] \in [a] \cdot H(C) + H(C) \cdot [c].$$

On peut faire de même pour les autres éléments [18]. $\square$

Comme annoncé, l'une des forces du produit de Massey repose dans son interaction avec la formalité. Dans un espace formel, les produits de Massey sont tous nuls. Ce fait peut être expliqué par deux aspects 1) un produit de Massey se transporte à travers les quasi-équivalences, 2) les produits de Massey dans la cohomologie vue comme une algèbre différentielle sont tous nul (car les différentielles sont nulles).

Proposition 2.12 (Obstruction à la formalité). *Soit C une algèbre différentielle graduée formelle (2.1), alors pour tout $[a], [b], [c] \in H(C)$,*

$$\langle [a], [b], [c] \rangle = 0 \quad \text{dans le quotient} \quad \frac{H(C)}{H(C) \cdot [c] + [a] \cdot H(C)}.$$

Démonstration. Prenons $f : C \xrightarrow{\sim} C'$ un quasi-isomorphisme d'algèbres. Nous allons montrer que si tous les produits de Massey sont nuls dans C' , ils le seront dans C , et inversement.

Remarquons d'abord que $f_* : H(C) \rightarrow H(C')$, le morphisme induit en homologie, est un morphisme d'algèbres (ceci est une conséquence directe de la définition du produit dans $H_*(X)$ (A.37) et de la définition d'un morphisme induit en cohomologie (A.1.1)). Un rapide calcul, en utilisant l'indépendance dans le choix de x et y , permet alors d'observer que

$$f_* (\langle [a], [b], [c] \rangle) = \dots = \langle [f(a)], [f(b)], [f(c)] \rangle \quad (2.1)$$

On remarque également que f_* envoie bijectivement $H(C)[c] + [a]H(C)$ sur $H(C')[f(a)] + [f(b)]H(C')$.

Cas 1, Tous les produits sont nuls à l'arrivée (à savoir C'). Dans ce cas, les produits de C le seront aussi, ou sinon, on pourrait toujours créer un produit non nul de la forme $\langle [f(a)], [f(b)], [f(c)] \rangle$.

cas2 Tous les produits sont nuls dans le domaine (à savoir C). Pour pouvoir montrer que tous les produits sont nuls à l'arrivée, en utilisant l'équation 2.1, nous aimerions être capable d'affirmer que tous les produits de C' sont de la forme $\langle [f(a)], [f(b)], [f(c)] \rangle$. En effet, si c'est le cas, nous pourrions alors, en composant par f_*^{-1} , créer un produit de Massey non nul dans le domaine, s'il en existe un non nul dans C' .

Même si f n'est pas surjective, nous savons, que f_* l'est. En d'autres termes, tout élément a' sera dans la classe d'homotopie d'un certain élément $f(a)$. Ainsi, pour n'importe quel produit de Massey entre $[a']$, $[b']$ et $[c']$ dans $H(C')$, il existera $a, b, c \in C$ tel que

$$\langle [a'], [b'], [c'] \rangle = \langle [f(a)], [f(b)], [f(c)] \rangle$$

Nous utilisons dans cette égalité, pour la première fois de cette preuve, et de manière cruciale, l'indépendance du produit de Massey par rapport au choix de représentants a' , b' et c' . Nous montrons ainsi bien, que tous les produits sont de la forme $\langle [f(a)], [f(b)], [f(c)] \rangle$.

Pour conclure, remarquons que tous les produits de Massey sont nuls dans $H(C)$. Cela suit directement du fait que la différentielle de $H(C)$ est nulle. En effet, nous pouvons par exemple choisir x et y dans la définition comme étant 0.

Ainsi, étant donné un zigzag de quasi-isomorphismes d'algèbres

$$C \xleftarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} H(C)$$

on transporte la nullité des produits de $H(C)$, grâce aux cas 1 et cas 2 précédemment décrits, jusque C . $\square$

Cette proposition nous donne alors un critère de non-formalité très utile. S'il existe des produits de Massey non nuls, alors l'algèbre est non-formelle.

Exemple 2.13 (Une algèbre différentielle non-formelle). Revenons sur l'exemple 2.2, à savoir $C = \wedge(\{x_3, y_3, z_5\})$, avec différentielle nul sauf pour $d(z_5) = x_3 \wedge y_3$. Considérons alors les classe $[x_3]$, $[x_3]$, $[y_3]$. On observe que

$$d(0) = x_3 \wedge x_3 \quad \text{et} \quad d(z_5) = y_3 \wedge y_3.$$

On considère alors

$$\langle [x_3], [x_3], [y_3] \rangle = [x_3 \wedge z_5 + 0].$$

On constate bien que $[x_3 \wedge z_5] \notin [x_3] \wedge H(C_5) + H(C_5) \wedge [y_3] = \{0\}$ (car l'homologie en degré 5 est nul). Comme nous avons exhibé un produit de Massey non-nul dans le quotient, nous savons que cette algèbre différentielle n'est pas formelle.

2.1.3 Formalité opéradique

Nous avons précédemment introduit une notion de formalité pour les espaces topologiques. Nous allons maintenant définir un équivalent pour les opérades. Pour ce faire, il nous faut une notion de "quasi-isomorphisme d'opérades" que nous appellerons *équivalence faible*.

Définition 2.14 (Équivalence faible). *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux opérades de chaines. Un morphisme d'opérades $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ est une **équivalence faible** si chaque composante $f_n : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}'(n)$ est un quasi-isomorphisme de chaines au sens de la définition A.1.*

Maintenant, rappelons-nous qu'étant donné $\mathcal{O}$ une opérade de chaines, nous pouvons construire $H(\mathcal{O})$ une nouvelle opérade de chaines (voir l'observation 1.27 pour plus de précisions)

Définition 2.15 (Formalité des opérades de chaines). *Soit $\mathcal{O}$ une opérade de chaîne, $\mathcal{O}$ est **formelle** s'il existe un zigzag d'équivalence faible entre les opérades*

$$\mathcal{O} \xleftarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} H(\mathcal{O}).$$

*Nous dirons qu'une opérade topologique $\mathcal{O}$ est **formelle**, si l'opérade de chaines $C_*(\mathcal{O})$ est formelle.*

Nous pouvons également définir une notion de formalité pour les opérades de chaines multiplicatives définies à la remarque 1.30.

Définition 2.16 (Formalité multiplicative des opérades de chaines, [20]). *Soit $\mathcal{O}$ une opérade de chaines multiplicative et $H(\mathcal{O})$ avec la structure d'opérade de chaines multiplicative induite. L'opérade $\mathcal{O}$ est **multiplicativement formelle** s'il existe un zigzag d'équivalence faible entre $\mathcal{O}$ et $H(\mathcal{O})$ préservant la structure multiplicative. En d'autres termes, il existe un diagramme commutatif de la forme*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O} & \xleftarrow{\simeq} & \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{\simeq} & \dots & \xleftarrow{\simeq} & \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\simeq} & H(\mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \dots & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u. \end{array}$$

*Nous dirons qu'une opérade topologique $\mathcal{O}$ est **multiplicativement formelle**, si l'opérade de chaines $C_*(\mathcal{O})$ est multiplicativement formelle.*

Nous découvrirons que tout comme la formalité topologique, la formalité des opérades peut être utile lorsque l'on cherche à comprendre l'homologie de certains espaces. En effet, une méthode classique pour approximer des homologies est la création de ce que

l'on appelle *une suite spectrale* qui convergera, en un certain sens, vers cette homologie. La formalité implique alors souvent une convergence extrêmement rapide de ces suites spectrales.

La formalité de l'opérade de Kontsevich, dont la preuve de formalité est esquissée dans [13] et formalisée dans [15], $(\mathcal{K}_d)$ à par exemple été utilisée dans [14] pour calculer l'homologie rationnelle des espaces de longs nœuds en codimension strictement plus grande que deux.

Passons maintenant à un autre exemple d'opérade formelle.

Proposition 2.17 (Formalité multiplicative de l'opérade des directions). *L'opérade des directions $\mathcal{S}_d$ est multiplicativement formelle.*

Démonstration. Comme la sphère est homologiquement formelle (2.8), donnons-nous un zigzag de quasi-isomorphismes de coalgèbres entre son complexe de chaînes singulier et son homologie.

$$C_*(S^{d-1}) \xleftarrow{f_1} C_1 \longrightarrow \dots \longleftarrow C_{k-1} \xrightarrow{f_k} H_*(S^{d-1})$$

Nous allons alors considérer, pour l'opérade des directions $\mathcal{S}_d$ définie en 1.14, en chaque arité n , le zigzag

$$\begin{aligned} C_*(\mathcal{S}_d(n)) &= C_*((S^{d-1})^{\times N}) \xleftarrow{AW'} C_*(S^{d-1})^{\otimes N} \xleftarrow{f_1^{\otimes N}} C_1^{\otimes N} \longrightarrow \dots \\ &\dots \longleftarrow C_{k-1}^{\otimes N} \xrightarrow{f_k^{\otimes N}} H_*(S^{d-1})^{\otimes N} \xrightarrow{Q'} H_*((S^{d-1})^{\times N}) = H_*(\mathcal{S}_d(n)) \end{aligned}$$

où AW' et Q' sont des compositions des morphismes d'Alexander Whitney (A.33) et du morphisme de Kunneth (A.38); avec $N = \binom{n}{2}$. Nous savons que ces deux morphismes sont notamment des quasi-isomorphismes (voir section A.3). Il reste à prouver que cette famille de zigzags forme un morphisme d'opérades multiplicatives.

Pour ce faire, il faut se souvenir que la composition dans $\mathcal{S}_d$ est donnée par un certain produit cartésien de diagonales topologiques (ou éventuellement certaines projections (1.14)).

$$\circ_{\mathcal{S}_d} = \text{id} \times \dots \times \Delta \times \Delta \times \dots \times \text{id}$$

Commençons par montrer que les diagonales sont préservées. Dire que les diagonales

sont préservées revient à dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
C_*(S^{d-1}) & \xlongequal{\quad} & C_*(S^{d-1}) & \xleftarrow{f_1} & C_1 & \xrightarrow{\quad} & \dots \\
C_*(\Delta) \downarrow & & \Delta_{AW} \downarrow & & \Delta_{C_1} \downarrow & & \\
C_*(S^{d-1} \times S^{d-1}) & \xleftarrow{AW} & C_*(S^{d-1}) \otimes C_*(S^{d-1}) & \xleftarrow{f_1 \otimes f_1} & C_1 \otimes C_1 & \xrightarrow{\quad} & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xleftarrow{\quad} & C_{k-1} & \xrightarrow{f_k} & H_*(S^{d-1}) & \xlongequal{\quad} & H_*(S^{d-1}) \\
& & \Delta_{C_{k-1}} \downarrow & & \Delta_H \downarrow & & H_*(\Delta) \downarrow \\
\dots & \xleftarrow{\quad} & C_{k-1} \otimes C_{k-1} & \xrightarrow{f_k \otimes f_k} & H_*(S^{d-1}) \otimes H_*(S^{d-1}) & \xrightarrow{Q} & H_*(S^{d-1} \times S^{d-1})
\end{array}$$

où Δ_{AW} est la diagonale d'Alexander Whitney, qui munit $C_*(S^{d-1})$ d'une structure de coalgèbre (A.24) et Δ_H est la structure de coalgèbre sur l'homologie définie en A.40. Les rectangles intérieurs commutent parce que le zigzag initial est un zigzag de coalgèbres ; le rectangle de gauche commute par définition des morphismes (A.34) et le rectangle de droite commute par définition de Δ_H (A.40).

Pour conclure que chaque morphisme du zigzag est un morphisme d'opérades, il faut munir les complexes de chaînes C_i intermédiaires d'une structure d'opérade. L'idée est de prendre, en arité n , N produit tensoriel de C_i , et de choisir, comme loi de composition, un produit tensoriel d'identités et de comultiplications, de la même manière que pour l'opérade des directions. On peut alors vérifier qu'avec cette structure, les morphismes du zigzag sont bien des morphismes d'opérades. La clef étant le caractère monoïdal de C_* et H_* (A.43).¹ En plus, ces opérades sont naturellement multiplicatives, en choisissant, en arité 2, un élément dont la classe d'homologie est la même que la classe d'homologie de $v_0 \in C_*(\mathcal{S}_d(2))$, l'élément multiplicatif.

Nous pouvons faire le même raisonnement pour vérifier que les projections sont préservées (ce qui correspond à la composition par un élément de $\mathcal{S}_d(0)$). Dans ce cas, la commutativité des rectangles internes sera vérifiée par le fait que l'unité est préservée, les rectangles externes commuteront grâce aux exercices A.35 et A.41. $\square$

2.2 Suites spectrales et formalité

Nous voulons montrer comment la formalité peut nous aider à approximer l'homologie de certains espaces. Ce processus d'approximation se fera par le biais de ce qu'on appelle des *suites spectrales*.

L'objectif de cette section est double :

- Décrire comment associer une *suite spectrale* à une opérade.

1. Les techniques utilisées dans la remarque 1.3.2 peuvent être utilisées pour une preuve plus formelle.

- Montrer comment les suites spectrales peuvent donner un critère de non-formalité.

Avant de présenter notre stratégie pour ce chapitre, donnons une définition de suites spectrales.

Définition 2.18 (Suite spectrale). Une **suite spectrale** est une suite de complexes de chaînes $(E^r, d^r)_{r \in \mathbb{N}}$, tel que chaque élément est l'homologie de son prédécesseur, c'est-à-dire, $E_{r+1} = H(E_r, d^r)$. Une suite spectrale $(E^r, d^r)_{r \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un module H si $E^r \cong E_{r+1}$ pour tout $r \geq N$ à partir d'un certain rang N . On note alors E_∞ pour désigner E^r après ce rang N . Dans ce cas, on dit aussi que la suite spectrale $(E^r, d^r)_{r \in \mathbb{N}}$ **dégénère** à la page N .

2.2.1 Construction de la suite spectrale de Bousfield-Kan

Voici notre plan d'action pour réussir à associer une suite spectrale à une opérade multiplicative.

- 1. D'une opérade topologique à un espace cosimplicial (procédure de McClure-Smith)
0. D'un espace cosimplicial à un bicomplexe différentiel.
1. D'un bicomplexe différentiel à un complexe de chaînes filtré.
2. D'un complexe de chaînes filtré à un couple exact.
3. D'un couple exact à une suite spectrale.

L'étape -1 par laquelle nous commencerons porte de nom de *procédure de McClure-Smith*. Nous expliquerons ensuite l'étape 0. Les étapes 1, 2 et 3 sont les étapes classiques d'une suite spectrale, elles peuvent être retrouvées en annexe C. Nous appellerons la suite spectrale ainsi construite la **suite spectrale de Bousfield-Kan** construite à partir d'une opérade. Notons que parfois, nous commencerons directement à l'étape 0 sans passer par une opérade. Cette suite spectrale issue d'un espace cosimplicial portera alors également le nom de suite spectrale de Bousfield-Kan.

D'une opérade à un espace cosimplicial (étape -1)

Le but de cette section est donc d'associer, à une opérade multiplicative, un *espace cosimplicial*, par le biais de ce qui est appelée la *procédure de McClure-Smith*.

Rappelons qu'un espace cosimplicial est un foncteur de la catégorie simpliciale Δ vers la catégorie des espaces topologiques TOP. Pour le lecteur non familier avec ce type de constructions, un survol de l'annexe B, avant d'aller plus loin, est vivement conseillé.

Prenons $\mathcal{O}$ une opérade topologique multiplicative, dont la définition exacte est donnée en 1.11. Nommons $\nu \in \mathcal{O}(2)$ l'élément de $\mathcal{O}$ correspondant à $*$ $\in \{*\} = \mathcal{A}ss^u(2)$ à

travers le foncteur lié à la structure multiplicative. Nommons $\epsilon \in \mathcal{O}(0)$ l'élément de $\mathcal{O}$ correspondant à $*$ $\in \{*\} = \mathcal{A}ss^u(0)$ à travers ce même foncteur.

On définit alors le **complexe de chaines cosimplicial associé à l'opérade multiplicative** $\mathcal{O}$ comme le foncteur

$$\mathcal{O}^\bullet : \Delta \longrightarrow \text{TOP}$$

où $\mathcal{O}^n := \mathcal{O}(n)$ et les cofaces sont données par

$$\begin{array}{lll} \partial^0 : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n+1) & \partial^i : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n+1) & \partial^{n+1} : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n+1) \\ x \longmapsto \nu \circ_2 x, & x \longmapsto x \circ_i \nu, & x \longmapsto \nu \circ_1 x. \end{array}$$

pour $0 < i < n+1$. Les codégénérescences sont données, pour $0 \leq i \leq n-1$ par

$$\begin{array}{l} s^i : \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n-1) \\ x \longmapsto x \circ_{i+1} \epsilon \end{array}$$

Remarque 2.19 (Naturalité de la procédure de McClure-Smith). Il est utile de remarquer que cette construction est naturelle. En d'autres termes, si nous nous donnons $F : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un morphisme d'opérades de chaines multiplicative, correspondra à un morphisme de complexes de chaines cosimpliciaux.

Exemple 2.20 (L'espace cosimplicial lié à l'opérade des directions). Illustrons la procédure de McClure-Smith sur l'opérade des directions $\mathcal{S}_d$. Comme dans la remarque 1.19, prenons $v_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{S}_d(2)$ pour munir $\mathcal{S}_d$ d'une structure multiplicative. Les cofaces correspondent, en interprétant la composition dans l'opérade de Konsevich, à l'insertion d'un point infiniment proche, voir la figure 2.1. Cela se traduit, dans $\mathcal{S}_d$, par un dédoublement de composantes. Les dégénérescences quant à elles correspondent à une projection. Intuitivement, la composition $x \circ_j \epsilon$ correspond à supprimer un point de la configuration actuelle. En représentant les éléments $x \in \mathcal{S}_d$ comme une matrice, la composition $x \circ_j \epsilon$ se traduit par la suppression de la j -ème ligne et de la j -ème colonne. Le nombre de composantes supprimées correspond alors aux dimensions de la matrice moins un.

Remarque 2.21 (Procédé de McClure-Smith pour les opérades de chaîne). Pour plus d'intuition, nous avons préféré exposer la version ensembliste/topologique du procédé de McClure-Smith. Bien-sûr, ce procédé peut être suivi, à l'identique, en partant des opérades de chaines multiplicatives $(\text{Ch}, \otimes, R)$, ou d'une opérade dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ (A.3). Pour ce faire, on définit l'opérade associative $\mathcal{A}ss_{\mathcal{C}}$ comme

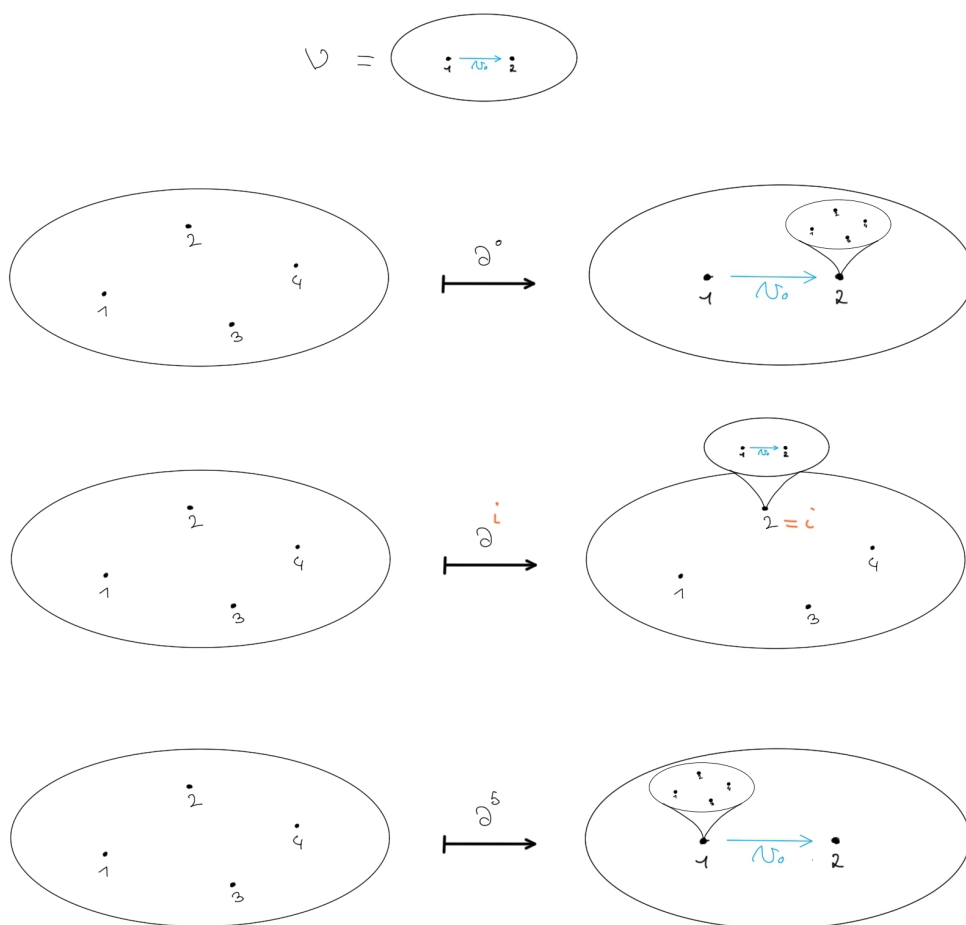


FIGURE 2.1 – Illustration des cofaces dans la procédure de McClure-Smith pour l'opérateur de Kontsevich.

l'objet I en chaque arité. Étant donné un morphisme $\varphi : \mathcal{A}ss \longrightarrow \mathcal{O}$, le i -ème cobord est alors par exemple donné par

$$\mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(n) \otimes I \xrightarrow{\text{id} \otimes \varphi_2} \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(2) \xrightarrow{\circ_i} \mathcal{O}(n+1).$$

Il en va de même pour ∂^0 , ∂^{n+1} et s^i .

Exercice 2.22 (Commutativité de la procédure de McClure-Smith). Soit (F, η, ι) un foncteur entre deux catégories monoïdales $(\mathcal{C}, \times, I)$ et $(\mathcal{C}', \otimes, I')$, et soit $\mathcal{O}$ une opérade dans la catégorie $\mathcal{C}$. Alors, l'objet cosimplicial associé à l'opérade $F(\mathcal{O})$ (1.27) via la procédure de McClure-Smith est isomorphe à l'objet cosimplicial

$$\Delta \xrightarrow{\mathcal{O}^\bullet} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}'.$$

D'un espace cosimplicial à un bicomplexe différentiel (étape 0)

Commençons par définir un bicomplexe différentiel (l'objectif de cette étape).

Définition 2.23 (Bicomplexe différentiel). Une **bicomplexe différentiel** est une famille d'espaces vectoriels $\{K^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ muni, pour chaque p, q , de morphismes² $K^{p,q} \xrightarrow{d^H} K_{p+1,q}$ et $K_{p,q} \xrightarrow{d_V} K_{p,q-1}$ qui commutent entre-eux et tel que $(d^H)^2 = 0 = (d^H)^2$.

Donnons-nous maintenant un espace cosimplicial $X^\bullet : \Delta \longrightarrow \text{TOP}$. Nous allons d'abord créer un **complexe de chaines cosimplicial** (voir la définition B.3 d'objets cosimpliciaux) en composant avec le foncteur des chaines singulières $C_* : \text{TOP} \longrightarrow \text{Ch}$.³

Nous voulons alors transformer ce complexe de chaines cosimplicial en ce que nous pourrions appeler un "cocomplexe" de complexe de chaîne. Un "cocomplexe" de complexe de chaines peut également être vu comme un *bicomplexe différentiel*.

Explicitons ce complexe de chaines cosimpliciale, $C_*(X^\bullet) =$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ C_1(X^0) & \rightleftarrows & C_1(X^1) & \rightleftarrows & C_1(X^2) & \rightleftarrows & \dots \\ \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\ C_0(X^0) & \rightleftarrows & C_0(X^1) & \rightleftarrows & C_0(X^2) & \rightleftarrows & \dots \end{array}$$

2. Le fait que les morphismes d_V , d^H augmentent ou diminuent l'indice varie en fonction des situations. Le choix que nous avons fait ici a pour but de correspondre au mieux à notre utilisation avec les opérades.

3. Notons que suite à la remarque 2.21, nous aurions aussi pu appliquer le foncteur C_* avant l'étape -1 qui consistait à appliquer la procédure de McClure-Smith.

Il y a deux moyens de transformer cette structure en un complexe bigradué, à savoir, faire une normalisation cosimpliciale sur les rangés, ou simplement, faire une *non-normalisation* sur les rangées, ce qui consiste à prendre la somme alternée des cofaces (B.14). Nous avons déjà remarqué que d'un point de vue homologique, ces deux méthodes sont équivalentes (voir remarque B.15). Nous choisissons d'utiliser la deuxième méthode. Concrètement nous construisons un bicomplexe différentiel en posant

$$K_{p,q} := C_q(X^p) \quad d_V := d \quad d^H := \sum_i (-1)^i \partial^i.$$

Si la construction de la suite spectrale ne paraît pas évidente à partir de ce bicomplexe, nous invitons le lecteur à parcourir l'annexe C, avec une attention particulière à la section C.2, dans laquelle une description des premières pages d'une suite spectrale issue d'un bicomplexe est effectuée.

2.2.2 Convergences de suite spectrale

En toute généralité, une suite spectrale $E^0(X), E^1(X), E^2(X), \dots$ construite à partir d'un certain objet X peut être comprise comme un moyen d'approximation. En général, on cherche à s'approcher de l'homologie de X , ou tout objet qui s'en rapproche (en fonction de la nature de X). Un premier enjeu devient alors de trouver des conditions pour que ce processus d'approximation se passe correctement. En d'autres termes, quand la suite spectrale est-elle convergente, au sens de la définition 2.18, et vers quoi converge-t-elle, c'est-à-dire, à quoi correspond E^∞ ?

Rappelons que pour créer la suite spectrale de Bousfield-Kan (section 2.2.1), nous sommes passé, par la création d'un complexe de chaînes filtré (étape 1). L'un des théorèmes de convergence les plus élémentaires donne alors une condition sur ce complexe différentiel filtré qui garantit la convergence. Il peut donc s'appliquer à toute sorte de suites spectrales, tant que leur construction se termine par les étapes 2 et 3 de notre plan d'action de la section 2.2.1.

Enonçons ce théorème sous une forme informelle, l'énoncé précis équivalent correspond⁴ au théorème 14.6 dans [4].

Pseudo-théorème 1 (Convergence des suites spectrales). *Soit (T, D, F^T) un complexe différentiel filtré comme dans la définition C.1.*

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} \text{La filtration est bornée.} \\ \text{C'est-à-dire, pour chaque } i, \\ F_p^{T_i} = \{0\} \text{ à partir d'un cer-} \\ \text{tain } p. \end{array} & \implies \begin{array}{l} \text{La suite spectrale créée à partir} \\ \text{de ce complexe converge vers} \\ \text{l'homologie de } T. \end{array} \end{array}$$

4. D'autres références sont le théorème 5.5.1 dans [26] ou théorème 2.6 dans [18].

Hélas, dans le cas de la suite spectrale de Bousfield-Kan, la filtration sur le complexe de chaines que nous obtenons n'a aucune raison d'être bornée.

Heureusement, il existe d'autres théorèmes de convergence. Celui que nous allons employer ici est dû à Bousfield. Mettons en évidence les deux hypothèses clefs de son théorème.

Pour ce faire, prenons un complexe de chaines cosimplicial $C_*(X)^\bullet$ issu d'un espace cosimplicial $X^\bullet$, et considérons le bicomplexe associé comme dans l'étape ?? de la section 2.2.1 :

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow d_V & & \downarrow d_V & & \downarrow d_V & \\ C_1(X^0) & \xrightarrow{d^H} & C_1(X^1) & \xrightarrow{d^H} & C_1(X^2) & \xrightarrow{d^H} & \dots \\ & \downarrow d_V & & \downarrow d_V & & \downarrow d_V & \\ C_0(X^0) & \xrightarrow{d^H} & C_0(X^1) & \xrightarrow{d^H} & C_0(X^2) & \xrightarrow{d^H} & \dots \end{array}$$

En prenant l'**homologie réduite**⁵ par rapport à la différentielle verticale, et ensuite, l'homologie en fonction des différentielles horizontales $\tilde{d}^H := \tilde{H}(d^H)$ (induites à travers l'homologie verticale), on obtient un espace vectoriel bigradué

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & & & & \\ H(\tilde{H}_1(X^0), \tilde{d}^H) & & H(\tilde{H}_1(X^1), \tilde{d}^H) & & H(\tilde{H}_1(X^2), \tilde{d}^H) & & \dots \\ & & & & & & \\ H(\tilde{H}_0(X^0), \tilde{d}^H) & & H(\tilde{H}_0(X^1), \tilde{d}^H) & & H(\tilde{H}_0(X^2), \tilde{d}^H) & & \dots \end{array}$$

On note alors l'espace bigradué obtenu : $H^* \tilde{H}_*(X) = \{H^p(\tilde{H}_q(X))\}_{p,q}$ en utilisant la notation $H^p(\tilde{H}_q(X)) := H(\tilde{H}_q(X^p), \tilde{d}^H)$

Définition 2.24 (Les hypothèses de Bousfield). *Un espace cosimplicial $X^\bullet$ respecte les hypothèses de Bousfield si, pour $n \in \mathbb{N}$, en considérant la suite*

$$H^0(\tilde{H}_n(X)), \quad H^1(\tilde{H}_{n+1}(X)), \quad H^2(\tilde{H}_{n+2}(X)), \quad \dots$$

1. les éléments de cette suite sont tous nuls lorsque $n \leq 1$,
2. pour chaque n , il y a un nombre fini d'éléments non-nuls dans la suite.

5. Nous rappelons que l'homologie réduite d'un complexe singulier $C_*(X)$ correspond par définition à l'homologie du complexe $\mathbb{Q} \xleftarrow{\epsilon} C_0(X) \leftarrow C_1(X) \leftarrow \dots$, où ϵ est défini comme l'application qui envoie chaque vecteur de base de $C_0(X)$ sur 1. Nous savons du cours LMAT2140 que l'homologie réduite diffère de l'homologie singulière seulement en degré 0. Plus précisément, $H_0(K) \cong \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Q}$ (voir [10] p110).

Remarque 2.25 (Reformulation de l'hypothèses 2). Remarquons qu'il suffit de montrer que les éléments du complexe bigradué $H^*\tilde{H}_*(X) = \{H^p(\tilde{H}_q(X))\}_{p,q}$ sont nuls pour $q < \delta p$ avec $\delta > 1$. Visuellement, cette nouvelle condition correspond au fait que les éléments non-nuls sont au-dessus d'une droite ayant une pente supérieure à 1.

Cette nouvelle condition suffit donc à impliquer l'hypothèse 2 qui peut visuellement s'interpréter comme le fait que chaque droite (entière) ayant une pente de 1 doit contenir un nombre fini d'éléments non-nuls.

Notons que l'hypothèse 1 quant à elle s'interprète comme le fait que tous les éléments sur ou en dessous de la droite ayant pour équation $q = p + 1$ doivent être nuls. Dans le cas où nous avons que les éléments du complexe bigradué $H^*\tilde{H}_*(X) = \{H^p(\tilde{H}_q(X))\}_{p,q}$ sont nuls pour $q < \delta p$, l'hypothèse 1 devra tout de même se vérifier pour les premières valeurs de p (avant que p dépasse la valeur $\frac{1}{\delta-1}$, qui correspond au moment où la droite d'équation δp dépasse la droite d'équation $q = p + 1$).

Sous ces hypothèses (entre autres), Bousfield montre alors :

Théorème 2.26. *Si $X^\bullet$ est un espace cosimplicial qui respecte, entre autres⁶, les hypothèses de Bousfield, alors la suite spectrale de Bousfield-Kan, $E(X^\bullet)$, converge vers l'espace $\text{Tot}(X^\bullet)$ défini en B.9.*

Proposition 2.27 (Convergence de l'opérade des directions). *Pour $d \geq 5$, l'opérade des directions, vu comme un espace cosimplicial, respecte les hypothèses de Bousfield.*

Démonstration. Soit $d \geq 5$. Vérifions les hypothèses de Bousfield pour $\mathcal{S}_d$, l'opérade des directions définie en 1.14. Nous savons que $\mathcal{S}_d$ est une opérade multiplicative (voir 1.19), nous pouvons donc appliquer la procédure de McClure-Smith pour obtenir un espace cosimplicial. Pour vérifier les hypothèses de Bousfield, nous envoyons cet espace cosimplicial à travers le foncteur C_* .

But : montrer⁷ que pour les indices $0 < q < \frac{d-1}{2}p$, nous avons $H^p(H_q(\mathcal{S}_d)) = 0$.

6. Attention, il existe en effet des hypothèses supplémentaires concernant la nature des espaces X^n , notamment concernant la *nilpotence* des espaces et le fait que $X^\bullet$ doit être *fibrant*. Nous omettrons la vérification de ces hypothèses dans ce qui suit, et nous nous concentrerons sur les hypothèses de la définition.

7. Par la remarque 2.25, il suffira à montrer l'hypothèse 2. L'hypothèse 1 pourra facilement être vérifiée à la main, pour les premiers $p \leq \frac{2}{d-3}$.

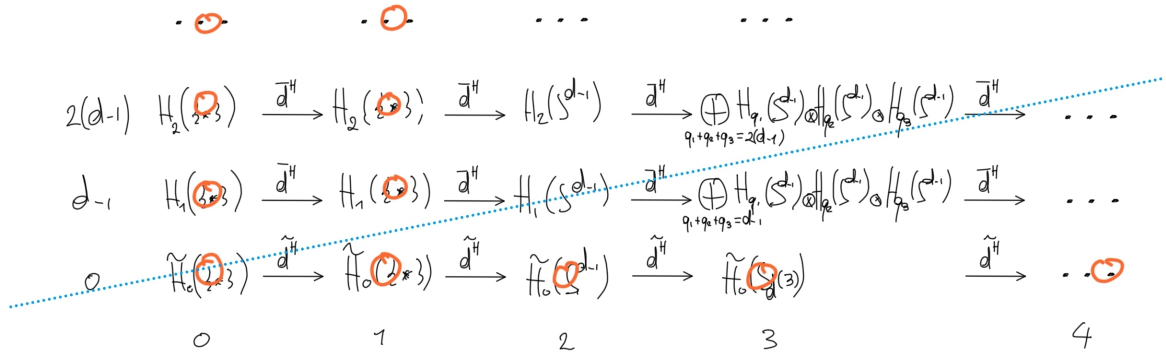


FIGURE 2.2 – Étude de l'homologie de l'opérade des directions. $\bar{d}^H$ représente la différentielle horizontale induite en homologie par d^H , éventuellement conjuguée avec l'isomorphisme de Kunneth.

Regardons alors l'homologie réduite (avant de considérer l'homologie horizontale)

$$\begin{aligned} \dots & \quad \dots & \quad \dots \\ \tilde{H}_1(\mathcal{S}_d(0)) & \xrightarrow{\tilde{d}^H} \tilde{H}_1(\mathcal{S}_d(1)) \xrightarrow{\tilde{d}^H} \tilde{H}_1(\mathcal{S}_d(2)) \xrightarrow{\tilde{d}^H} \dots \\ \tilde{H}_0(\mathcal{S}_d(0)) & \xrightarrow{\tilde{d}^H} \tilde{H}_0(\mathcal{S}_d(1)) \xrightarrow{\tilde{d}^H} \tilde{H}_0(\mathcal{S}_d(2)) \xrightarrow{\tilde{d}^H} \dots \end{aligned}$$

Simplification 1) : $\tilde{H}_q(\mathcal{S}_d(p)) = 0$ pour $p \leq 2$ et $q \geq 1$: En arité 0 et 1, comme $\mathcal{S}_d$ est le singleton, l'homologie réduite est complètement nulle (A.7). Nous savons aussi que $\mathcal{S}_d(n)$ est connexe, donc son homologie réduite est nulle en degré 0.

Simplification 2) : On peut donc considérer uniquement les lignes multiples de $d - 1$: En utilisant l'isomorphisme A.39 de Kunneth et le fait que l'homologie et l'homologie réduite coïncident en degré strictement positif on calcule

$$\tilde{H}_q(\mathcal{S}_d(p)) = H_q(\mathcal{S}_d(p)) = H_q(S^{d-1} \times \dots \times S^{d-1}) \cong \bigoplus_{q_1 + \dots + q_N = q} H_{q_1}(S^{d-1}) \otimes \dots \otimes H_{q_N}(S^{d-1}),$$

où $N := \binom{p}{2}$. Comme l'homologie de la sphère $H_*(S^{d-1}) = \mathbb{Q}x_0 + \mathbb{Q}x_{d-1}$ (A.8) est nulle partout sauf en degré 0 et $d - 1$, si un seul des q_i pour un terme de la somme est différent de 0 ou $d - 1$, le produit $H_{q_1}(S^{d-1}) \otimes \dots \otimes H_{q_N}(S^{d-1})$ sera forcément nul. On en déduit que

$$\bigoplus_{q_1 + \dots + q_N = q} H_{q_1}(S^{d-1}) \otimes \dots \otimes H_{q_N}(S^{d-1}) = 0 \quad \text{lorsque } q \text{ n'est pas un multiple de } d - 1.$$

Aux termes des deux simplifications, on peut représenter la situation par la figure 2.2. Notre but est alors de montrer que les éléments strictement sous la ligne bleue pointillée ont une homologie nulle.

Souvenons-nous que $\bar{d}^H = \sum (-1)^i H_*(\partial^i)$ où ∂^i est le i -ème bord de l'espace cosimplicial $\mathcal{S}_d^\bullet : \Delta \rightarrow \text{TOP}$ créé à l'aide de la procédure de McClure-Smith. En fait, nous pouvons voir $H_*(\mathcal{S}_d)$ comme la *non-normalisation* (au sens de la définition B.14) de l'espace vectoriel (gradué) cosimplicial

$$H_*(\mathcal{S}_d)^\bullet := \Delta \xrightarrow{\mathcal{S}_d^\bullet} \text{TOP} \xrightarrow{H_*} {}_{\mathbb{Q}}\text{MOD}.$$

Appliquer une normalisation cosimpliciale à la place ne changera donc pas la valeur de l'homologie (voir B.15). C'est ce que nous allons faire. Nous allons montrer que lorsque $0 < q < \frac{d-1}{2}p$, alors $N^*(H_*(\mathcal{S}_d)^\bullet) = \bigcap_{i=0}^{p-1} H_*(s^i) = \{0\}$.

Il nous faut, pour ce faire, étudier les codégénérescences de $H_*(\mathcal{S}_d)^\bullet$. Elles correspondent à $H_*(s^i)$ où s^i sont les codégénérescences de $\mathcal{S}_d^\bullet$. Nous savons que les codégénérescences $s^i : \mathcal{S}_d(p) \rightarrow \mathcal{S}_d(p-1)$ correspondent à certaines projections qui retirent exactement $p-1$ composantes (voir 2.20). Et nous savons que l'homologie des projections peut être exprimée en termes de l'augmentation ϵ (voir A.41). Nous avons alors que

$$H_*(s^i) : \bigoplus_{q_1 + \dots + q_N = p} H_{q_1}(S^{d-1}) \otimes \dots \otimes H_{q_N}(S^{d-1}) \longrightarrow \bigoplus_{q_1 + \dots + q_{N'} = p} H_{q_1}(S^{d-1}) \otimes \dots \otimes H_{q_{N'}}(S^{d-1})$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_N \longmapsto x_1 \otimes \dots \otimes \epsilon \otimes x_k \otimes \epsilon \otimes \dots \otimes x_N$$

où les $p-1$ occurrences des ϵ sont réparties entre les entrées. On peut trier cette répartition des ϵ en représentant $H(s^i)$ comme une matrice. par exemple, pour $p = 6$ et $i = 3$,

$$\begin{pmatrix} \cdot & \text{id} & \text{id} & \epsilon & \text{id} & \text{id} \\ \cdot & \cdot & \text{id} & \epsilon & \text{id} & \text{id} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon & \text{id} & \text{id} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \epsilon & \epsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{id} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

On constate alors que pour qu'un élément de $H_*(\mathcal{S}_d(p))$ soit dans le noyau de $H_*(s^i)$ il faut qu'il y ait au moins un élément de degré non nul aux entrées correspondantes à la $i+1$ -ème ligne ou $i+1$ -ème colonne. Un élément de degré non-nul dans une entrée satisfera au mieux cette condition pour deux dégénérescences. Par exemple, pour $p = 6$,

nous pouvons définir l'élément

$$v = \begin{pmatrix} \cdot & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & y & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in H_q(\mathcal{S}_d(6)).$$

Cet élément v est dans l'intersection des noyaux parce que x permet à v d'être dans le noyau de $H_*(s_0)$ et $H_*(s_1)$, y permet à v d'être dans le noyau de $H_*(s_2)$ et $H_*(s_3)$, et finalement z permet à v d'être dans le noyau de $H_*(s_4)$ et $H_*(s_5)$. On obtient alors la condition que si v est dans l'intersection des noyaux, il doit avoir au moins $p/2$ éléments de degré non nul. Mais comme nous l'avons déjà observé, ces éléments sont alors uniquement de degré 0 ou $d - 1$ (parce qu'ils appartiennent à l'homologie de la sphère). Donc pour être dans le noyau, le degré de v doit être supérieur à $(p/2) \cdot (d - 1)$, on obtient donc bien

$$q = |v| \geq \frac{d-1}{2}p.$$

Ce qui montre que les noyaux sont triviaux sinon, comme souhaité. $\square$

Un raisonnement similaire permet de montrer le fait suivant :

Exercice 2.28 (Convergence du produit d'espace). Soit X un espace topologique pointé connexe tel que $H_1(X) = 0$ alors, $X^{\times \bullet}$, la cobar géométrique de l'exemple B.8, respecte les hypothèses de Bousfield.

2.2.3 Dégénérescence de suites spectrales

Comme en témoigne la discussion de la section précédente, une suite spectrale peut être vue comme un processus d'approximation. Nous montrons dans cette section que la formalité présentée à la section 2.1 nous donne alors une indication sur la vitesse de convergence.

Concrètement, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.29 (Dégénérescence à cause de la formalité multiplicative). *Soit $\mathcal{O}$ une opérade multiplicativement formelle (définition 2.16), alors la suite spectrale de Bousfield-Kan associée dégénère à la deuxième page, au sens de la définition 2.18.*

Démonstration. (voir preuve du théorème 1.4 dans [20]) Cette proposition suit de la naturalité à chaque étape de la construction de la suite spectrale de Bousfield-Kan. Plus

précisément, si nous avons un zigzag de quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} C_*(\mathcal{O}) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{\cong} & \dots & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{O}_n & \xrightarrow{\cong} & H_*(\mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \dots & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u & = & \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u. \end{array}$$

Appliquer McClure-Smith (pour les complexes de chaînes) nous donne une zigzag de transformation naturelle dans Ch^Δ dont chaque composante est un quasi-isomorphisme

$$(C_*(\mathcal{O}))^\bullet \xleftarrow{\cong} \mathcal{O}_1^\bullet \xrightarrow{\cong} \dots \xleftarrow{\cong} \mathcal{O}_n^\bullet \xrightarrow{\cong} (H_*(\mathcal{O}))^\bullet$$

De là, on crée un bicomplexe différentiel comme à l'étape 0 de la construction de la suite spectrale de Bousfield-Kan.⁸ Les flèches du zigzag correspondent alors à ce que serait un *morphisme de bicomplexes* qui peut être pensé comme une famille de flèches dont chacune part d'un espace degré (p, q) et arrive dans l'espace de degré (p, q) correspondant. Notons que chacune de ces flèches induit un isomorphisme par rapport à l'homologie verticale. Par naturalité, nous avons, à chaque page, un zigzag de suites spectrales (à savoir, un morphisme qui commute avec la différentielle).

$$E^r(\mathcal{O}) \longleftarrow E^r(\mathcal{O}_1^\bullet) \longrightarrow \dots \longleftarrow E^r(\mathcal{O}_n^\bullet) \longrightarrow E^r(H_*(\mathcal{O}))$$

Nous savons justement que la première page d'une suite spectrale créée à partir d'un tel bicomplexe correspond justement à l'homologie par rapport à la différentielle verticale (C.3). En d'autres termes, pour la page $r = 1$, ce zigzag est en fait un zigzag d'isomorphismes. Ce qui induit forcément un zigzag d'isomorphisme à chaque pages $r \geq 1$.

Pour conclure la preuve, il suffit alors d'observer que $E^r(H_*(\mathcal{O}))$ dégénère à la page 2. Ceci est une conséquence directe du fait que la différentielle verticale est nulle (voir lemme C.7) $\square$

Le fait que la formalité implique la dégénérescence d'une suite spectrale peut également être utilisé comme critère de non-formalité : Si l'on arrive à montrer que la suite spectrale ne dégénère pas à la page 2, alors l'opérade n'est pas multiplicativement formelle.

Dans la section suivante, nous montrerons comment ce principe peut être utilisé pour montrer que l'opérade de Kontsevich à repères n'est pas formelle en dimension impaire au-delà de la dimension quatre.

Mentionnons un deuxième critère de dégénérescence, pour les espaces topologiques cette fois.

8. Notons qu'à l'étape 0 nous étions parti d'un espace topologique cosimplicial et lui avons appliqué le foncteur C_* pour obtenir un complexe de chaînes cosimplicial, alors qu'ici, nous avons directement un complexe de chaînes cosimplicial. Comme en témoigne l'exercice 2.22 cependant, le résultat final sera identique.

Proposition 2.30 (Dégénérescence à cause de la formalité topologique). *Soit X un espace pointé ($x_0 \in X$) homotopiquement formel (2.6), alors, la suite spectrale de Bousfield-Kan construite à partir de l'espace cosimplicial $X^{\times \bullet}$ (B.8) dégénère à la page 2.*

Démonstration. Étant donné un zigzag de quasi-isomorphismes de coalgèbres.

$$C_*(X) \xleftarrow{f_1} C_1 \longrightarrow \cdots \longleftarrow C_k \xrightarrow{f_k} H_*(X).$$

Notons c_0 l'élément de $C_0(X)$ correspondant au point de base x_0 . Nous pouvons choisir, d'abord dans C_1 , puis C_2 ect... des éléments $c_1, c_2, \dots$ qui correspondent à la classe d'homologie de x_0 , et qui sont envoyés les uns sur les autres à travers tout le zigzag. Considérons alors $C_*(X^{\times \bullet})$ la composition de $X^{\times \bullet}$ avec le foncteur C_* , comme dans la création d'une suite spectrale de Bousfield-Kan (étape 0). On définit alors un zigzag de chaînes cosimpliciales

$$C_*(X^{\times \bullet}) \xleftarrow{\times'} C_*(X)^{\otimes \bullet} \xleftarrow{f_1^{\otimes \bullet}} C_1^{\otimes \bullet} \longrightarrow \cdots \longleftarrow C_k^{\otimes \bullet} \xrightarrow{f_k^{\otimes \bullet}} H_*(X)^{\otimes \bullet}$$

avec

- le morphisme $\times'$ correspond à un certain nombre de compositions du produit en croix (en fonction du degré n regardé) défini en A.31. Nous savons que c'est un quasi-isomorphisme pour chaque n par un corollaire du théorème d'Eilenberg-Zilber (A.32).
- Les espaces $C_j^{\otimes \bullet}$ correspondent à l'espace cosimplicial muni des cobords

$$\begin{aligned} \partial^0 &= c_j \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \\ \partial^i &= \text{id} \otimes \cdots \otimes \Delta_{C_j} \otimes \cdots \otimes \text{id} \\ \partial^{n+1} &= \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \otimes c_j. \end{aligned}$$

et des codégénérescences $s^i = \text{id} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{C_j} \otimes \cdots \otimes \text{id}$ où Δ_{C_j} et ϵ_{C_j} sont les comultiplications et les counités des espaces C_j . On définit $H_*(X)^{\otimes \bullet}$ de manière analogue.

- Les fonctions $f_j^{\otimes \bullet}$ sont induites par les fonctions du zigzag de l'hypothèse. Grâce à l'isomorphisme de Kunnetth généralisé (A.42) et son caractère monoïdal (A.43), nous savons que $f_j^{\otimes n}$ est un quasi-isomorphisme pour chaque n . En effet, nous avons $H(f_j^{\otimes n}) \cong H(f_j)^{\otimes n}$ qui est un isomorphisme (car il a pour inverse $(H(f_j)^{-1})^{\otimes n}$).

On vérifie finalement que ce zigzag est un zigzag de complexes de chaînes cosimpliciaux. En effet, le fait que chaque morphisme commute avec les cobords et codégénérescences suivent, pour $\times'$, des diagrammes en A.34 et A.35, et pour $f_j^{\otimes n}$, du fait que f_j est un morphisme de coalgèbres, qui préserve le point de base défini au début de la preuve.

On conclut alors, en prenant la suite spectrale associée. On obtient un zigzag de suites spectrales qui devient un zigzag d'isomorphisme dès la première page. Mais la suite spectrale de droite dégénère à la page 2 car la différentielle verticale est nulle (c'est le

lemme C.7) donc il en va de même pour la suite spectrale de gauche, qui est exactement, par définition, $E(X^{\times\bullet})$. $\square$

Chapitre 3

Non-formalité de l'opérade de Kontsevich à repères en dimension impaire

Table des matières

3.1	La deuxième page pour l'opérade des directions à repère	71
3.1.1	Convergence pour l'opérade des directions à repère	78
3.2	Non-formalité multiplicative	79
3.3	Obstruction à la formalité opéradique	84

Dans cette section, nous allons décrire une preuve de Moriya [21] concernant la non-formalité de l'opérade de Kontsevich à repères $f\mathcal{K}_d$ définie en 1.16 et 1.22 pour une dimension impaire plus grande que 4. Notons que cette opérade est équivalente à l'opérade des petits disques à repères (1.23). Nous avons réalisé un travail conséquent pour apporter plus amples détails par rapport à la preuve originale (qui est réalisée en quelques pages)

Nous avons vu deux critères majeurs pour montrer la non-formalité, l'un pour les espaces topologiques, l'autre pour les opérades multiplicative. Pour les espaces topologique, il s'agissait de l'existence d'un produit de Massey non-nul (proposition 2.12); pour les opérade multiplicative, c'était la non-dégénérescence de la suite spectrale de Bousfield-Kan (proposition 2.29).

Notre preuve se divise alors en deux grandes parties :

D'abord, nous prouvons la non-formalité multiplicative en section 3.2, en montrant que la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à l'opérade ne dégénère pas en page 2 (voir proposition 2.29) Pour ce faire, nous montrons que la différentielle à cette page n'est pas triviale. En effet, si l'image d'une des différentielle est non nulle, son homologie sera forcément d'un rang strictement plus petit (pour autant que nous ayons à faire à des

espaces d'homologie finiment engendrés). Ainsi, il ne pourra pas y avoir d'isomorphisme entre la page 2 et 3, et donc, pas de dégénérescence.

Ensuite nous verrons en section 3.3, comment construire, pour le cas de l'opérade $\mathcal{K}_d$, une sorte d'équivalent au produit de Massey. Cet équivalent nous permettra alors de prouver la non-formalité stricte (et pas seulement dans le sens multiplicatif).

Pour l'entièreté de ce chapitre, d sera un nombre impair plus grand que 4.

Résultats préalables nécessaires

Pour mener à bien cette preuve de non-formalité, nous aurons besoin d'une série de résultats concernant l'homologie de certains espaces.

Proposition 3.1 (Homologie de SO_d , proposition 3D.4 [10]). *Nous avons les isomorphismes¹*

$$H_*(\mathrm{SO}_d) \cong \bigwedge(\beta_3, \beta_7, \dots, \beta_{2d-3}) \quad H_*(\mathrm{SO}_{d-1}) \cong \bigwedge(\beta_3, \beta_7, \dots, \beta_{2d-7}, \beta'_{d-2})$$

comme algèbre, où la structure d'algèbre est donné par le produit de SO_d transporté à travers l'homologie. Les degrés de chaque élément correspondent à leur indice. En plus, chaque β_i peut être choisi primitif par rapport à la comultiplication sur l'homologie (A.40), ce qui signifie que $H_*(\Delta)(\beta_i) = 1 \otimes \beta_i + \beta_i \otimes 1$.

Proposition 3.2 (Homologie de $\Omega(\mathrm{SO}_d)_1$, lemme 2.2 dans [21]). *Soit $d > 4$ impair, soit $\Omega_1(\mathrm{SO}_d)$, $\omega_1 \mathrm{SO}_{d-1}$ la composante connexe de (SO_d) et (SO_{d-1}) respectivement, contenant le lacet constant. Alors,*

$$H_*(\Omega(\mathrm{SO}_d)_1) \cong \mathbb{Q}[\gamma_2, \gamma_6, \dots, \gamma_{2d-4}] \quad H_*(\Omega(\mathrm{SO}_{d-1})_1) \cong \mathbb{Q}[\gamma_2, \gamma_6, \dots, \gamma_{2d-8}, \gamma'_{d-3}].$$

comme algèbre, où le produit est issu de la concaténation de lacets. Le degré de chaque élément correspond à son indice.

Pour la prochaine proposition, il est utile de se souvenir qu'un espace de double lacet est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber (1.41)

Proposition 3.3 (Homologie de $\Omega^2(S^{d-1})$). *$H_*(\Omega^2(S^{d-1}))$ est généré par x et $[x, x]$ comme algèbre de Gerstenhaber, avec x de degré $d - 3$.*

1. Le symbole $\bigwedge$ est défini en A.21.

3.1 La deuxième page pour l'opérade des directions à repère

Notre premier objectif est de montrer que la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à l'opérade de Kontsevich à repère ne dégénère pas, impliquant ainsi, sa non-formalité multiplicative.

La première étape de ce projet consiste à obtenir une description de la deuxième page de la suite spectrale de Bousfield-Kan de l'opérade de Kontsevich à repères, $f\mathcal{K}_d$ et de l'opérade des directions à repères, $f\mathcal{S}_d$. Notons que la parité de $d-1$ joue un rôle crucial dès cette première étape (dans le lemme 3.5).

Notre raisonnement sera une reformulation plus détaillée des quelques lignes de démonstration de la première partie du lemme 3.1 dans [21].

Voici notre objectif pour cette section :

Proposition 3.4 (Forme explicite des deuxièmes pages). *La deuxième page de la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à $\mathcal{K}_d$ peut être décrite comme :*

$$E_{p,q}^2(f\mathcal{K}_d) \cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{K}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2}).$$

La deuxième page de la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à $\mathcal{K}_d$ peut être décrite comme :

$$\begin{aligned} E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d) &\cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{S}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2}) \\ \bigoplus_{q-p=n} E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d) &\cong \left(H_*(\Omega(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(SO_d)_1) \right)_n. \end{aligned}$$

où $\left(H_*(\Omega(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(SO_d)_1) \right)_n$ est le produit tensoriel gradué en degré n , et $\omega H_*(SO_d)$ est la construction cobar définie dans la démonstration du lemme 3.8.

Démonstration. Ce sera une conséquence des lemmes 3.8, 3.9 et 3.10. □

Commençons notre exploration par considérer $\mathcal{K}_d$ et $\mathcal{S}_d$ en même temps. Notons donc $\mathcal{O}$ pour désigner ces deux opérades.

Étant donné le bicomplexe $C_*(f\mathcal{O})$ associé à l'opérade $f\mathcal{O}$, obtenu au terme des étapes -1 et 0 de la construction de la suite spectrale et suite à la section C.2, nous savons que la page 2 est obtenue en prenant d'abord l'homologie par rapport à la différentielle verticale et ensuite par rapport à la différentielle horizontale.

Commençons par évaluer l'homologie verticalement. La différentielle verticale correspond à la différentielle interne du complexe de chaînes $C_*(f\mathcal{O}(n))$. En d'autres termes, nous voulons étudier $H_*(f\mathcal{O}(n))$.

Nous savons qu'en chaque arité n , grâce à l'isomorphisme de Kunneth et à la définition d'opérade à repère que

$$H_q(f\mathcal{O}(n)) \cong \bigoplus_{q_1+q_2=q} H_{q_1}(\mathcal{O}(n)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes n})_{q_2}. \quad (3.1)$$

où $(H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes n})_{q_2}$ désigne $\bigoplus_{q'_1+\dots+q'_n=q_2} H_{q'_1}(\mathrm{SO}_d) \otimes \dots \otimes H_{q'_n}(\mathrm{SO}_d)$. Nous aimerions alors comprendre la différentielle horizontale. Dans $C_*(f\mathcal{O}(n))$, la différentielle horizontale correspondait à

$$\sum (-1)^i C_*(\partial^i),$$

où ∂^i était la coface définie dans le procédé de McClure-Smith (2.2.1). On applique alors l'homologie, et en utilisant l'exercice 2.22, nous savons que la nouvelle différentielle horizontale correspond à

$$\sum (-1)^i \partial'^i, \quad (3.2)$$

où ∂'^i est maintenant la coface définie dans le procédé de McClure-Smith à partir de l'opérade de chaînes $H_*(f\mathcal{O})$. Pour comprendre ces cofaces, il nous faut alors comprendre la composition dans $H_*(f\mathcal{O}(n))$.

Lemme 3.5 (Composition dans $H_*(f\mathcal{O}(n))$). *Soit $d - 1$ impair. La composition dans $H_*(f\mathcal{O}(n))$ correspond au produit tensoriel de la composition dans $H_*(\mathcal{O})$ et de la composition dans $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes -}$, où $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes -}$ représente l'opérade définie dans le lemme 1.34.*

Démonstration. Nous voulons appliquer le lemme 1.34. Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'action de $H_*(\mathrm{SO}_d)$ est triviale sur $H_*(\mathcal{O})$ au sens de la définition 1.33. Grâce à la G -invariance de la composition et grâce aux axiomes d'actions, il suffit de vérifier sur les générateurs de $H_*(\mathrm{SO}_d)$ et $H_*(\mathcal{K}_d)$.²

Nommons cette action ξ et commençons par le cas $\mathcal{O} = \mathcal{S}_d$. Comme dans notre cas, d est impair, et que $H_*(\mathcal{S}_d)$ correspond à un produit d'homologie de sphères en dimension $d - 1$ (voir A.8 pour l'homologie de la sphère), nous savons que tous les éléments homogènes de $H_*(\mathcal{S}_d)$ ont un degré pair. Par ailleurs, tous les générateurs de $H_*(\mathrm{SO}_d)$ ont un degré impair (voir 3.1). Il en résulte donc que quel que soit le générateur, le résultat de l'action sera de degré impair dans $H_*(\mathcal{S}_d)$, donc ce résultat sera nul. L'action ξ est donc triviale.

Regardons maintenant le cas $\mathcal{O} = \mathcal{K}_d$. Nous voulons d'abord identifier des générateurs de $H_*(\mathcal{K}_d)$. Si d avait été égal à 2, le théorème 1.38 nous aurait permis de dire que

2. Pour être plus précis, la G -invariance ($g(x \circ_i y) = gx \circ_i gy$) (1.2.2) et la compatibilité avec la multiplication ($(gh)x = g(hx)$) sont des relations dans $\mathcal{O}$ qui trouvent leur correspondance dans $H_*(\mathcal{O})$, par monoïdalité de H_* (A.43).

$H_*(\mathcal{K}_d)$ caractérise les algèbres de Gerstenhaber. En d'autres termes, $H_*(\mathcal{K}_d)$ aurait été généré, comme opérade, par deux opérations, l'une en degré 0 et l'autre en degré 1 (voir remarque 1.39 pour plus d'informations). Il existe une généralisation du théorème 1.38 ([16] section 13.3.16.), qui permet de dire, pour n'importe quel d , que $H_*(\mathcal{K}_d)$ est généré, par deux opérations binaires, de degré 0 et $d - 1$. Notons ces deux opérations $\mu_1 \in H_0(\mathcal{K}(2))$ et $\mu_2 \in H_{d-1}(\mathcal{K}(2))$.

Prenons β_{4i-1} , un des générateurs de $H_*(\mathrm{SO}_d)$ (proposition 3.1).

Nous avons alors d'une part que

$$\xi(\beta_{4i-1} \otimes \mu_1) \in H_{(4i-1)+(d-1)}(\mathcal{K}(2)) = H_{(4i-1)+(d-1)}(S^{d-1}) = \{0\}$$

Et d'autre part

$$\xi(\beta_{4i-1} \otimes \mu_2) \in H_{(4i-1)}(\mathcal{K}(2)) = H_{(4i-1)}(S^{d-1}) = \{0\},$$

car $4i - 1$ est impair et $d - 1$ est pair par hypothèse.

Ceci montre que l'action est bien triviale, comme souhaité. $\square$

Notons que c'est dans ce lemme que nous avons besoin que la dimension d soit impaire.

Maintenant que nous avons identifié comment fonctionne la composition dans $H_*(f\mathcal{O})$, nous voulons comprendre ses cofaces, qui se divisent donc, en cofaces de $H_*(\mathcal{O})^\bullet$ et en cofaces de $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes\bullet}$.

Lemme 3.6 (Les cofaces de $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes\bullet}$). *Soit $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes\bullet}$ le complexe cosimplicial obtenue par la procédure de McClure-Smith sur $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes-}$. Soit $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ un élément de $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes n}$. Les cofaces de $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes\bullet}$ correspondent alors à*

$$\begin{aligned} \partial^0(x) &= ([1] \otimes x) \\ \partial^i(x) &= (x_1 \otimes \cdots \otimes H_*(\Delta)(x_i) \otimes \cdots \otimes x_n) \\ \partial^{n+1}(x) &= (x \otimes [1]). \end{aligned} \tag{3.3}$$

En prenant la somme alternée, nous obtenons un bicomplexe qui correspond à ce que l'on appelle la **construction cobar** associée à la coalgèbre $(H_*(\mathrm{SO}_d), H_*(\Delta))$. On note ce bicomplexe $\omega H_*(\mathrm{SO}_d)$.

Démonstration. Essayons de comprendre les cofaces de $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes\bullet}$. Pour ce faire, il faut d'abord comprendre qui est l'image de $1 \in \mathcal{A}ss(2)$ par le morphisme d'opérades multiplicatives. Pour munir $f\mathcal{O}(2)$ d'une structure multiplicative, nous avons considéré l'injection de $\mathcal{O}(2)$ dans $f\mathcal{O}(2)$ (1.24).

$$\mathcal{A}ss^u(2) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}(2) \xhookrightarrow{i} f\mathcal{O}(2)$$

Le passage à l'homologie nous donne alors ce digramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}ss_{\text{Ch}}^u(2) & \xrightarrow{H_0(\varphi)} & H_0(S^{d-1}) \hookrightarrow H_0(S^{d-1} \times \text{SO}_d \times \text{SO}_d) \\ & & \cong \uparrow Q \\ & & H_0(S^{d-1}) \otimes H_0(\text{SO}_d) \otimes H_0(\text{SO}_d) \end{array} .$$

où Q est l'isomorphisme de Kunneth.

On vérifie alors à la main (en utilisant la définition A.31 de produit en croix notamment) que $[v_0] \otimes [1] \otimes [1] \in H_0(S^{d-1}) \otimes H_0(\text{SO}_d) \otimes H_0(\text{SO}_d)$ est l'élément multiplicatif que nous cherchons (où v_0 est l'élément de la remarque 1.19). Nous sommes intéressés par ses composantes correspondantes à $H_*(\text{SO}_d)^{\otimes -}$ (en l'occurrence, les deux dernières).

Maintenant, pour comprendre les cofaces de $H_*(\text{SO}_d)^{\otimes \bullet}$, il faut étudier les compositions $([1] \otimes [1]) \circ_i x$ et $x \circ_i ([1] \otimes [1])$. Nous savons que la composition dans $H_*(\text{SO}_d)^{\otimes -}$ est exprimée en terme de $H_*(\cdot_G)$ et $H_*(\Delta)$ (voir 1.21). Nous pouvons aussi observer notamment que $H_*(\cdot_G)(Q([1] \otimes x)) = x = H_*(\cdot_G)(Q(x \otimes [1]))$, et $Q^{-1}(H_*(\Delta)([1])) = [1] \otimes [1]$, où Q est l'isomorphisme de Kunneth (A.38). En notant $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in H_*(\text{SO}_d)^{\otimes n}$, on conclut alors que

$$\begin{aligned} \partial^0(x) &= ([1] \otimes [1]) \circ_2 x = ([1] \otimes [1]) \circ ([1] \otimes x) = ([1] \otimes x) \\ \partial^i(x) &= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \circ_i ([1] \otimes [1]) = (x_1 \otimes \cdots \otimes H_*(\Delta)(x_i) \otimes \cdots \otimes x_n) \\ \partial^{n+1}(x) &= ([1] \otimes [1]) \circ_1 x = ([1] \otimes [1]) \circ (x \otimes [1]) = (x \otimes [1]). \end{aligned} \quad (3.4)$$

sont les cofaces de $H_*(\text{SO}_d)^{\otimes \bullet}$. □

Avant de poursuivre, faisons une petite parenthèse sur la construction cobar, pour observer le fait suivant.

Lemme 3.7 (La construction cobar comme suite spectrale). *Soit X un espace topologique pointé ($b_0 \in X$), considérons $X^{\times \bullet}$ l'espace cosimplicial que nous avons appelé cobar géométrique (voir B.8). Alors,*

$$E_{p,q}^2(X^{\times \bullet}) \cong H(\omega H_*(X)^{p,q})$$

Démonstration. On constate qu'à travers le foncteur d'homologie $H_* : \text{TOP} \longrightarrow \text{Ch}$, les cobords et codégénérescences de $X^{\times \bullet}$ deviennent (à conjugaison près par le morphisme de Kunneth),

$$\begin{aligned} H_*(\partial^0) &= [x_0] \otimes \text{id} \otimes \cdots \otimes \text{id} \\ H_*(\partial^i) &= \text{id} \otimes \cdots \otimes H_*(\Delta) \otimes \cdots \otimes \text{id} \\ H_*(\partial^{n+1}) &= \text{id} \otimes \cdots \otimes [b_0]. \end{aligned}$$

où Δ est la diagonale topologique, et $[b_0] : \mathbb{Q} \longrightarrow H_0(X)$ est vue comme la fonction qui associe à 1 le point de base. On constate alors que ça correspond exactement aux équations 3.3 des cofaces caractérisant la cobar de l'homologie de X .

En reparcourant les étapes de la construction d'une suite spectrale de Bousfield-Kan (surtout, celles de la section C.2), cette observation nous permet alors d'affirmer que

$$E_{p,q}^1(X^{\times \bullet}) \cong \omega H_*(X)$$

comme complexes de chaines. Ce qui implique directement que

$$E_{p,q}^2(X^{\times \bullet}) = H(E_{p,q}^1(X^{\times \bullet})) \cong H(\omega H_*(X)^{p,q}). \quad \square$$

Maintenant, démontrons la propriété clef de cette section.

Proposition 3.8 (Deuxième page de $E(f\mathcal{O})$). *Soit $\mathcal{O}$ l'opérade des directions ou l'opérade de Kontsevich pour d impair plus grand que 5, alors*

$$E_{p,q}^2(f\mathcal{O}) \cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{O}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2}).$$

Démonstration. Nous savons déjà que la première page correspond à l'équation 3.1. Nous savons aussi que la différentielle horizontale est la somme alternée des cofaces ∂^i dans,

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$H_1(f\mathcal{O}(0)) \rightrightarrows H_1(f\mathcal{O}(1)) \rightrightarrows H_1(f\mathcal{O}(2)) \rightrightarrows \dots$$

$$H_0(f\mathcal{O}(0)) \rightrightarrows H_0(f\mathcal{O}(1)) \rightrightarrows H_0(f\mathcal{O}(2)) \rightrightarrows \dots$$

Nous allons fixer q , une rangée. Comme les cofaces dans $H_q(f\mathcal{O})$ correspondent aux cofaces de $H_*(\mathcal{O})$ et aux cofaces de $H_*(SO_d)$ par le lemme 3.5, au regard de l'équation 3.2, nous pouvons également fixer q_1 et q_2 tel que $q_1 + q_2 = q$ et se concentrer sur

$$H_{q_1}(\mathcal{O}(0)) \otimes (H_*(SO_d)^{\otimes 0})_{q_2} \rightrightarrows H_{q_1}(\mathcal{O}(1)) \otimes (H_*(SO_d)^{\otimes 1})_{q_2} \rightrightarrows H_{q_1}(\mathcal{O}(2)) \otimes (H_*(SO_d)^{\otimes 2})_{q_2} \dots \quad (3.5)$$

Comme les cofaces ∂^i sont exactement $\partial_{H_*(\mathcal{O})}^i \otimes \partial_{H_*(SO_d)}^i$, le produit des cofaces de $H_*(\mathcal{O})$ et $H_*(SO_d)$. Nous avons que l'espace vectoriel cosimplicial du diagramme 3.5 correspond exactement à la diagonale du bi-espace vectoriel cosimplicial

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} \vdots \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & H_{q_1}(\mathcal{O}(0)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 2})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 2})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(2)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 2})_{q_2} \dots \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & \uparrow & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \vdots \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & H_{q_1}(\mathcal{O}(0)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 1})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 1})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(2)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 1})_{q_2} \dots \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} & \uparrow & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \\
\begin{array}{c} \vdots \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} & H_{q_1}(\mathcal{O}(0)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 0})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 0})_{q_2} & \Longrightarrow & H_{q_1}(\mathcal{O}(2)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes 0})_{q_2} \dots
\end{array}
\tag{3.6}$$

où les cofaces horizontales sont de la forme $\partial_{H_*(\mathcal{O})}^i \otimes \mathrm{id}$ et les cofaces verticales $\mathrm{id} \otimes \partial_{H_*(\mathrm{SO}_d)}^i$.

Le théorème d'Eilenberg-Zilber (B.16) nous permet alors d'affirmer que l'homologie du complexe obtenu depuis 3.5 correspond à l'homologie du complexe total obtenu depuis le diagramme 3.6. Le complexe total dont nous parlons correspond à

$$\begin{array}{c}
\dots \longrightarrow \bigoplus_{p_1+p_2=p} H_{q_1}(\mathcal{O}(p_1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes p_2})_{q_2} \xrightarrow{D} \bigoplus_{p_1+p_2=p+1} H_{q_1}(\mathcal{O}(p_1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes p_2})_{q_2} \longrightarrow \dots
\end{array}
\tag{3.7}$$

avec différentielle

$$D = \sum_i \partial_{H_*(\mathcal{O})}^i \otimes \mathrm{id} + (-1)^{p_1} \sum_i \mathrm{id} \otimes \partial_{H_*(\mathrm{SO}_d)}^i = d^{H_*(\mathcal{O})} \otimes \mathrm{id} + (-1)^{p_1} \mathrm{id} \otimes d^{H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes \bullet}},$$

où $d^{H_*(\mathcal{O})}$ et $d^{H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes -}}$ sont les différentielles horizontales de $H_*(\mathcal{O})$ et $H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes -}$. On reconnaît alors, par définition (A.26), la différentielle induite sur le produit tensoriel de $H_{q_1}(\mathcal{O}(p_1)) \otimes (H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes p_2})_{q_2}$ en fonction des graduations p_1 et p_2 . Par le théorème de Kunneth généralisé (A.42), on conclut alors que l'homologie du complexe 3.7, correspond exactement, en degré p , à

$$\begin{aligned}
& \bigoplus_{p_1+p_2=p} H\left(H_{q_1}(\mathcal{O}(p_1)); d^{H_*(\mathcal{O})}\right) \otimes H\left((H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes p_2})_{q_2}; d^{H_*(\mathrm{SO}_d)^{\otimes -}}\right) \\
&= \bigoplus_{p_1+p_2=p} E_{p_1, q_1}^2(\mathcal{O}) \otimes H(\omega H_*(\mathrm{SO}_d)_{p_2, q_2})
\end{aligned}$$

En prenant la somme sur $q_1 + q_2 = q$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Regardons maintenant le cas où $\mathcal{O} = \mathcal{S}_d$, nous pouvons en réalité expliciter d'avantage les deux termes du lemme 3.8.

Commençons par regarder la composante de gauche

Lemme 3.9 (Composante gauche de $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$). *Pour chaque n ,*

$$\bigoplus_{q-p=n} E_{p,q}^2(\mathcal{S}_d) \cong H_n(\Omega^2(S^{d-1}))$$

Démonstration. Nous savons déjà que la suite spectrale associée à $\mathcal{S}_d$ respecte les hypothèses de Bousfield (voir 2.27), ce qui signifie que cette suite spectrale converge vers $H_*(\text{Tot}(\mathcal{S}_d^\bullet))$. Grâce à un résultat de Salvatore (corollaire 10 dans [22] ou lemme 2.1 dans [21]), nous savons que $H_*(\text{Tot}(\mathcal{S}_d^\bullet)) \cong H_*(\Omega^2(S_{d-1}))$.³ Explicitement, cela signifie que $\bigoplus_{p-q=n} E_{p,q}^\infty(\mathcal{S}_d) = H_n(\Omega^2(S^{d-1}))$.

En plus de la convergence de la suite spectrale de $\mathcal{S}_d$, nous savons également qu'elle est formelle (2.17), ce qui signifie notamment que la suite spectrale dégénère à la page deux (2.29). Nous obtenons donc pour chaque n , $\bigoplus_{q-p=n} E_{p,q}^2(\mathcal{S}_d) \cong H_n(\Omega^2(S^{d-1}))$. $\square$

Pour expliciter la composante de droite, il faut faire appel à un résultat de Adams [1], décrivant l'homologie d'un espace de lacets comme l'homologie de la construction cobar construite à partir des chaines singulières (ce qui est équivalent, par formalité, à la construction de la cobar à partir de l'homologie).

$$H(\omega C_*(X)) \cong H_*(\Omega X). \quad (3.8)$$

Cependant, le théorème d'Adams concerne les espaces X qui sont 1-connexe, ce qui n'est pas le cas de SO_d (car $\pi_1(\text{SO}_d) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Nous donnons, dans la démonstration du lemme suivant, une idée des étapes à suivre pour adapter le théorème d'Adams à notre situation, mais nous ne rentrerons pas dans les détails de la démonstration.

Lemme 3.10 (Composante droite de $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$). *Pour chaque n ,*

$$\bigoplus_{q-p=n} H(\omega H_*(\text{SO}_d)_{p,q}) \cong H_n(\Omega(\text{SO}_d)_1)$$

comme espace vectoriel gradué, où $\Omega(\text{SO}_d)_1$ est la composante connexe de $\Omega(\text{SO}_d)$ contenant le lacet constant.

Démonstration. (Esquisse) L'idée pour adapter le résultat de Adams (équation 3.8), consiste à considérer une *fibration* particulière de SO_d , faisant intervenir un groupe appelé $\text{Spin}(d)$ ([10], exercice 4, p291).

$$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow \text{Spin}(d) \xrightarrow{p} \text{SO}_d.$$

3. Ce résultat peut être vu comme une généralisation de l'exercice B.10 qui décrit déjà un lien entre $\text{Tot}(X^{\times \bullet})$ et $\Omega(X)$. Notons que $X^{\times \bullet}$ et $\mathcal{S}_d^\bullet$ partagent la caractéristique d'être constitués de produit d'un même espace.

Après avoir montré que le groupe $Spin(d)$ est formel (En tant que groupe de Lie (2.5)) et simplement connexe, nous pouvons alors appliquer le théorème d'Adams, dans une version homologique,

$$H(\omega H_*(Spin(d))) \cong H_*(\Omega(Spin(d))).$$

Il reste donc à montrer

1. $H_*(Spin(d); \mathbb{Q}) \cong H_*(SO_d; \mathbb{Q})$ comme coalgèbre.
2. $\Omega(Spin(d)) \simeq (\Omega SO_d)_1$.

Pour montrer le point 1, nous suggérons les travaux d'Armand Borel [3]. Pour montrer le point 2, nous suggérons d'étudier comment le morphisme p de la fibration, induit, sur les espaces de lacets, un morphisme $\Omega(p) : \Omega(Spin(d)) \rightarrow \Omega(SO_d)_1$ qui est une équivalence homotopique. Pour ce faire, il faut montrer (en utilisant le théorème de Whitehead, 4.5 dans [10]) que $\Omega(p)$ induit un isomorphisme entre chaque groupe d'homotopie. Ceci peut se déduire de techniques usuelles de topologie algébrique mais que nous n'avons pas développées ici (longue suite exacte de groupes d'homotopies issue d'une fibration, groupes d'homotopies des espaces de lacets). $\square$

Finalement, grâce à cette description et en utilisant les propositions du début de la section sur l'homologie de SO_d et $\Omega(SO_d)_1$ (3.1, 3.2), nous pouvons expliciter des générateurs de $E^2(\mathcal{S}_d)$.

Corollaire 3.11 (Générateurs de la deuxième page $E_2(f\mathcal{S}_d)$). *En considérant l'identification $E^2(f\mathcal{S}_d) \cong H_*(\Omega(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(SO_d)_1)$, la deuxième page de la suite spectrale liée à l'opérade des directions à repère est générée, comme algèbre, par*

$$x \otimes 1, \quad [x, x] \otimes 1, \quad 1 \otimes \gamma_2, \quad \dots, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-8}, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-4}.$$

avec le degré de x dans $H_n(\Omega(S^{d-1})) \otimes H_n(\Omega(SO_d)_1)$ qui est de $d-3$ (et donc $[x, x]$ est de degré $2(d-3)+1$).

Démonstration. Il faut mettre en commun les propositions 3.2 et 3.3. $\square$

3.1.1 Convergence pour l'opérade des directions à repère

Grâce à l'expression de la deuxième page de $f\mathcal{S}_d$ en fonction de celles de $\mathcal{S}_d$ et $SO_d^{\times \bullet}$, nous pouvons conclure à la convergence de $E(f\mathcal{S}_d)$.

Lemme 3.12 (L'opérade des directions à repères respecte les hypothèses de Bousfield). *La suite spectrale $E(f\mathcal{S}_d)$ respecte les hypothèses de Bousfield (2.24) Elle converge donc vers $Tot(f\mathcal{S}_d^\bullet)$.*

Démonstration. Nous savons, en combinant la proposition 3.8 et le lemme 3.7 que

$$E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d) = \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{S}_d) \otimes E_{p_2,q_2}^2(\mathrm{SO}_d^{\times\bullet}).$$

Nous savons que les deux membres de cette égalité respectent les hypothèses de Bousfield (2.27 et 2.28). En fait, nous savons même un peu plus que ça, nous pouvons montrer que $E_{p,q}^2(\mathcal{S}_d)$ et $E_{p,q}^2(\mathrm{SO}_d^{\times\bullet})$ sont également nulles lorsque $q = 0$ et $p \neq 0$.⁴

Regardons ce que vaut $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$ lorsque $q - p \leq 1$ (nous vérifions l'hypothèse 1). Nous avons alors

$$q - p = (q_1 - p_1) + (q_2 - p_2) \leq 1 \quad (3.9)$$

Ceci implique forcément que l'un des deux termes est plus petit que 1, notons le $q_i - p_i \leq 1$. Sachant que $E_{p_i,q_i}^2(\mathcal{S}_d) = 0 = E_{p_i,q_i}^2(\mathrm{SO}_d^{\times\bullet})$ quand $q_i - p_i \leq 1$ avec $p_i \neq 0$, alors le produit tensoriel s'annule aussi. Lorsque $p_i = 0$, quelle que soit la valeur de $q_1 \in \{0, 1\}$, l'autre terme dans l'équation 3.9 que nous noterons $q_j - p_j$ sera alors également plus petit que 1. Ceci permet de déterminer de la même manière que l'un des membres de $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$ est nul. (Et si $p_j = 0$, alors $p = p_i + p_j = 0$, et nous sommes alors dans la 0-ème colonne de $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$, qui correspond à l'homologie du point. Cette colonne ne posera donc pas de problèmes pour la vérification des hypothèses de Bousfield).

La deuxième hypothèse de Bousfield se vérifie de la même manière, en écrivant la condition $q < \delta p$ comme $q_1 + q_2 < \delta p_1 + \delta p_2$. $\square$

Maintenant que nous savons que $f\mathcal{S}_d$ converge, nous pouvons nous demander vers quel espace exactement. Ceci fait l'objet d'un résultat de Salvatore que nous ne démontrerons pas.

Lemme 3.13 (Totalisation de l'opérade des directions à repère, proposition 16 dans [22]). *Il y a une équivalence homotopique*

$$\mathrm{Tot}(f\mathcal{S}_d^\bullet) \simeq \Omega(\mathrm{SO}_{d-1})_1.$$

3.2 Non-formalité multiplicative

L'objectif de cette section est de montrer la non-formalité multiplicative de l'opérade de Kontsevich à repères pour d impair plus grand que 4. Cette section est une reformulation

4. Ce résultat est légèrement plus fort parce qu'il ne concerne plus $H^p(\tilde{H}_q(\mathcal{S}_d))$, mais il concerne plutôt $E_{p,q}^2 = H^p(H_q(\mathcal{S}_d))$ (sans l'homologie réduite). Pour le montrer, il faut regarder les dégénérescences de l'espace cosimplicial $H_0(\mathcal{S}_d)$, lorsque $q = 0$ donc. Comme dans la preuve de la proposition 2.27, ces dégénérescences correspondent à des projections qui s'expriment, en homologie, sous la forme de l'augmentation ϵ . Mais comme nous sommes en degré 0, l'intersection du noyau des dégénérescences sera alors triviale. L'homologie horizontale sera alors nulle, comme souhaité. Voir la démonstration de la preuve 2.27 pour une manipulation similaire de ces outils.

de la preuve de la deuxième partie du lemme 3.1 dans [21].

Pour parvenir à nos fins, nous allons montrer que la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à cette opérade ne dégénère pas en deuxième page (en utilisant ainsi la proposition 2.29). Pour montrer que la suite spectrale ne dégénère pas à la deuxième page, il suffit de montrer que la deuxième différentielle, d^2 n'est pas triviale. En effet, si $\text{Im}(d^2) \neq \{0\}$, prendre l'homologie par rapport à cette différentielle résultera forcément en un espace de rang strictement inférieur, pour autant que l'espace de départ soit finiment engendré. Dans notre cas, au regard de notre analyse de la section précédente, nous savons que $E_{p,q}^2(f\mathcal{O})$ est finiment engendré en chaque degré, pour $\mathcal{O} = \mathcal{K}_d$ ou $\mathcal{S}_d$. L'homologie étant de rang strictement inférieur, nous avons alors que $E^2(f\mathcal{O}) \not\cong E^3(f\mathcal{O})$, en d'autres termes, la suite spectrale ne dégénère pas.

Commençons cette discussion avec l'opérade des directions, nous en extrapolerons la non-formalité pour l'opérade de Kontsevich.

Nous savons, par la discussion de la section précédente (corollaire 3.11), que $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d) \cong H_n(\Omega(S^{d-1})) \otimes H_n(\Omega(\text{SO}_d)_1)$ est générés par

$$x \otimes 1, \quad [x, x] \otimes 1, \quad 1 \otimes \gamma_2, \quad \dots, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-8}, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-4}.$$

avec le degré de x dans $H_n(\Omega(S^{d-1}))$ qui est de $d-3$ (et donc $[x, x]$ est de degré $2(d-3)+1$, car le crochet de Gerstenhaber est une opération de degré 1, voir 1.37).

Avant de montrer la non-dégénérescence de la suite spectrale associée à $f\mathcal{S}_d$, il nous manque quelques ingrédients. Nous admettons ne pas être parvenu à les détailler de manière convaincante. Nous les énonçons dans le lemme suivant, et proposons ensuite une piste de démonstration. Nous mettrons en évidence les vérifications qu'il faudrait effectuer pour obtenir un raisonnement formel.

Notons que pour démontrer la plupart de ces faits, il faudrait comprendre plus en profondeur les isomorphismes des lemmes 3.9 et 3.10.

Lemme 3.14. *Considérons l'isomorphisme de la proposition 3.4,*

$$E^2(f\mathcal{S}_d) \cong E^2(\mathcal{S}_d) \otimes H(\omega H_*(\text{SO}_d)) \cong H_*(\Omega^2(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(\text{SO}_d)_1)$$

Alors

1. *La structure d'algèbre de $H_*(\Omega^2(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(\text{SO}_d)_1)$ munit $E^2(f\mathcal{S}_d)$ d'une structure de suite spectrale d'algèbre. La structure d'algèbre se transporte donc sur toutes les pages suivantes de la suite spectrale.*
2. *Les générateurs*

$$x \otimes 1, \quad [x, x] \otimes 1, \quad 1 \otimes \gamma_2, \quad \dots, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-8},$$

(c'est-à-dire tous sauf le dernier) correspondent à des cycles à chaque page de la suite spectrale.

3. L'élément $1 \otimes \gamma_{2d-4}$ correspond à $[\beta_{2d-3}]$, vu comme un élément de $H_*(\omega H_*(SO_d))$ en bidegré $(1, 2d-3)$.

L'élément $1 \otimes [x, x]$ correspond à un élément de bidegré $(3, 2d-2)$ à travers l'isomorphisme.

Démonstration. (Esquisse) 1) Deux faits sont à montrer. D'une part, il faut montrer que la structure d'algèbre induite sur $E^2(f\mathcal{S}_d)$ est compatible avec la différentielle d^2 . D'autre part, il faut vérifier le résultat plus général que si cette structure est compatible avec la différentielle d^2 , elle le sera pour toutes les différentielles suivantes d^r .

2) Il faut considérer le diagramme

$$\mathcal{S}_d^\bullet \xrightarrow{f} f\mathcal{S}_d^\bullet \xleftarrow{g} (SO_{d-1})^{\times \bullet}$$

caractérisé sur les éléments par

$$f(\vec{x}) = (\vec{x}, 1, \dots, 1) \quad g(M_1, \dots, M_k) = (\vec{v}_0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix})$$

où $\vec{v}_0 = (v_0, \dots, v_0)$, avec $v_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^{d-1}$. Ce diagramme produit un diagramme de suites spectrales

$$E_{p,q}^r(\mathcal{S}_d) \longrightarrow E_{p,q}^r(f\mathcal{S}_d) \longleftarrow E_{p,q}^r((SO_{d-1})^{\times \bullet})$$

Par la discussion de la section précédente nous indique que les suites spectrales des extrémités sont convergentes et dégénérantes. Nous obtenons alors le diagramme, pour $r \geq 2$

$$H_*(\Omega^2(S^{d-1})) \longrightarrow E_{p,q}^r(f\mathcal{S}_d) \longleftarrow H_*(\Omega(SO_{d-1})_1)$$

En page deux, les générateurs de $H_*(\Omega^2(S^{d-1}))$ correspondent bien à $x \otimes 1$ et $[x, x] \otimes 1$, au vue de la définition du morphisme f . Ainsi, comme le morphisme induit par f envoie des cycles sur des cycles à toutes les pages, $x \otimes 1$ et $[x, x] \otimes 1$ induiront bien des cycles à toutes les pages.

La difficulté provient de l'autre terme. Il faut montrer que les générateurs de $H_*(\Omega(SO_{d-1})_1)$ sont envoyés, via le morphisme induit par g , sur les générateurs correspondants dans $1 \otimes H_*(\Omega(SO_d)_1)$. Cette observation nécessite en réalité de comprendre en profondeur l'isomorphisme du lemme 3.13, qui est justement en lien avec le morphisme g que nous avons défini. Nous n'avons pas réussi, pour l'instant, à prouver cette correspondance en détail.

3) Notons d'abord que β_{2d-3} , vu comme un élément de $\omega H_*(SO_d)$ en bidegré $(1, 2d-3)$ est bien un cycle pour la différentielle de $\omega H_*(SO_d)$. Ceci suit du fait que β_{2d-3} est

primitif (3.1), nous pouvons alors calculer

$$d(\beta_{2d-3}) = \partial^0(\beta_{2d-3}) - \partial^1(\beta_{2d-3}) + \partial^3(\beta_{2d-3}) = [1] \otimes \beta_{2d-3} - H_*(\Delta)(\beta_{2d-3}) + \beta_{2d-3} \otimes [1] = 0.$$

Pour montrer que $1 \otimes \gamma_{2d-4}$ correspond à $[\beta_{2d-3}]$, l'idée serait d'utiliser un argument de degré. Si nous supposons que l'isomorphisme $H(\omega H_*(SO_d)) \cong H_*(\Omega(SO_d)_1)$ est d'algèbre, on montre par récurrence sur les générateurs, que chaque $[\beta_{4i-1}]$, vu comme un élément $H(\omega H_*(SO_d)_{p,q})$ en bidegré $(1, 4i - 1)$ sera envoyé sur γ_{i-1} . Plus précisément, pour $[\beta_3]$, on constate que son degré total est 2, donc γ_2 est le seul candidat. Pour $[\beta_{4i-1}]$, de degré total est $4i - 2$, le seul candidat restant à travers l'isomorphisme est alors γ_{4i-2} , parce que tous les multiples des γ_j précédents correspondent à des multiples de β_j par hypothèse de récurrence. Ce raisonnement repose cependant sur la structure d'algèbre de $\omega(H_*(SO_d))$, qui reste à être explicitée.

Expliquons maintenant pourquoi l'élément $1 \otimes [x, x]$ correspond à un élément de bidegré $(3, 2d - 2)$ à travers l'isomorphisme. L'idée est de considérer une opération que l'on peut mettre sur $E^2(\mathcal{S}_d)$. Il s'agit d'un crochet, qui est lié à une structure de complexe d'Hochschild sur l'homologie d'une opérade de chaînes (voir [25], section 3). Il nous faudrait alors une meilleure compréhension de l'isomorphisme du lemme 3.9 afin de mettre en relation ce crochet de Hochschild sur $E^2(\mathcal{S}_d)$ et le crochet de Gerstenhaber sur $H_*(\Omega^2(S^{d-1}))$. Une fois cette correspondance ancrée, il suffirait alors de montrer que le générateur $a \in H(H_{d-1}(\mathcal{S}_d(2)))$ (correspondant à la classe d'homologie de la sphère) correspond au générateur x de $H_*(\Omega^2(S^{d-1}))$ (ce qui suit d'un argument de degré, comme ce sont des générateurs de degré minimal). Nous avons alors ensuite que $[x, x]$ correspondrait à $[a, a]$, qui a un bidegré de $(3, 2d - 3)$ (au regard de la définition du crochet de Hochschild, une fois explicitée). $\square$

Nous allons maintenant montrer que la différentielle est non-triviale.

Lemme 3.15 (Non trivialité de la différentielle à la deuxième page, lemme 3.1 dans [21]). *Soit $E(f\mathcal{S}_d)$ la suite spectrale de Bousfield-Kan associée à l'opérade des paires.*

- *Sous l'identification $E^2(f\mathcal{S}_d) \cong H_*(\Omega^2(S^{d-1})) \otimes H_*(\Omega(SO_d)_1)$ et avec les notations précédemment introduites*

$$d^2(1 \otimes \gamma_{2d-4}) = \lambda \cdot [x, x] \otimes 1, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{Q}.$$

- *Sous l'identification $E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d) \cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{S}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2})$, l'image à travers la différentielle de $1 \otimes [\beta_{2d-3}]$ est non nulle.*

Démonstration. (reformulation de la preuve du lemme 3.1 dans [21])

La **première étape** consiste à chercher un antécédent pour $[x, x] \otimes 1 \in E_{p,q}^2(f\mathcal{S}_d)$. Pour ce faire, rappelons que $E^r(f\mathcal{S}_d)$ définit une suite spectrale convergente vers $\Omega(SO_{d-1})_1$ (voir lemmes 3.12 et 3.13). On observe alors grâce à la proposition 3.2 que tous les

générateurs de $\Omega(\mathrm{SO}_{d-1})_1$ sont de degré pair. Comme $[x, x] \otimes 1$ est un cycle à toutes les pages (3.14; 2) de degré impair $(2d - 5)$, cela signifie que dans le passage entre deux pages de la suite spectrale, à un moment, $[x, x] \otimes 1$ (ou l'élément qui lui correspond en homologie) est un bord pour une certaine différentielle d^r . En d'autres mots, il existe $y \in E_{p,q}^r(f\mathcal{S}_d)$ tel que

$$d^r(y) = [x, x] \otimes 1. \quad (3.10)$$

pour $r \geq 2$. Ceci conclut la première étape.

La **deuxième étape** consiste à montrer que $y = \lambda \cdot 1 \otimes \gamma_{2d-4}$. Pour ce faire, nous savons que la page 2 est générée, comme algèbre différentielle graduée, par les éléments

$$x \otimes 1, \quad [x, x] \otimes 1, \quad 1 \otimes \gamma_2, \quad \dots, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-8}, \quad 1 \otimes \gamma_{2d-4}.$$

Comme les pages suivantes sont également générées, comme algèbre différentielle graduée, par ces éléments (3.14; 1), y s'écrit comme un polynôme de tous ces éléments.

Remarquons néanmoins que dans cette écriture polynomiale de y , il n'y a pas de termes croisés avec $1 \otimes \gamma_{2d-4}$. En effet, comme y est envoyé sur un élément de degré total $2d - 5$, il est lui-même de degré $2d - 4$, or, tout terme croisé avec $1 \otimes \gamma_{2d-4}$ a un degré total strictement supérieur à $2d - 4$. Nous pouvons donc écrire

$$y = \lambda \cdot 1 \otimes \gamma_{2d-4} + y_2 \quad (3.11)$$

où y_2 est un polynôme en tous les autres générateurs sauf $1 \otimes \gamma_{2d-4}$. Comme chacun de ces générateurs est un cycle (3.14; 2), y_2 est un cycle (on le vérifie avec la formule de Leibniz A.27) nous avons alors bien, à la lumière des équations 3.10 et 3.11, que

$$\lambda \cdot d^r(1 \otimes \gamma_{2d-4}) = d^r(y) = [x, x] \otimes 1.$$

La **troisième et dernière étape** de la preuve consiste alors à montrer que cette égalité a lieu dans la page 2. Pour ce faire, nous constatons que le bidegré de $1 \otimes \gamma_{2d-4}$ est $(1, 2d-3)$ et celui de $[x, x] \otimes 1$ est $(3, 2d-2)$ (3.14; 3). Cela veut donc dire que la différentielle est de bidegré $(2, 1)$, ce qui correspond exactement à la deuxième différentielle (voir C.6). Ceci clôture la troisième étape, et donc la preuve.

Notons que le deuxième point de l'énoncé suit directement du premier en utilisant 3.14; 3. □

Corollaire 3.16 (Non-trivialité de la différentielle de $E_2(\mathcal{K}_d)$, lemme 3.1 dans [21]). *Sous l'identification $E_{p,q}^2(f\mathcal{K}_d) \cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{K}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2})$, l'image à travers la différentielle de $1 \otimes [\beta_{2d-3}] \in E_{1,2d-3}^2(f\mathcal{K}_d)$ (voir 3.14) est non nulle.*

Démonstration. Nous déduisons ceci de la proposition correspondante pour $\mathcal{S}_d$. Considérons l'inclusion $\iota : \mathcal{K}_d \hookrightarrow \mathcal{S}_d$ qui définit l'opérade de Kontsevich (1.16). Nous avons

alors une inclusion $f\mathcal{K}_d \xrightarrow{\iota \times \text{id}} f\mathcal{S}_d$ et un morphisme de suites spectrales induit entre les deuxièmes pages

$$E_2(f\mathcal{K}_d) \xrightarrow{E_2(\iota \times \text{id})} E_2(f\mathcal{S}_d)$$

Nous considérons alors la décomposition réalisée à la section précédente (proposition 3.4) :

$$E_{p,q}^2(f\mathcal{O}_d) \cong \bigoplus_{\substack{p_1+p_2=p \\ q_1+q_2=q}} E_{p_1,q_1}^2(\mathcal{O}_d) \otimes H((\omega H_*(SO_d))_{p_2,q_2}).$$

En utilisant le caractère monoïdal du morphisme de Kunneth ainsi que la naturalité du théorème d'Eilenberg-Zilber utilisé dans la démonstration de cet isomorphisme, nous constatons que le morphisme $E^2(\iota \times \text{id})$ peut s'écrire comme $E^2(\iota) \otimes \text{id}$.

Cela implique notamment que l'élément $1 \otimes [\beta_{2d-3}] \in E^2(f\mathcal{K}_d)$ correspond exactement à l'élément $1 \otimes [\beta_{2d-1}] \in E^2(f\mathcal{S}_d)$ du lemme 3.15. Comme $E^2(\iota) \otimes \text{id}$ est entre autres un morphisme de complexes différentiels, si $1 \otimes [\beta_{2d-3}]$ a une image non-nulle à travers la différentielle dans $E^2(f\mathcal{S}_d)$, il en sera de même pour $1 \otimes [\beta_{2d-2}]$ dans $E^2(f\mathcal{K}_d)$.

$$\begin{array}{ccc} E^2(f\mathcal{S}_d) : & 1 \otimes [\beta_{2d-3}] & \xrightarrow{d^2} \neq 0 \\ & \uparrow E^2(\iota) \otimes \text{id} & \uparrow E^2(\iota) \otimes \text{id} \\ E^2(f\mathcal{K}_d) : & 1 \otimes [\beta_{2d-3}] & \xrightarrow{d^2} \neq 0 \end{array}$$

□

Corollaire 3.17 (Non-formalité multiplicative de $f\mathcal{K}_d$). *Pour $d > 4$ impair, l'opérade de Kontsevich à repère n'est pas multiplicativement formelle.*

Démonstration. Nous savons que si $f\mathcal{K}_d$ était multiplicativement formelle, alors, la suite spectrale dégénérerait à la deuxième page (2.29). Or, nous savons qu'il existe un bord non-triviale dans $E^2(f\mathcal{K}_d)$ par le corollaire 3.16. Cela signifie que la troisième page, qui est par définition l'homologie de la deuxième page, aura un rang strictement inférieur à la page $E^2(f\mathcal{K}_d)$. Elles ne pourront donc pas être isomorphes, contredisant la dégénérescence et donc la formalité multiplicative. □

3.3 Obstruction à la formalité opéradique

Nous savons que l'opérade de Kontsevich à repère n'est multiplicativement pas formelle. Nous montrons, dans cette section, qu'elle n'est non plus pas formelle dans un sens non-multiplicatif. Pour ce faire, nous définissons, comme dans [21], une *obstruction*, jouant le même rôle que le produit de Massey introduit à la section 2.1.2. Il est toutefois crucial de remarquer que l'obstruction que nous définirons n'est pas tout à fait indépendante par rapport aux choix des représentants. Cette subtilité rajoute une difficulté supplémentaire.

En effet, comme nous l'avons fait remarquer, l'indépendance du choix de représentant était un élément crucial de la preuve de 2.12, affirmant que tous les produits de Massy étaient nuls dans un espace formel.

Commençons par définir l'obstruction, à mettre en parallèle avec la définition 2.9 du produit de Massy.

Définition 3.18 (Obstruction à la formalité, définition 4.1 dans [21]). *Soit $\mathcal{O}$ une opérade de chaînes dont l'homologie est isomorphe à $H_*(f\mathcal{K}_d)$. Considérons deux cycles $\nu \in \mathcal{O}(2)_0$ et $g \in \mathcal{O}(1)_{2d-3}$ tels que*

1. $[\nu \circ_2 \nu - \nu \circ_1 \nu] = [0] \in H_0(\mathcal{O}(2))$
2. $[\nu \circ_2 g + \nu \circ_1 g - g \circ_1 \nu] = [0] \in H_{2d-3}(\mathcal{O}(2)).$

En choisissant $\xi \in \mathcal{O}(3)_1$ et $h \in \mathcal{O}(2)_{2d-2}$, tel que

$$d(\xi) = \nu \circ_2 \nu - \nu \circ_1 \nu \quad \text{et} \quad d(h) = \nu \circ_2 g + \nu \circ_1 g - g \circ_1 \nu$$

*on définit l'**obstruction** comme étant*

$$\omega(\nu, g, h, \xi) := \omega_1 - \omega_2 \in \mathcal{O}(3)_{2d-2} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \omega_1 &:= \nu \circ_2 h - h \circ_1 \nu + h \circ_2 \nu - \nu \circ_1 h \\ \omega_2 &:= g \circ_1 \xi + \xi \circ_1 g + \xi \circ_2 g + \xi \circ_3 g. \end{aligned}$$

A la différence du produit de Massey, nous avons directement défini $\omega(\nu, g, h, \xi)$ en fonction des cycles ν et g plutôt que leur classe d'homologie $[\nu]$ et $[g]$. Ce détail témoigne du fait que l'obstruction dépend, à priori, de ν et g .

Les deux lemmes suivants sont à mettre en correspondance directe avec les lemmes 2.10 et 2.11 relatifs au produit de Massey.

Lemme 3.19 (L'obstruction est un cycle). *Soient ν et g comme dans la définition précédente, alors $d(\omega(\nu, g, h, \xi)) = 0$, pour la différentielle interne de $\mathcal{O}$.*

Démonstration. (comme dans [21]) Nous allons montrer que $d\omega_1 = d\omega_2$. Rappelons que $\circ_i$ doit être pensée comme un morphisme de $\mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(k)$ vers $\mathcal{O}(n+k-1)$ où la différentielle du produit tensoriel est définie en A.26.

Commençons par calculer $d(\omega_1)$. Pour ce faire, nous utilisons le fait que la composition commute avec la différentielle (en tant que morphisme de chaînes), et que ν est un cycle (de degré 0),

$$d(\omega_1) = (-1)^{|\nu|} \nu \circ_2 dh - dh \circ_1 \nu + dh \circ_2 \nu - (-1)^{|\nu|} \nu \circ_1 dh.$$

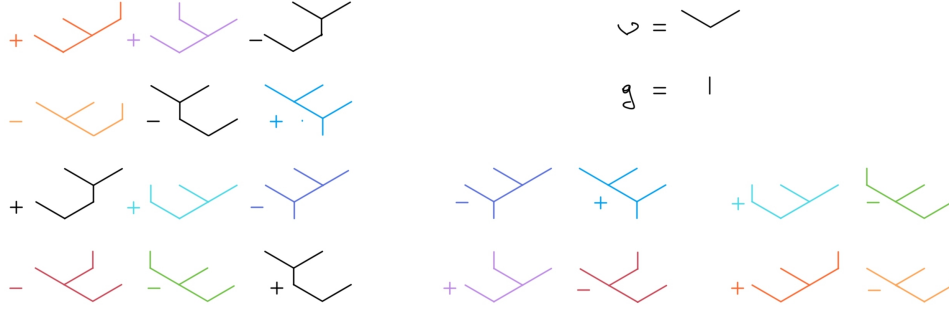


FIGURE 3.1 – A gauche, $d\omega_1$, à droite, $d\omega_2$.

Par définition $dh = \nu \circ_2 g + \nu \circ_1 g - g \circ_1 \nu$, on trouve alors par linéarité

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 = & + \nu \circ_2 (\nu \circ_2 g) + \nu \circ_2 (\nu \circ_1 g) - \nu \circ_2 (g \circ_1 \nu) \\
 & - (\nu \circ_2 g) \circ_1 \nu - (\nu \circ_1 g) \circ_1 \nu + (g \circ_1 \nu) \circ_1 \nu \\
 & + (\nu \circ_2 g) \circ_2 \nu + (\nu \circ_1 g) \circ_2 \nu - (g \circ_1 \nu) \circ_2 \nu \\
 & - \nu \circ_1 (\nu \circ_2 g) - \nu \circ_1 (\nu \circ_1 g) + \nu \circ_1 (g \circ_1 \nu).
 \end{aligned}$$

Similairement, on calcule

$$\begin{aligned}
 d\omega_2 = & (-1)^{|g|} g \circ_1 d\xi + d\xi \circ_1 g + d\xi \circ_2 g + d\xi \circ_3 g \\
 = & -g \circ_1 (\nu \circ_2 \nu) + g \circ_1 (\nu \circ_1 \nu) + (\nu \circ_2 \nu) \circ_1 g - (\nu \circ_1 \nu) \circ_1 g \\
 & + (\nu \circ_2 \nu) \circ_2 g - (\nu \circ_1 \nu) \circ_2 g + (\nu \circ_2 \nu) \circ_3 g - (\nu \circ_1 \nu) \circ_3 g
 \end{aligned}$$

On montre alors, grâce à l'axiome d'associativité des opérades, que ces deux expressions sont les mêmes. Une manière efficace de s'en convaincre est de représenter chaque opération comme un arbre à la manière de l'exemple 1.5, voir figure 3.1. $\square$

Lemme 3.20 (Indépendance (partielle) du choix de représentant). *Avec les notations de la définition 3.18, la classe d'homologie de $\omega(\nu, g, h, \xi)$ est indépendante du choix de h et ξ quand regardée dans le quotient*

$$\frac{H_{2d-2}(\mathcal{O}(3))}{\text{Im}(\delta_\nu)}$$

où δ_ν est défini comme⁵

$$\begin{aligned} \delta_{[\nu]} : H(\mathcal{O}(n)) &\longrightarrow H(\mathcal{O}(n+1)) \\ [x] &\longmapsto \left[\nu \circ_2 x + \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i x \circ_i \nu \right) + (-1)^{n+1} \nu \circ_1 x \right]. \end{aligned}$$

Démonstration. (preuve issue de [21]) Souvenons-nous que par définition de composition dans l'homologie d'une opérade (1.27), nous avons, en vertu du théorème de Kunneth généralisé (A.42), $[x] \circ_i [y] = [x \circ_i y]$ pour x et y des cycles dans $\mathcal{O}$. Ceci montre déjà que la définition de $\delta_{[\nu]}$ est indépendante du choix de représentant pour $[x]$ ou $[\nu]$.

Montrons d'abord l'indépendance dans le choix de h . Pour ce faire, prenons $h, h' \in \mathcal{O}(2)_{2d-2}$ tel que $d(h) = \nu \circ_2 g + \nu \circ_1 g - g \circ_1 \nu = d(h')$. On observe alors que

$$\begin{aligned} [\omega(\nu, g, h, \xi)] - [\omega(\nu, g, h', \xi)] &= [\nu \circ_2 (h - h') - (h - h') \circ_1 \nu + (h - h') \circ_2 \nu - \nu \circ_1 (h - h')] \\ &= \delta_{[\nu]}([h - h']) \in \text{Im}(\delta_{[\nu]}). \end{aligned}$$

où la dernière égalité a du sens parce que $h - h'$ est bien un cycle.

Concernant l'indépendance dans le choix de ξ maintenant. Prenons $\xi, \xi' \in \mathcal{O}(3)_1$ tel que $d(\xi) = \nu \circ_2 \nu - \nu \circ_1 \nu = d(\xi')$. Nous allons montrer que $\omega(\nu, g, h, \xi) - \omega(\nu, g, h, \xi')$ est un bord pour la différentielle interne de $\mathcal{O}$, concluant ainsi la preuve. Pour ce faire, remarquons que $\xi - \xi'$ est un cycle, et donc un bord, parce que $\mathcal{O}$ est exacte en degré 1. En effet, nous savons que

$$H(\mathcal{O}(3)) \cong H_*(f\mathcal{K}(3)) \cong H_*(\mathcal{K}_d(3)) \otimes H_*(\text{SO}_d)^{\otimes 3},$$

or, il n'y a pas de générateurs de degré 1 ni dans $H_*(\mathcal{K}_d)(3)$,⁶ ni dans $H_*(\text{SO}_d)$ (3.1), montrant ainsi que $H_1(\mathcal{O}(3))$ est nul. Maintenant que nous savons que $\xi - \xi' = d(z)$ est un bord, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \omega(\nu, g, h, \xi) - \omega(\nu, g, h, \xi') &= g \circ_1 (\xi - \xi') + (\xi - \xi') \circ_1 g + (\xi - \xi') \circ_2 g + (\xi - \xi') \circ_3 g \\ &= g \circ_1 dz + dz \circ_1 g + dz \circ_2 g + dz \circ_3 g \\ &= d\left((-1)^{|g|} g \circ_1 z + z \circ_1 g + z \circ_2 g + z \circ_3 g\right). \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $[\omega(\nu, g, h, \xi)] = [\omega(\nu, g, h, \xi')]$ dans $H(\mathcal{O})$, comme souhaité. $\square$

5. Intuition sur $\delta_{[\nu]}$: si $\nu \in \mathcal{O}(2)_0$ représente une multiplication pour une opérade multiplicative, dans ce cas, $\delta_{[\nu]}$ correspond à la différentielle horizontale du bicomplexe créé à partir de l'opérade $\mathcal{O}$, à travers l'homologie. Ceci correspond également à la différentielle de la première page de la suite spectrale (au signe près).

6. L'homologie de $\mathcal{K}_d$ peut être calculée explicitement en calculant l'homologie de l'espace des configurations, qui lui est homotopiquement équivalent (1.17). L'une des techniques pour calculer cette homologie est de considérer une fibration particulière entre les espaces de configurations et d'utiliser le théorème de Laurey-Hirsch qui permet de calculer l'homologie de fibrations. Voir [12], section 2.

Grâce à ce lemme, nous noterons parfois $\omega(\nu, g)$ à la place de $\omega(\nu, g, h, \xi)$.

Avant de montrer que cette obstruction constitue bien une obstruction à la formalité opéradique, commençons par montrer qu'il existe bien, dans $C_*(f\mathcal{K})_d$, un tel $\omega(\nu, g)$ qui est non nul.

Nous allons prendre $\nu \in C_*(f\mathcal{K}_d(2))$ issu du caractère multiplicatif de $f(\mathcal{K}_d)$ (1.30). Pour choisir l'élément g , souvenons-nous que $f\mathcal{K}_{2d-3}(1) \cong (\mathrm{SO}_d)$ par définition.

Proposition 3.21 (Existence d'une obstruction non nulle). *Soit $\nu \in C_0(f\mathcal{K}_d(2))$ issu de la structure multiplicative et $g \in C_{2d-3}(f\mathcal{K}(1)) \cong C_{2d-3}(\mathrm{SO}_d)$ n'importe quel élément tel que $[g] = \beta_{2d-3} \in H_{2d-3}(\mathrm{SO}_d)$, où β_{2d-3} est l'élément de la proposition 3.1. Alors*

(i) ν et g respectent les conditions de la définition 3.18

(ii)

$$[\omega(\nu, g)] \neq 0 \quad \text{dans le quotient} \quad \frac{H_{2d-2}(f\mathcal{K}_d(3))}{\mathrm{Im}(\delta_{[\nu]})}$$

Démonstration. (reformulation de [21]) D'abord, vérifions les conditions de la définition 3.18.

1. Nous avons choisi ν comme l'image de $1 \in \mathbb{Q}$ à travers le morphisme multiplicatif $\mathcal{A}ss(2) \xrightarrow{\varphi_2} C_*(f\mathcal{K}_d(2))$, par conséquent, $\nu \circ_2 \nu$ tout comme $\nu \circ_1 \nu$ doivent correspondre à l'image de $1 \in \mathbb{Q}$ à travers φ_3

$$\nu \circ_i \nu = \varphi_2(1) \circ_i \varphi_2(1) = \varphi(1 \circ_i 1) = \varphi_3(1)$$

Nous avons alors forcément que $\nu \circ_2 \nu - \nu \circ_1 \nu = 0$.

2. Considérons $\mu := (v_0, 1, 1) \in f\mathcal{K}_d(2)$ l'élément rendant l'opérade de Kontsevich à repère multiplicative (voir 1.19). L'astuce consiste à mettre en évidence deux manières de construire l'élément $x = (yv_0, y, y) \in f\mathcal{K}_d(2)$ en partant d'un $y \in \mathrm{SO}_d$. Nous avons le premier procédé, qui consiste en

$$\mathrm{SO}_d \xrightarrow{a} f\mathcal{K}_d(1) \xrightarrow{b} f\mathcal{K}_d(2) \tag{3.12}$$

$$y \longmapsto (\{*\}, y) \longmapsto (\{*\}, y) \circ \mu.$$

Par définition de multiplication dans le produit semi-direct $f\mathcal{K}_d$ (1.20), nous obtenons bien $(\{*\}, y) \circ \mu = (yv_0, y, y)$.

D'un autre côté, nous avons une deuxième manière de faire, qui consiste à considérer la composition

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{SO}_d & \xrightarrow{\Delta_3} & \mathrm{SO}_d \times \mathrm{SO}_d \times \mathrm{SO}_d \xrightarrow{\cong} \mathrm{SO}_d \times f\mathcal{K}_d(1) \times f\mathcal{K}_d(1) \\
& & \downarrow \alpha_{(-)}(v_0) \times \mathrm{id} \times \mathrm{id} \\
& & \mathcal{K}_d(2) \times f\mathcal{K}_d(1) \times f\mathcal{K}_d(1) \\
& & \downarrow i \times \mathrm{id} \times \mathrm{id} \\
f\mathcal{K}_d(2) & \xleftarrow{\circ} & f\mathcal{K}_d(2) \times f\mathcal{K}_d(1) \times f\mathcal{K}_d(1)
\end{array} \tag{3.13}$$

où Δ_3 est la diagonale topologique, α l'action de SO_d sur $\mathcal{K}_d(2)$ et i l'inclusion en ajoutant l'unité de SO_d . Concrètement, à travers cette composition, y donne l'élément $(yv_0, 1, 1) \circ (\{*\}, y)$, $(\{*\}, y) = (yv_0, y, y)$.

L'idée est alors d'envoyer ces deux diagrammes, 3.12 et 3.13, qui commutent l'un avec l'autre, à travers le foncteur d'homologie. Prenons $\beta := \beta_{2d-3} \in H_*(\mathrm{SO}_d)$ et voyons à quoi il correspond, à travers les morphismes du diagramme 3.13, à conjugaison d'isomorphisme de Kunneth près.

Comme β est primitif (3.1), nous savons que

$$H_*(\Delta)(\beta) = \beta \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \beta \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \beta.$$

On applique ensuite $H(\alpha_{(-)}(v_0)) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ pour obtenir $0 + [v_0] \otimes \beta \otimes 1 + [v_0] \otimes 1 \otimes \beta$ où v_0 est vu comme le simplexe en degré 0. Pour le premier terme, notons que β est envoyé sur un élément de degré $2d - 3$ dans $H_{2d-3}(\mathcal{K}(2)) \cong H_{2d-3}(S^{d-1}) = 0$.

Appliquer $H(i) \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}$ permet d'obtenir $[\nu] \otimes \beta \otimes 1 + [\nu] \otimes 1 \otimes \beta$ ce qui correspond exactement, par définition, à $[\nu] \circ_1 \beta + [\nu] \circ_2 \beta$.

En envoyant le même β à travers le diagramme 3.12 vu en homologie, on obtient exactement, $\beta \circ_1 [\nu]$, par définition de composition et de l'élément multiplicatif ($[\nu]$ correspond bien à μ , par la proposition 1.30 notamment).

La commutativité entre les deux diagrammes implique donc bien, avec $\beta = [g]$, que

$$[\nu] \circ_1 [g] + [\nu] \circ_2 [g] = [g] \circ_1 [\nu].$$

Maintenant que nous avons vérifié les deux conditions de la définition, il nous reste à montrer que $[\omega(\nu, g)]$ est non nul dans le quotient. Pour ce faire, remarquons d'abord que l'on peut, par définition, voir $[\omega(\nu, g)]$ et $[g]$ comme des éléments de $E_{3,2d-2}^1(f\mathcal{K}_d)$ et $E_{1,2d-3}^1(f\mathcal{K}_d)$ respectivement. Remarquons que la différentielle d^1 de cette suite spectrale, qui correspond à la différentielle horizontale (C.4), n'est autre que $\delta_{[\nu]}$. Nous pouvons donc voir la page $E_{3,2d-2}^2(f\mathcal{K}_d) = \frac{\ker(d_{[\nu]})}{\mathrm{Im}(d_{[\nu]})}$ comme un sous-espace vectoriel du quotient $\frac{H_{2d-2}(\mathcal{K}_d(3))}{\mathrm{Im}(\delta_{[\nu]})}$. La condition 2 que nous venons de vérifier, implique notamment que $[g]$

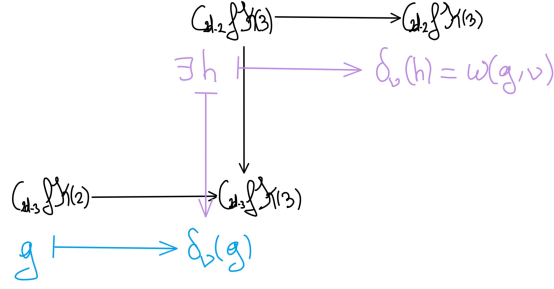


FIGURE 3.2 – Calcul de l'image de $[[g]]$ par la deuxième différentielle de la suite spectrale.

est un cycle pour cette différentielle d^1 . Nous pouvons donc considérer la double classe d'équivalence $[[g]] \in E_{1,2d-3}^2(f\mathcal{K}_d)$.

Au regard de la définition de la deuxième différentielle (lemme C.5), en choisissant $\xi = 0$ et h tel que $d(h) = \nu \circ_2 g + \nu \circ_1 g - g \circ_1 \nu$, on trouve que

$$d^2([[g]]) = [[\delta_\nu(h)]] = [[\omega(g, \nu)]],$$

voir la comparaison des figures 3.2 et C.5.

Il reste à montrer que $d^2([[g]]) \neq 0$. Pour ce faire, notons qu'à travers l'isomorphisme de la proposition 3.4, $[[g]] = [\beta_{2d-3}]$ correspond à $1 \otimes [\beta_{2d-3}]$ (tous les termes de la somme directe sont nuls sauf le terme $\mathbb{Q} \otimes H(H_{2d-3}(\mathrm{SO}_d))$ correspondant à $p_1 = 0, p_2 = 1, q_1 = 0$ et $q_2 = 2d - 3$). Nous concluons que $d^2(1 \otimes [\beta_{2d-3}]) \neq 0$ grâce au corollaire 3.16. $\square$

Nous avons été capable d'identifier une obstruction non nulle. On sait aussi par ailleurs que toutes les obstructions, dans $H_*(f\mathcal{K}_d)$ sont nulles, en choisissant $\xi = 0 = h$. Il nous reste à trouver un moyen de transporter les obstructions à travers un zigzag pour répliquer la preuve de la proposition 2.12, décrivant le produit de Massey comme une obstruction à la formalité. Dans la preuve de 2.12 cependant, l'indépendance du choix de représentant a été cruciale pour pallier la non-surjectivité de certains éléments dans le zigzag. Comme nous n'avons pas ici l'indépendance en termes de g et ν , nous devons trouver un autre moyen.

Pour pallier cette difficulté, il est possible de s'appuyer sur la théorie des catégories modèles. Cette dernière peut être vue comme une généralisation des propriétés de relèvements homotopiques. En fait, grâce à la théorie des catégories modèles appliquée au contexte des opérades, il est possible de raccourcir considérablement la taille de n'importe quel zigzag (grâce à des propriétés de relèvements). Appliqué à notre contexte des opérades, nous obtenons le lemme suivant, pour lequel nous ne donnerons pas de démonstrations, par manque d'outils introduit dans ce document.

Lemme 3.22 (Réduction de la taille d'un zigzag). *S'il existe un zigzag d'équivalences faibles entre les opérades $C_*(f\mathcal{K}_d)$ et $H_*(f\mathcal{K}_d)$,*

$$C_*(f\mathcal{K}_d) \xleftarrow{\simeq} \mathcal{O}_1 \xrightarrow{\simeq} \dots \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_k \xleftarrow{\simeq} H_*(f\mathcal{K}_d).$$

Alors, il existe un diagramme

$$C_*(f\mathcal{K}_d) \xleftarrow[\simeq]{p} \mathcal{P} \xrightarrow[\simeq]{q} H_*(f\mathcal{K}_d).$$

où chaque composante de p est une surjection.

Démonstration. Voir [21], dans la preuve du théorème 2.3. □

Avec ce lemme en main nous pouvons conclure à la non-formalité de l'opérade de Kontsevich.

Théorème 3.23 (Non-formalité de l'opérade de Kontsevich à repères). *Pour $d > 4$ impair, l'opérade de Kontsevich à repères, $f\mathcal{K}_d$ n'est pas formelle*

Démonstration. (reformulation de la preuve du théorème 2.3 dans [21]) Étant donné un zigzag d'équivalences faibles entre les opérades $C_*(f\mathcal{K}_d)$ et $H_*(f\mathcal{K}_d)$, nous commençons par le réduire grâce au lemme 3.22.

$$C_*(f\mathcal{K}_d) \xleftarrow[\simeq]{p} \mathcal{P} \xrightarrow[\simeq]{q} H_*(f\mathcal{K}_d).$$

Par surjectivité de p , prenons $\nu' \in \mathcal{P}(2)_0$ tel que $p(\nu') = \nu \in f\mathcal{K}(2)_0$, où ν est l'élément issu de la structure multiplicative de $f\mathcal{K}$. Remarquons que comme ν' est de degré 0, c'est directement un cycle.

Comme p est une équivalence faible, nous pouvons prendre un cycle $g' \in \mathcal{P}(1)_{2d-3}$ tel que $H(p)([g]) = \beta_{2d-3} \in H_*(\mathrm{SO}_d) \cong f\mathcal{K}_d(1)$.

Par la proposition 3.21, le couple $(p(\nu'), p(g')) = (\nu, p(g'))$ respecte les conditions de la définition d'obstruction 3.18. Comme $H(p)$ et $H(q)$ sont des isomorphismes, les couples (ν', g') et $(q(\nu'), q(g'))$ les respectent aussi.

Nous pouvons donc considérer les trois classes d'obstruction associées,

$$\begin{aligned} H_*(f\mathcal{K}_d) &\xleftarrow[\cong]{H(p)} H(\mathcal{P}) \xrightarrow[\cong]{H(q)} H(H_*(f\mathcal{K}_d)) \cong H_*(f\mathcal{K}_d) \\ [\omega(\nu, p(g'))] &\longleftarrow [\omega(\nu', g')] \longrightarrow [\omega(q(\nu'), q(g'))]. \end{aligned}$$

On vérifie bien que les classes d'obstruction se correspondent (en choisissant ξ et h adéquatement). On vérifie également que les sous-espaces $\mathrm{Im}(\delta_{[\nu]}), \mathrm{Im}(\delta_{[\nu']})$ et $\mathrm{Im}(\delta_{[q(\nu)]})$ se correspondent à travers les isomorphismes.

Nous savons par la proposition 3.21, l'obstruction de gauche est non nulle dans le quotient $\frac{H_{2d-2}(\mathcal{K}_d(3))}{\text{Im}(\delta_{[\nu]})}$, or, en choisissant $\xi = 0 = h$ (car la différentielle dans $H_*(f\mathcal{K}_d)$ est nulle, de toutes façons), l'obstruction de droite est nulle dans le quotient $\frac{H(H_{2d-2}(\mathcal{K}_d(3)))}{\text{Im}(\delta_{[q(\nu')])}$. Ceci est une contradiction. $\square$

Conclusion

Nous avons dans ce travail étudié deux formalités opéradiques : la formalité multiplicative et la formalité (au sens stricte). Nous avons montré que la non-formalité multiplicative pouvait être détectée par la non-dégénérescence de suites spectrales. Ce critère a alors été utilisé pour montrer que l'opérade de Kontsevich à repère n'était pas multiplicativement formelle pour une dimension impaire plus grande que 4 (corollaire 3.17).

L'aboutissement du travail est alors le théorème 3.23, de Moriya [21] affirmant la non-formalité (au sens strict) de l'opérade de Kontsevich à repère, $f\mathcal{K}_d$ pour une dimension impaire plus grande que 4. Pour parvenir à ce résultat, il nous a fallu construire une obstruction $\omega(\nu, g)$ qui a joué le même rôle que celui d'un produit de Massey pour les espaces topologiques. Montrer que cette classe d'obstruction $[\omega(\nu, g)]$ était non-nulle a nécessité une analyse approfondie de la suite spectrale associée à l'opérade de Kontsevich à repère. Dans cette analyse, la dimension impaire a joué un rôle crucial, notamment grâce au lemme 3.5, qui a permis de séparer la suite spectrale en deux composantes, l'une relative à $\mathcal{K}_d$ et l'autre à SO_d .

Ce résultat de non-formalité est d'autant plus saisissant lorsqu'il est mis en correspondance avec la formalité de l'opérade de Kontsevich $\mathcal{K}_d$ [15]. Ces dernières années, la question de la formalité suscite une grande effervescence. Par exemple, Khoroshkin et Willwacher ont traité cette question pour l'opérade de Kontsevich à repères ([11], 2025). Ils montrent par exemple que pour d pair, l'opérade des petits disques $f\mathcal{D}_d$ (qui est homotopiquement équivalent à $f\mathcal{K}_d$ (1.23)) est *formelle*. Notons que leur notion de formalité n'est pas exactement la même que celle introduite dans ce document. Par exemple, alors que nous avons principalement travaillé en homologie, Khoroshkin et Willwacher introduisent la notion de coopérade pour travailler en cohomologie.

Un autre résultat relatif à la formalité de l'opérade des petits disques à repères concerne les travaux de Boavida, Cirici et Horel ([2], 2026). Ces derniers traitent de la notion de *formalité équivariante* pour laquelle l'opérade des petits disques à repères est formelle (pour une dimension plus grande ou égale à trois). Une étude plus approfondie de leurs travaux devrait être effectuée pour comprendre le lien avec la notion de formalité présentée dans ce document.

Annexe A

Éléments de topologie algébrique

Table des matières

A.1	Homologie	96
A.1.1	Homologie d'un complexe de chaînes	96
A.1.2	Construction de l'homologie pour un espace topologique	97
A.2	(Co)Algèbres différentielles graduées	100
A.2.1	Graduation	100
A.2.2	Produit tensoriel	101
A.2.3	Algèbres graduées	102
A.2.4	Coalgèbres graduées	106
A.2.5	Algèbres et coalgèbres différentielles graduées	107
A.3	Monoïdalité	109
A.3.1	Produit en croix simpliciale	109
A.3.2	Morphisme de Kunneth	112
A.3.3	Morphisme de Kunneth généralisé	114
A.3.4	Monoïdalité des foncteurs	114
A.3.5	Résumé des morphismes de la section	115
A.4	Cohomologie	116

Dans cette annexe nous rappelons quelques bases de l'homologie, fixant ainsi des notations. Certaines notions de base relatives au produit tensoriel (gradué) et aux (co)algèbres différentielles graduées sont alors parcourues, fixant les définitions pour ce travail. Nous introduisons informellement le concept de catégories monoïdales $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ qui nous permet d'appréhender les foncteurs de chaînes C_* et d'homologie H_* , H de manière unifiée.

Nous mettons en avant la manière avec laquelle ces foncteurs transportent la structure monoïdale de la catégorie des espaces topologiques à la catégorie des complexes de chaînes. Nous terminerons le chapitre par une brève définition de la cohomologie.

La plupart des notions de cette section sont issues, au moins partiellement, de [10]. Notre traitement peut être vu comme une synthèse des notions nécessaires à la compréhension de ce travail, pour que toute personne ayant suivi le cours LMAT2140 puisse aisément suivre la discussion.

A.1 Homologie

A.1.1 Homologie d'un complexe de chaînes

Une des catégories d'intérêt dans ce travail est la catégorie des complexes de chaînes sur un anneau R notée $\text{Ch}(R)$ ou Ch . Un **complexe de chaîne** (parfois abrégé en *chaînes*) sur R est une suite de R -modules $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec une famille de morphismes $(C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, appelées **différentielles**, et respectant les équations $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (que l'on note aussi $d^2 = 0$) :

$$C = (\dots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} \dots)$$

Parfois, on représentera les différentielles comme allant dans l'autre sens $C_{n-1} \xrightarrow{d_n} C_n$, on parle alors de complexe de *cochaînes*. Un **morphisme f entre deux complexes de chaînes** C et D est défini comme une famille $(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de modules respectant, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, les équations $f_{n-1} \circ d_n^C = d_n^D \circ f_{n+1}$. Ces conditions correspondent exactement à la commutativité de

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xleftarrow{d_{n-1}^C} & C_{n-1} & \xleftarrow{d_n^C} & C_n & \xleftarrow{d_{n+1}^C} & C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}^C} \dots \\ & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} \\ \dots & \xleftarrow{d_{n-1}^D} & D_{n-1} & \xleftarrow{d_n^D} & D_n & \xleftarrow{d_{n+1}^D} & D_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}^D} \dots \end{array} \quad (\text{A.1})$$

L'une des constructions phares liée aux complexes de chaînes est l'**homologie**. Formellement, l'homologie en degré n d'un complexe C est définie comme le quotient

$$H_n(C) := \frac{\text{Ker}(C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n)}{\text{Im}(C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1})}$$

que l'on notera parfois $H(C_n)$ ou $H(C_n; d)$. Un élément dans $H_n(C)$ est donc une classe d'équivalence, appelé **classe d'homologie**. En choisissant un représentant $x \in C_n$, on

notera $[x] \in H_n(C)$ pour sa classe d'équivalence. Notons que l'homologie peut à son tour être vue comme un complexe de chaînes, en posant des différentielles nulles :

$$H(C) := (\dots \xleftarrow{0} H_{n-1}(C) \xleftarrow{0} H_n(C) \xleftarrow{0} H_{n+1}(C) \xleftarrow{0} \dots).$$

En plus d'associer à chaque complexes C un nouveau complexe $H_*(C)$, l'homologie associe à chaque morphisme de complexes $f = (f_n : C_n \longrightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un morphisme $H_*(f) = (H_n(f) : H_n(C) \longrightarrow H_n(D))_{n \in \mathbb{Z}}$. Les composantes $H_n(f)$ sont définies par

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(D) \\ [x] &\longmapsto [f(x)] \end{aligned}$$

La condition de commutativité (A.1) assure que cette fonction est bien définie.

Il est également utile d'avoir une notion de morphisme qui préserve l'homologie.

Définition A.1 (Quasi-isomorphisme). *Soient C et D deux complexes de chaînes, un quasi-isomorphisme entre C et D est un morphisme de chaînes pour lequel les fonctions induites $H_n(f)$ sont toutes des isomorphismes de R -modules.*

Notons le fait suivant, que nous énonçons sous la forme d'un exercice.

Exercice A.2 (additivité de l'homologie). La somme directe de l'homologie (degré par degré) est l'homologie de la somme directe de deux complexes de chaînes (degré par degré).

A.1.2 Construction de l'homologie pour un espace topologique

L'homologie d'un espace topologique est étudiée dans le cours LMAT2140 - Algebraic topology, à l'UCLouvain. C'est la raison pour laquelle la plupart des vérifications et résultats du cours ne seront pas redémontrés ici. pour un traitement plus détaillé, voir [10] par exemple.

Le premier ingrédient dans la construction de l'homologie topologique est le simplexe standard.

Définition A.3 (Simplexe standard). *Le **simplexe standard** de dimension n (ou n -simplexe standard) est l'espace topologique correspondant à l'enveloppe convexe des $n+1$ vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

$$\Delta^n := \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{avec } e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i+1\text{-ème}}, \dots, 0).$$

Le simplexe Δ^n peut s'inclure canoniquement dans Δ^{n+1} de $n+2$ manières différentes. On définit la k -ème inclusion, ∂^k (auss appelé "cobord") comme l'application linéaire caractérisée sur la base canonique par

$$\begin{aligned} \partial^k : \Delta^n &\longrightarrow \Delta^{n+1} \\ e_i &\longmapsto \begin{cases} e_i & \text{si } i < k \\ e_{i+1} & \text{si } i \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

On notera aussi parfois $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$ et $\partial^k(\Delta^n) = [e_0, \dots, \widehat{e_k}, \dots, e_{n+1}] \subset \Delta^{n+1}$ où le symbole " $\widehat{}$ " signifie que tous les indices sont présents, sauf le k -ème. Remarquons que l'on peut aussi identifier $\partial^k(\Delta^n)$ à Δ^n via un homéomorphisme canonique qui préserve l'ordre des vecteurs de base.

La notation de la définition A.3 nous permet de considérer tous les sous simplexes (à priori non-standard) constituant de Δ^n . Par exemple, si $n = 2$, nous avons 3 sous-simplexes de dimension 0 ($[e_0]$, $[e_1]$, $[e_2]$), trois simplexes de dimension 1 ($[e_0, e_1]$, $[e_0, e_2]$, $[e_1, e_2]$) et un simplexe de dimension 2 ($[e_0, e_1, e_2]$). Chacun de ces sous-simplexes peut être obtenu comme un cobord (éventuellement itéré) de Δ^n . Par exemple, $[e_1] = (\partial^0 \circ \partial^2)(\Delta^n)$.

Définition A.4 (Les simplexes singuliers). Soit un espace topologique X , l'ensemble des **n -simplexes singuliers** sur X correspond aux applications continues de Δ^n vers X .

$$\text{Sg}_n(X) := \{\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X \mid \alpha \text{ continue}\}$$

On muni également $\text{Sg}_n(X)$ de $n+1$ morphismes

$$\begin{aligned} \partial_k : \text{Sg}_n(X) &\longrightarrow \text{Sg}_{n-1}(X) \\ (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X) &\longmapsto (\Delta^{n-1} \xrightarrow{\partial^k} \Delta^n \xrightarrow{\alpha} X) \end{aligned}$$

qui sont appelés les morphismes de bord.

Définition A.5 (Complexe de chaines singulier sur R). Soit R un anneau, le **complexe de chaines singulier** de X est défini comme le complexe¹ de chaines $C_*(X) :=: C_*(X; R) := (C_0(X) \xleftarrow{d_1} C_1(X) \xleftarrow{d_2} \dots)$ caractérisé par

$$\begin{aligned} C_n &:= R \cdot \text{Sg}_n(X) & d_n : C_n &\longrightarrow C_{n-1} \\ & & \alpha &\longmapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial_k(\alpha) \end{aligned}$$

où $R \cdot \text{Sg}_n(X)$ représente le module libre engendré par l'ensemble $\text{Sg}_n(X)$.

1. Si l'on veut considérer des indices négatifs, on peut poser $C_n(X) = \{0\}$ pour $n < 0$.

On peut vérifier que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (lemme 2.1 dans [10]) et que C_* est en fait un foncteur entre les catégories TOP des espaces topologiques et $\text{Ch}(R)$ des complexes de chaînes sur R . Si f est une fonction continue entre deux espaces topologiques X et Y , alors $C_*(f)$ est le morphisme de modules induit par

$$\begin{aligned} \text{Sg}_n(X) &\longrightarrow C_n(Y) \\ (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X) &\longmapsto (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y). \end{aligned}$$

On vérifie que $C_n(f)$ commute bien avec les différentielles.

Définition A.6 (Homologie à coefficients dans R). *Soit R un anneau et X un espace topologique, on définit l'**homologie** (singulière) de X comme étant l'homologie de $C_*(X)$. En d'autres termes*

$$H_n(X) := H_n(X; R) := H(C_n(X; R)) = \frac{\text{Ker}(C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1})}{\text{Im}(C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n)}$$

Les éléments de $\text{Ker}(d)$ sont appelés les **cycles** et les éléments de $\text{Im}(d)$ sont appelés les **bords**. Si α est un cycle, on note $[\alpha]$ sa classe d'homologie. Notons que tout comme C_* , H_* peut être vu comme un foncteur de TOP à $\text{Ch}(R)$. Étant donnée une fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ entre des espaces topologiques, on caractérise $H_n(f)$ sur une classe d'homologie $[\alpha]$ par

$$H_n(f)([\alpha]) := [C_n(f)(\alpha)].$$

On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du représentant α choisi. La structure de complexes de chaînes sur $H_*(X)$ s'obtient en prenant la fonction nulle en guise de différentielle entre chaque $H_n(X) \xrightarrow{0} H_{n-1}(X)$.

Dans ce mémoire, nous ne travaillerons surtout avec l'**homologie rationnelle**, c'est-à-dire, que nous choisirons comme anneau $R = \mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels.

L'une des forces de l'homologie réside dans son invariance par rapport aux équivalences homotopiques, ce qui est traité en détail dans le cours LMAT2140 (ou dans [10], corollaire 2.11).

Citons pour finir quelques exemples basiques de l'homologie rationnelle de certains espaces que nous utiliserons dans le travail.

Exemple A.7 (Homologie du point).

$$H_0(\{*\}) \cong \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad H_n(\{*\}) = 0 \quad \text{pour } n > 0.$$

Exemple A.8 (Homologie de la sphère). Soit S^n la sphère de dimension n , alors

$$H_0(S^n) \cong \mathbb{Q} \cong H_n(S^n) \quad \text{et} \quad H_n(S^n) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Exemple A.9 (Homologie d'un espace connexe). Si X est un espace connexe, alors $H_0(X) \cong \mathbb{Q}$.

A.2 (Co)Algèbres différentielles graduées

Notre but est de munir $H_*(X)$ d'une structure de coalgèbre différentielle graduée (A.40).

Pour définir cette notion, il nous faut définir le produit tensoriel gradué. Nous explorerons alors les (co)algèbres graduées, avant de conclure avec les (co)algèbres différentielles graduées.

Les trois exemples à garder en tête sont : L'algèbre graduée commutative libre (A.21), les chaînes singulières comme coalgèbre (A.25) et l'homologie comme coalgèbre (A.40).

A.2.1 Graduation

Commençons par introduire la notion de module gradué. Souvenons-nous que la somme directe de modules $V_1, V_2, V_3, \dots$ correspond aux suites à support fini telles que le i -ème terme est dans V_i .

Définition A.10 (Module gradué). Une **module gradué** est un R -module A avec la donnée d'une décomposition dénombrable en sommes directes (que l'on appelle graduation)

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

Un élément $a \in A$ est **homogène de degré i** , si la seule composante non nulle de a se trouve dans A_i . On note aussi $|a|$ pour désigner le degré i de a . Un **morphisme de modules gradués de degré k** est un morphisme de modules qui envoie les éléments homogènes de degré i sur des éléments homogènes de degré $i + k$. Si le degré n'est pas précisé, le morphisme est sous-entendu de degré 0.

La catégorie des modules gradués est noté MOD^{gr}

Remarque A.11 (Importance des éléments homogènes). Les propriétés de sommes directes font en sorte qu'un module gradué A est complètement déterminé par ses éléments homogènes. Par exemple, définir une fonction sur les éléments homogènes s'étend de manière unique en une fonction sur tout A . Cela signifie que considérer A comme une suite de modules $(\dots, A_{n-1}, A_n, \dots)$ est fondamentalement équivalent au fait de considérer la somme directe $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$.

Exemple A.12 (un module). Un module M peut toujours être vu comme un module gradué en posant $M_0 = M$ et $M_n = 0$ pour tout $n \neq 0$. On dit alors que le module gradué M ainsi formé est *concentré en degré 0*.

Exemple A.13 (Les chaines et l'homologie). N'importe quel complexe de chaines $C = (C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \dots)$ peut être vu comme un module gradué. En effet, il suffit de poser $A := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$, avec $C_i = \{0\}$ pour les éventuelles C_i qui ne seraient pas définis. Par la remarque A.11, les morphismes de chaines induisent des morphismes de modules gradués de degré 0. Notons que lorsqu'un complexe de chaines est vu comme un module gradué, parler de *module gradué différentiel* serait une nomenclature cohérente avec ce qui sera développé dans la suite.

Inversement, lorsque l'on a un module gradué, nous pouvons toujours le voir comme un complexe de chaines, en posant comme différentielle la fonction nulle.

Étant donné un espace topologique, le complexe de chaines singulier (définition A.5) et l'homologie singulière (définition A.6) associés peuvent ainsi tous les deux être vus comme des modules gradués.

A.2.2 Produit tensoriel

Outre la somme directe, une autre construction habituelle est le produit tensoriel. Rappelons, sans démonstration, une construction usuelle du produit tensoriel. Nous introduirons également dans cette section le produit tensoriel gradué, qui nous permettra de définir les (co)algèbres graduées.

Définition A.14 (Produit tensoriel). *Soit R un anneau commutatif.*

- *Cas des groupes abéliens : Soit A et B deux groupes abéliens, $A \otimes B$ est le groupe abélien défini par générateurs et relations : Les générateurs sont $\{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}$ et les relations sont $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$ et $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$.*
- *Cas des R -modules (R commutatif) : Si A et B sont deux R -modules, $A \otimes_R B$ est le R -module correspondant à $A \otimes B$ avec l'ajout de la relation $(ra) \otimes b = a \otimes (rb)$, afin que $A \otimes_R B$ soit également un R -module.²*

Dans le cas où R est un corps $\mathbb{K}$, $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ est alors un espace vectoriel. Si $\{a_i\}_{i \in I}$ est une base de A et $\{b_j\}_{j \in J}$ est une base de B , alors $\{a_i \otimes b_j \mid i \in I, j \in J\}$ est une base de $A \otimes B$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau R utilisé, $A \otimes_R B$ est remplacé par $A \otimes B$.

Le produit tensoriel de module admet plusieurs propriétés clefs qui peuvent être notamment retrouvées dans [10] (p215) que nous ne ferons que citer ici.

Proposition A.15 (Propriétés du produit tensoriel). *Soient R un anneau commutatif et A, B, C, A_i des R -modules, alors*

2. Il est parfois tentant de penser que tous les éléments dans $A \otimes V$ sont de la forme $a \otimes b$, cependant, il peut arriver qu'un élément $a \otimes b + a' \otimes b'$ ne puisse pas se réduire en une forme avec un seul terme. Cela dit, parfois, considérer les éléments $a \otimes b$ suffit, comme lorsque l'on veut caractériser une fonction linéaire par exemple.

1. (associativité) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$.
2. (symétrie) $A \otimes B \cong B \otimes A$.
3. (compatibilité avec la somme) $(\bigoplus_{i \in I} A_i) \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes B)$.
4. (unitarité) $R \otimes A \cong A \cong A \otimes R$.
5. (caractère monoïdal) chaque couple de morphismes $f : A \longrightarrow A'$ et $g : B \longrightarrow B'$ induisent un morphisme noté $f \otimes g$ caractérisé par $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.
6. (propriété universelle) chaque application bilinéaire $\varphi : A \times B \longrightarrow C$ induit un unique morphisme $\hat{\varphi}$ caractérisé par $\hat{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a, b)$.

Nous voulons maintenant investiguer comment le produit tensoriel s'applique à notre contexte gradué. Étant donné $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A_m$ et $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ deux modules gradués, grâce à la propriété A.15 (3) de compatibilité avec la somme directe, nous avons que

$$A \otimes B \cong \bigoplus_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} A_m \otimes B_n.$$

Nous avons alors affaire à ce que l'on appelle un module bigradué. Un moyen de transformer cette bigraduation en graduation simple est de considérer une *graduation totale*, qui sera la somme des deux graduations à disposition.

Définition A.16 (Produit tensoriel de module gradué). *Donnons nous $A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A_m$ et $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ deux modules gradués, on définit le produit tensoriel de A et B comme étant le module $A \otimes B$ muni de la graduation*

$$A \otimes B = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (A \otimes B)_n \quad \text{avec } (A \otimes B)_n := \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q.$$

Dans ce travail, l'anneau R sera toujours commutatif, afin de pouvoir parler du produit tensoriel.

A.2.3 Algèbres graduées

Dans cette section nous définissons la notion d'algèbre graduée grâce à la définition de produit tensoriel gradué précédemment développé. Nous explorons alors ensuite quelques exemples pour arriver à l'algèbre graduée commutative libre.

Définition A.17 (Algèbre graduée). *Un R -module gradué A (avec R un anneau commutatif) est une **algèbre graduée** (associative et unitaire) si A est muni de deux morphismes gradués de degré 0*

$$A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \quad \text{et} \quad R \xrightarrow{\epsilon} A$$

où R est vu comme un R -module concentré en degré 0, tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & A \otimes A \\ \text{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} R \otimes A & \xrightarrow{\epsilon \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes \epsilon} & A \otimes R \\ & \searrow & \downarrow \mu & \swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

μ est appelé **multiplication** et ϵ l'**unité**.

Un morphisme d'algèbres graduées est un morphisme gradué qui commute avec la multiplication et l'unité.

Remarquons que sur un élément homogène (définition A.10) $a \otimes b \otimes c$ de $A \otimes A \otimes A$, la commutativité du premier diagramme signifie que $(ab)c = a(bc)$ (où nous avons noté $\mu(a, b) =: ab$). Par ailleurs, en notant $1_A := \epsilon(a)$, la commutativité du deuxième diagramme se traduit par $a \cdot 1_A = a = 1_A \cdot a$. On constate aussi que l'unité $\epsilon(a)$ est toujours de degré 0.

Passons maintenant à des exemples d'algèbres graduées. L'exemple de plus directe est les polynômes sur R , $R[x]$. Les éléments homogènes sont alors les monômes. On peut considérer les polynômes à une ou plusieurs variables, comme $R[x_1, \dots, x_n]$. Dans ce cas, tous les monômes de la forme x_i sont homogènes de degré un, alors qu'un monôme de la forme $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ est de degré k . Une construction légèrement différente consiste à également considérer $R[x_1, \dots, x_n]$ comme un R module avec une multiplication, mais de changer la graduation. On peut par exemple imposer un degré différent pour chaque monôme de la forme x_i . Ainsi, le degré de $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ serait la somme des degrés de chaque x_i afin de respecter le caractère gradué de la multiplication.

Un troisième exemple consiste à considérer l'**algèbre extérieure** sur un ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, noté $\Lambda^{\text{ext}}(Y)$ (Hatcher [10] exemple 3.12). Comme module, $\Lambda^{\text{ext}}(Y)$ est le module libre généré par des éléments de la forme $y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_k}$ avec $i_1 < \dots < i_k$. Comme précédemment, on choisit un degré pour chaque y_i . On définit le degré de ces générateurs comme étant la somme des degrés des y_i qui le constitue. Notons que la suite vide est aussi un générateur, en degré 0, que l'on note 1. On munit cette structure d'un produit bilinéaire associatif, noté $\wedge$, que l'on définit de manière évidente sur les générateurs, en imposant par ailleurs les relations suivantes,

- $y_i \wedge y_i = 0$
- $y_i \wedge y_j = (-1)(y_j \wedge y_i)$ pour $i \neq j$.

On peut vérifier que cette structure est bien définie et est une algèbre graduée.

Certaine algèbre possède une propriété supplémentaire de commutativité. Dans le cas gradué, la *commutativité graduée* s'exprime avec un changement de signe.

Définition A.18 (Algèbre graduée commutative). Une algèbre A est **graduée commutative** si elle respecte, sur les éléments homogènes $a, b \in A$ de degré $|a|$ et $|b|$ respectivement, l'équation

$$ab = (-1)^{|a| \cdot |b|} ba.$$

Il est possible sur base d'algèbres graduées de construire d'autres algèbres graduées.

Exemple A.19 (Le produit tensoriel d'algèbres graduées). Soient A et B deux algèbres graduées, il est possible de définir une structure d'algèbre graduée sur $A \otimes B$ (définition A.16). La multiplication sur $A \otimes B$ est caractérisée par

$$\begin{aligned} (A_p \otimes B_q) \times (A_{p'} \otimes B_{q'}) &\longrightarrow A \otimes B \\ (a \otimes b), (a' \otimes b') &\longmapsto (-1)^{|a'| \cdot |b|} (aa' \otimes bb') \end{aligned}$$

Montrer formellement que cette application caractérise une multiplication bien définie se fait, avec un peu de travail, via les propriétés A.15 du produit tensoriel. On vérifie aussi facilement que cette multiplication est associative et unitaire. On peut même constater que si A et B sont commutatifs gradués, alors $A \otimes B$ l'est aussi.

L'avantage du produit tensoriel est qu'il joue un rôle de coproduit dans la catégorie des algèbres commutatives

Proposition A.20 (Propriété universelle du produit tensoriel). Soient A, B et C trois algèbres graduées commutatives sur un anneau commutatif. Pour tout morphisme d'algèbres graduées $f : A \longrightarrow C$ et $g : B \longrightarrow C$, il existe un unique morphisme d'algèbres graduées $\langle f, g \rangle$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \otimes B & \xleftarrow{i_B} & B \\ & \searrow f & \downarrow \langle f, g \rangle & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array}$$

Les morphismes i_A et i_B sont les inclusions $a \longmapsto a \otimes 1$ et $b \longmapsto 1 \otimes b$.

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. L'argument clef est cette suite d'égalité, pour $a \otimes b$ un élément particulier de $A_p \otimes B_q$:

$$\langle f, g \rangle(a \otimes b) = \langle f, g \rangle((a \otimes 1) \cdot (1 \otimes b)) = \langle f, g \rangle(a \otimes 1) \cdot \langle f, g \rangle(1 \otimes b) = f(a) \cdot f(b)$$

Cette égalité détermine de manière unique le morphisme $\langle f, g \rangle$ sur $a \otimes b$ et donc, par linéarité, sur tout $A \otimes B$.

Pour montrer l'existence, nous pouvons par exemple utiliser la propriété universelle du produit tensoriel (propriété A.15, 6). On vérifie alors que

$$\begin{aligned} A_p \times B_q &\longrightarrow C \\ a, b &\longmapsto f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

définit bien une application bilinéaire. Finalement, on vérifie que le morphisme ainsi construit est bien un morphisme d'algèbres graduées (c'est à cette étape que l'on a besoin que C soit graduée commutative). $\square$

On peut alors assembler les exemples précédents pour définir une nouvelle algèbre.

Exemple A.21 (Algèbre graduée commutative libre). Soit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ deux ensembles disjoints. On fait le choix, pour chaque x_i , d'un degré pair noté $|x_i|$ et pour chaque y_i d'un degré impair noté $|y_i|$. On définit alors l'**algèbre graduée commutative libre** sur $X \sqcup Y$ comme le produit tensoriel de l'algèbre des polynômes sur X avec l'algèbre extérieure sur Y :

$$\bigwedge^{\text{lib}}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) := R[x_1, \dots, x_m] \otimes \bigwedge^{\text{ext}}(y_1, \dots, y_n)$$

La structure d'algèbre est formellement donnée par l'exemple A.19 mais un élément homogène de $\bigwedge^{\text{lib}}(X \sqcup Y)$ peut être pensé comme un monôme composé de puissances de différents x_i et de facteurs y_i (sans puissances). Dans la suite, nous écrirons simplement $\bigwedge$ à la place de $\bigwedge^{\text{lib}}$. Comme sur des degrés pairs, $R[X]$ est commutative et sur des degrés impairs, $\bigwedge^{\text{ext}}(Y)$ l'est également, le produit tensoriel l'est aussi.

Comme son nom le suggère, cette algèbre possède une propriété universelle parmi les algèbres graduées commutatives.

Proposition A.22 (Propriété universelle de l'algèbre graduée commutative libre). *Soit C une algèbre graduée commutative. Soit X et Y deux ensembles finis disjoints munis d'une graduation comme dans l'exemple A.21. Pour toute fonction $f : X \sqcup Y \longrightarrow C$ respectant la graduation, il existe un unique morphisme d'algèbres graduées $\hat{f} : \bigwedge(X \sqcup Y) \longrightarrow C$ faisant commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup Y & \hookrightarrow & \bigwedge(X \sqcup Y) \\ & \searrow f & \downarrow \hat{f} \\ & & C \end{array}$$

Démonstration. Nous donnerons juste l'idée d'une preuve, sans rentrer dans les détails. La clef de l'argument réside dans le fait de diviser cette propriété universelle en deux autres propriétés universelles plus simple, et de les assembler avec la propriété universelle

du produit tensoriel dans les algèbres graduées commutatives (propriété A.20). Les deux propriétés universelles plus simples sont les suivantes

$$\begin{array}{ccc} X \hookrightarrow R[X] & & Y \hookrightarrow \Lambda^{\text{ext}}(Y) \\ & \searrow f|_X & \searrow f|_Y \\ & & \downarrow \exists \widehat{f|_X} \\ & & C \end{array}$$

Ces deux propriétés peuvent se prouver de manière explicite. □

A.2.4 Coalgèbres graduées

Dans cette section, nous définissons la notion de coalgèbre graduée, et nous munissons les chaines singulières $C_*(X)$ d'une structure de coalgèbre graduée.

L'avantage d'avoir exprimé la définition d'algèbre graduée en termes de diagrammes est qu'elle se dualise facilement.

Définition A.23 (Coalgèbre gradué). *A, un R -module gradué, est une **coalgèbre graduée** si A est muni de deux morphismes gradués (de degré 0)*

$$A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\epsilon} R$$

appelés **comultiplication** et **counité**, tels que les deux diagrammes duaux de la définition A.17 commutent.

Un **morphisme d'algèbres gradués** est un morphisme qui commute avec la comultiplication et la counité.

L'exemple suivant est celui qui motive la notion de coalgèbre graduée.

Exemple A.24 (Les chaines singulières comme coalgèbre). Pour X un espace topologique, nous savons déjà que $C_*(X)$ peut être vu comme un module gradué (exemple A.13). Il s'avère que nous pouvons même munir $C_*(X)$ d'une structure de coalgèbre. Pour construire la comultiplication, il nous faut considérer la restriction d'un simplexe singulier $\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X$ sur sa coface avant. On peut par exemple écrire $\alpha|_{[e_0, \dots, e_k]}$ et $\alpha|_{[e_k, \dots, e_n]}$ pour désigner respectivement

$$(\partial_{k+1} \circ \dots \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n)(\alpha) \quad \text{et} \quad \underbrace{(\partial_0 \circ \partial_0 \circ \dots \circ \partial_0)}_{k \text{ fois}}(\alpha)$$

où les ∂_k sont les morphismes de bords de la définition A.4. On définit alors la comultiplication sur les éléments homogènes

$$\begin{aligned}\Delta_{AW} : C_*(X) &\longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X) \\ (\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X) &\longmapsto \sum_{k=0}^n \alpha|_{[e_0, \dots, e_k]} \otimes \alpha|_{[e_k, \dots, e_n]}.\end{aligned}$$

Ce morphisme est appelé la **diagonale d'Alexander-Whitney**.

Lemme A.25 (La diagonale d'Alexander-Whitney est une comultiplication). *Les chaînes singulières $C_*(X)$ sont munies d'une structure de coalgèbre, avec Δ_{AW} comme multiplication, et l'**augmentation**, comme counité, qui est définie, sur les générateurs par*

$$\begin{aligned}\epsilon : C_*(X) &\longrightarrow R \\ \alpha &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in C_0(X) \\ 0 & \text{si } \alpha \notin C_0(X) \end{cases}\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est une vérification routinière de la commutativité des deux diagrammes de la définition A.23. $\square$

Notons que l'on peut également vérifier que cette comultiplication est naturelle en X .

A.2.5 Algèbres et coalgèbres différentielles graduées

Lors des sections précédentes, nous avons principalement manipulé trois structures : les chaînes (section A.1.1), les modules gradués (définition A.10) et les algèbres (et coalgèbre).

Une algèbre (coalgèbre) différentielle graduée n'est autre que la réunion de ces trois structures. Nous avons déjà observé que chaque complexe de chaînes pouvait être vu comme un module gradué (exemple A.13). Et remarquons également que nous avons déjà eu l'occasion d'assembler les concepts d'algèbre et de graduation en explorant les algèbres graduées (définition A.17) et coalgèbres graduées (définition A.23). L'une des étapes clef dans cette dernière combinaison, était de munir le produit tensoriel d'une graduation (pour créer le produit tensoriel gradué A.16). Dans ce même esprit, pour assembler le concept d'algèbre et de complexe de chaînes, il nous faut munir le produit tensoriel d'une structure de complexe de chaînes.

Définition A.26 (Différentielle du produit tensoriel gradué). *Soit A et B deux complexes de chaînes sur un anneau commutatif R vu comme des modules gradués. On définit*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \cdots \xrightarrow{\circ} R\langle z \rangle \xrightarrow{\circ} 0 \xrightarrow{\circ} 0 \xrightarrow{\circ} R\langle x, y \rangle \xrightarrow{\circ} 0 \xrightarrow{\circ} R\langle z \rangle \xrightarrow{d} R\langle x, y \rangle \xrightarrow{\circ} \cdots \\
 & & & & & z \mapsto x, y
 \end{array}$$

FIGURE A.1 – L’algèbre $\wedge(\{x_3, y_3, z_5\})$ avec $|x_3| = 3 = |y_3|$ et $|z_5| = 5$, munie d’une différentielle nulle sauf pour $d(z_5) = x_3 \wedge y_3$.

une différentielle sur le produit tensoriel gradué $A \otimes B$ (voir définition A.16) comme

$$d^{A \otimes B} : \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} A_p \otimes B_q$$

$$a \otimes b \longmapsto (d^A(a) \otimes b) + (-1)^{|a|} (a \otimes d^B(b)).$$

Ayant maintenant muni $A \otimes B$ d'une structure de module gradué différentiel (en d'autres mots, un complexe de chaines vue comme un module gradué), nous pouvons alors définir les algèbres différentielles graduées.

Définition A.27 (Algèbre différentielle graduée). Soit R un anneau commutatif. A est une R -algèbre différentielle graduée si A est un complexe de cochaines³ muni d'une structure d'algèbre graduée (A.17) compatible avec la structure différentielle. En d'autres termes, les morphismes gradués de multiplication et unité

$$A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \quad et \quad R \xrightarrow{\epsilon} A$$

doivent également être des morphismes de cochaines.

La catégorie des algèbres différentielles graduées est noté ADG.

Exemple A.28 (Une algèbre différentielle graduée). Posons $Y = \{x_3, y_3, z_5\}$ avec $|x_3| = 3 = |y_3|$ et $|z_5| = 5$. Considérons alors l'algèbre graduée commutative libre $\Lambda(Y)$ (exemple A.21), qui dans ce cas-ci, n'est autre que l'algèbre extérieure au regard de la parité des générateurs. On définit une différentielle nulle sauf entre $\Lambda(Y)_5$ et $\Lambda(Y)_6$, où l'on envoie l'unique générateur z_5 de $\Lambda(Y)_5$ sur $x_3 \wedge y_3 \in \Lambda(Y)_6$. Une représentation de cette algèbre est proposée en figure A.1.

3. Pour coller avec l'exemple A.24 décrivant les chaînes singulières comme des coalgèbres, on considère en général que les algèbres sont des complexes de cochaînes et que les coalgèbres sont des complexes de chaînes. Remarquons que la distinction entre complexes de cochaînes et complexes de chaînes n'est que notational (voir A.1.1). Cette différence n'a donc aucun impact réel sur la définition.

Dualement à la notion d'algèbre différentielle graduée, nous avons les coalgèbres différentielles graduées

Définition A.29 (Coalgèbre différentielle graduée). *Soit R un anneau commutatif. A est une **coalgèbre différentielle graduée** si A est un complexe de chaines muni d'une structure de coalgèbre graduée (A.23) compatible avec la structure différentielle.*

Exemple A.30 (Les chaines singulières comme coalgèbre différentielle graduée). Nous savons que les chaines singulières sur un espace topologique X admettent une structure de coalgèbre via la diagonale d'Alexander-Whitney notamment (exemple A.24). Nous pouvons vérifier (avec un calcul moyennement laborieux) que la diagonale d'Alexander-Whitney $\Delta_{AW} : C_*(X) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$ est un morphisme de chaines.

A.3 Monoïdalité

Informellement, $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ est une **catégorie monoïdale** si elle est munie de

- un produit pour les objets (et les flèches) de la catégorie : le produit cartésien pour ENS et TOP, le produit tensoriel pour Ch,
- un objet jouant le rôle d'une unité, $I \in \mathcal{C}$: le singleton pour ENS et TOP, le complexe de chaines $(R \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \dots)$ pour Ch,

ce à quoi il faut ajouter l'un ou l'autre axiome d'associativité.

Nous montrerons, dans cette section, que les trois foncteurs

$$C_* : \text{TOP} \longrightarrow \text{Ch} \quad H_* : \text{TOP} \longrightarrow \text{Ch} \quad H : \text{Ch} \longrightarrow \text{Ch}.$$

préserve, dans un certain sens, la structure de catégorie monoïdale. Pour ce faire, il faut introduire un morphisme particulier, pour chacun de ces foncteurs. Pour $X, Y \in \text{TOP}$ et $A, B \in \text{Ch}$, nous définirons :

$$\text{Produit en croix} : C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightarrow{\times} C_*(X \times Y)$$

$$\text{Morphisme de Kunneth} : H_*(X) \otimes H_*(Y) \xrightarrow{Q} H_*(X \times Y)$$

$$\text{Morphisme de Kunneth généralisé} : H(A) \otimes H(B) \xrightarrow{Q^g} H(A \otimes B)$$

A.3.1 Produit en croix simpliciale

Définition A.31 (Produit en croix simpliciale, [10] p277). *Étant donné $\Delta^p \xrightarrow{\alpha} X$ et $\Delta^q \xrightarrow{\beta} Y$, nous définissons le produit en croix du simplexe α avec β , comme l'élément de $C_{p+q}(X \times Y)$:*

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} (\Delta^{p+q} \xrightarrow{\ell_{\sigma}} \Delta^p \times \Delta^q \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y),$$

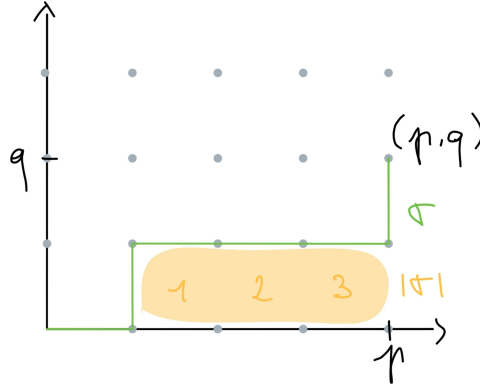


FIGURE A.2 – Illustration d'un chemin σ .

où

- σ est un chemin dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(n_0, n'_0), (n_1, n'_1), \dots, (n_{p+q}, n'_{p+q})$$

qui commence à $(0, 0)$, termine à (p, q) , et ne fait que des pas de $(+1, 0)$ ou $(0, +1)$, comme en figure A.2.

- $|\sigma|$ est le nombre de cases en dessous du chemin σ .
- ℓ_σ est une application qui à chaque $e_i \in \Delta^{p+q}$ associe $(e_{n_i}, e_{n'_i}) \in \Delta^p \times \Delta^q$, comme en figure A.3.
- $\alpha \times \beta$ est le morphisme induit par le produit cartésien de fonctions.

Nous pouvons montrer par calcul que $\times : C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C(X \times Y)$ que nous venons juste de définir est un morphisme de chaines.

L'une des propriétés intéressantes du produit en croix simpliciale est qu'il constitue un quasi-isomorphisme.

Théorème A.32 (Corollaire du théorème de Eilenberg-Zilber, section 8.5.3 dans [26]). *Le produit en croix simplicial est un quasi-isomorphisme. Explicitement, pour X et Y des espaces topologiques, nous avons l'isomorphisme*

$$H(C_*(X) \otimes C_*(Y)) \xrightarrow[H(\times)]{\cong} H(X \times Y).$$

Il est également utile d'exhiber un morphisme qui induit l'inverse de $H(\times)$. Il s'agit du morphisme d'Alexander-Whitney.

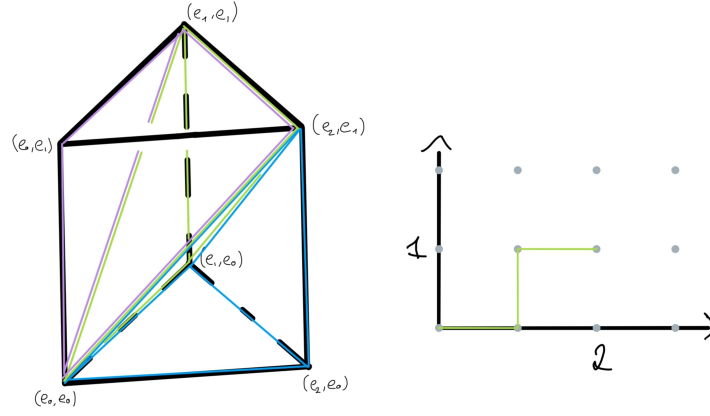


FIGURE A.3 – Illustration de la fonction ℓ_σ pour $p = 2$ et $q = 1$, et pour les trois chemins σ possibles.

Définition A.33 (Morphisme d’Alexander-Whitney, section 8.5.4 dans [26]). *Soient X et Y deux espaces topologiques, on définit*

$$AW : C_n(X \times Y) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y)$$

$$\left(\Delta^n \xrightarrow{\alpha} X \times Y \right) \longmapsto \sum_{k=0}^n \text{proj}_X \circ \alpha|_{[e_0, \dots, e_k]} \otimes \text{proj}_Y \circ \alpha|_{[e_k, \dots, e_n]}.$$

où proj_X et proj_Y désignent les projections du produit cartésien.

Mentionnons alors le lien entre le morphisme d’Alexander-Whitney et la diagonale d’Alexander-Whitney décrite à l’exemple A.24 qui donnait à $C_*(X)$ une structure de coalgèbre.

Remarque A.34. Soit X un espace topologique. Notons Δ la diagonale topologique, Δ_{AW} la diagonale d’Alexander-Whitney (A.24) et AW le morphisme d’Alexander-Whitney. Alors, on vérifie grâce aux définitions que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & & \\ \downarrow C_*(\Delta) & \searrow \Delta_{AW} & \\ C_*(X \times X) & \xrightarrow{AW} & C_*(X) \otimes C_*(X) \end{array}$$

commute.

Il peut également être utile de remarquer que les projections topologiques correspondent, d’une certaine manière, à l’unité dans la coalgèbre des chaînes singulières (A.24), ϵ , aussi appelée, l’augmentation.

Exercice A.35. Sur base des définitions, on vérifie la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) \otimes R & & \\ \uparrow C_*(proj_X) & \nwarrow \text{id} \otimes \epsilon & \\ C_*(X \times Y) & \xrightarrow{AW} & C_*(X) \otimes C_*(Y). \end{array}$$

A.3.2 Morphisme de Kunneth

Il s'avère que le morphisme de Kunneth peut être obtenu depuis le produit en croix simplicial.

Étant donné un morphisme de complexes de chaînes $f : A \otimes B \longrightarrow C$, nous savons déjà qu'il induit un morphisme $H(f) : H(A \otimes B) \longmapsto H(C)$. Nous voulons savoir sous quelle condition f peut également induire un morphisme $H(A) \otimes H(B) \longmapsto H(C)$.

Lemme A.36 (Condition pour transport d'un produit). *Soient A , B et C trois complexes de chaînes. Soit $f : A \otimes B \longrightarrow C$ un morphisme de chaînes. Si*

1. *Le produit de cycle reste un cycle : Pour chaque $a \in A$ et $b \in B$ homogènes, si $d^A(a) = 0 = d^B(b)$, alors $d^C(f(a \otimes b)) = 0$*
2. *Le produit avec un bord est un bord : Pour chaque $a \in A$ un cycle ($d(a) = 0$) et $b \in B$ un bord ($b = d^B(b')$), $f(a \otimes b)$ est un bord ($f(a \otimes b) = d^C(c')$). Idem lorsque a est le bord.*

alors, f induit un morphisme bien défini en homologie :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : H(A) \otimes H(B) &\longrightarrow H(C) \\ [a] \otimes [b] &\longmapsto [f(a \otimes b)]. \end{aligned}$$

Démonstration. laissée en exercice. □

Corollaire A.37 (Transport d'un produit). *Si $f : A \otimes B \longrightarrow C$ est un morphisme de chaînes (pour la structure habituelle de chaînes sur $A \otimes B$ (A.26)), alors, f induit un morphisme bien défini en homologie :*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : H(A) \otimes H(B) &\longrightarrow H(C) \\ [a] \otimes [b] &\longmapsto [f(a \otimes b)]. \end{aligned}$$

Démonstration. Le fait que f est un morphisme de chaînes signifie entre autre pour $a \in A$ et $b \in B$ que $d^C(f(a \otimes b)) = f(d^A(a) \otimes b + (-1)^{|a|}(a \otimes d^B(b)))$. On vérifie alors que les deux conditions du lemme précédent.

La condition 1 suit du fait que $d^C(f(a \otimes b)) = 0$ lorsque a et b sont des cycles.

Pour la condition 2, notons $a = d^A(a') \in A$ un bord et $b \in B$ un cycle. On calcule alors que $f(a \otimes b) = d^C(f(a' \otimes b))$. La deuxième partie de la condition 2 est similaire. $\square$

Définition A.38 (Morphisme de Kunneth). *Le morphisme de Kunneth est donné par*

$$\begin{aligned} Q : H_*(X) \otimes H_*(Y) &\longrightarrow H_*(X \times Y) \\ [\alpha] \otimes [\beta] &\longmapsto [\alpha \times \beta] \end{aligned}$$

où $\alpha \times \beta$ est le produit en croix simplicial (A.31).

Ce morphisme est bien défini grâce au corolaire A.37.

Quand nous travaillons avec une homologie à coefficient dans un corps, le morphisme de Kunneth devient alors un isomorphisme.

Théorème A.39 (Kunneth, Corollaire 3B.7 [10]). *Soit X et Y deux espaces topologiques. Soit $R = \mathbb{K}$ un corps, alors*

$$H_*(X; \mathbb{K}) \otimes H_*(Y; \mathbb{K}) \xrightarrow{Q} H_*(X \times Y; \mathbb{K})$$

est un isomorphisme, comme module gradué.

Notons qu'il existe une version générale pour les anneaux, mais l'isomorphisme doit alors être corrigé avec des termes de torsion.

Grâce à l'isomorphisme de Kunneth, nous pouvons alors munir l'homologie d'une structure de coalgèbre différentielle graduée

Exemple A.40 (Structure de coalgèbre différentielle graduée sur l'homologie). Soit $R = \mathbb{K}$ un corps. Pour X un espace topologique, on définit une comultiplication Δ_H sur $H(X)$ comme la composition

$$\begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{H_*(\Delta)} & H_*(X \times X) \\ & \searrow \Delta_H & \downarrow Q^{-1} \\ & & H_*(X) \otimes H_*(X) \end{array} .$$

On montre alors que ce morphisme définit une structure de coalgèbre. Pour ce faire, nous pouvons voir la counité $\epsilon_H : H_*(X) \rightarrow \mathbb{K}$ comme le morphisme induit par l'unique morphisme topologique $X \rightarrow \{*\}$. La commutativité des diagrammes de la définition de coalgèbre suit alors de la commutativité des diagrammes topologiques correspondants et de la monoïdalité du morphisme de Kunneth, que nous expliciterons en A.43.

Terminons cette section avec un exercice qui permet de comprendre à quoi correspondent les projections à travers l'isomorphisme de Kunneth.

Exercice A.41 (Projections via Kunneth). Soit $proj_X : X \times Y \longrightarrow X$ la projection sur X . Soit $\epsilon_H : H_*(X) \longrightarrow R$ la counité de $H_*(X)$, Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_*(X) \otimes R & & \\ \uparrow H_*(proj_X) & \nwarrow \text{id} \otimes \epsilon_H & \\ H_*(X \times Y) & \xleftarrow{Q} & H_*(X) \otimes H_*(Y). \end{array}$$

commute. (indication : voir $proj_X$ comme $\text{id} \times f$, où f est l'unique fonction de X à $\{*\}$.)

A.3.3 Morphisme de Kunneth généralisé

Passons maintenant au morphisme de Kunneth généralisé. Comme précédemment, il est parfois une isomorphisme.

L'enjeu ici est de mettre en lien, pour $C, D \in \text{Ch}$, le produit $H(C) \otimes H(D)$ (muni de la différentielle de la définition A.26) avec $H(C \otimes D)$.

Théorème A.42 (Kunneth généralisé, Théorème 3B.5 ([10])). Soient C et D deux complexes de chaînes sur $R = \mathbb{K}$ un corps, alors, le morphisme⁴

$$\begin{aligned} Q^g : H(C) \otimes H(D) &\xrightarrow{\cong} H(C \otimes D) \\ [x] \otimes [y] &\longmapsto [x \otimes y] \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Il est appelé le **morphisme de Kunneth généralisé**.

A.3.4 Monoïdalité des foncteurs

Pour qu'un foncteur F préserve la structure de catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ (voir début de la section A.3), il faut notamment deux transformations naturelles⁵

$$\eta : F(X) \otimes (Y) \longrightarrow F(X \otimes Y) \quad \text{et} \quad \iota : I \longrightarrow F(I).$$

On note alors (F, η, ι) un tel foncteur. Nous considérerons alors les foncteurs

$$(C_*, \times, \iota_C) \quad (H_*, Q, \text{id}) \quad (H, Q^g, \text{id})$$

où ι_C correspond à l'inclusion de $I = (R \xleftarrow{0} 0 \longleftarrow \dots)$ dans $C_*(\{*\})$ qui envoie $1 \in R$ sur l'unique simplexe de dimension 0.

4. Montrer que ce morphisme est bien défini revient à utiliser le corollaire A.37 sur $f = \text{id}_{C \otimes D}$.

5. ainsi qu'une certaine forme de compatibilité avec l'associativité et l'unité de la catégorie monoïdale, que nous ne développerons pas.

La prochaine proposition vérifie la naturalité de η .

Proposition A.43 (Caractère monoïdal des foncteurs). *Soient X, X', Y et Y' des éléments de la catégorie $\mathcal{C}$ (où $\mathcal{C}$ est soit TOP soit Ch), Soit $F = C_*, H_*$ ou H ainsi que leur morphisme η correspondant, alors*

1. *Pour deux $X \xrightarrow{f} X'$ et $Y \xrightarrow{g} Y'$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\eta} & F(X \otimes Y) \\ F(f) \otimes F(g) \downarrow & & \downarrow F(f \otimes g) \\ F(X') \otimes F(Y') & \xrightarrow{\eta} & F(X' \otimes Y') \end{array}$$

commute.

2. *En notant $\tau : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ le morphisme intervertissant les deux composantes, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\eta} & F(X \otimes Y) \\ \tau \downarrow & & \downarrow F(\tau) \\ F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{\eta} & F(X \otimes Y) \end{array}$$

commute.

Démonstration. Suit d'une vérification, pour chacun des trois cas, en utilisant les définitions correspondantes. $\square$

A.3.5 Résumé des morphismes de la section

Avec toutes les notations introduites dans cette section, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_*(X) & & \\ \downarrow H_*(\Delta) & \searrow H(\Delta_{AW}) & \\ H_*(X \times X) & \xrightleftharpoons[H(\times)]{H(AW)} & H(C_*(X) \otimes C_*(X)) \\ \uparrow Q \cong & & \uparrow Q^g \cong \\ H_*(X) \otimes H_*(X) & & \end{array}$$

où les isomorphismes sont valables pour des coefficients dans les corps

A.4 Cohomologie

Dans cette section, nous décrivons une construction duale à l'homologie.

Dans la section A.1.2, la construction de l'homologie sur un anneau R a été introduite en détail pour un espace topologique X . Dans ce procédé, nous avons créé un complexe de chaînes en commençant par regarder, pour chaque degré, le module libre sur l'ensemble des simplexes singuliers $Sg_n(X)$, que nous notons $C_n = R \cdot Sg_n(X)$ (définition A.4).

Nous pouvons alors dualiser ce module, en considérant l'ensemble des morphismes de modules de $C_n(C) = R \cdot Sg_n$ vers R . On note

$$C^n(X) := \text{Hom}(C_n(X), R)$$

On définit les différentielles par précomposition :

$$\begin{aligned} d^n : C^{n-1}(X) &\longrightarrow C^n(X) \\ f &\longmapsto f \circ d_n. \end{aligned}$$

et on obtient donc un complexe de cochaîne

$$C^0(X) \xrightarrow{d_1} C^1 \xrightarrow{d_2} C^2 \xrightarrow{d_3} \dots$$

L'homologie de ce complexe est appelé la **cohomologie** de X et est noté $H^*(X; R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X; R)$.

L'un des avantages de la cohomologie est qu'elle est naturellement munie d'une structure d'algèbre différentielle, pour laquelle nous sommes parfois plus familier (contrairement à la structure de coalgèbre sur l'homologie). Explicitons (sans démonstration) cette structure, tant sur les cochaînes singulières que sur la cohomologie.

Définition A.44 (Le cup produit). *Soit X un espace topologique et R un anneau commutatif, pour $f \in C^p(X)$ et $g \in C^q(X)$, le **cup produit** de g et f est l'élément de $C^{p+q}(X)$ défini comme*

$$\begin{aligned} f \smile g : C_{p+q}(X) &\longrightarrow R \\ \alpha &\longmapsto f(\alpha|_{[e_1, \dots, e_p]}) \cdot g(\alpha|_{[e_{p+1}, \dots, e_{p+q}]}). \end{aligned}$$

On peut montrer que le cup produit définit une multiplication graduée où l'unité correspond aux applications constantes sur $C_0(X)$. On peut également vérifier par un calcul, que le cup produit est un morphisme de cochaînes (il est compatible avec la différentielle) (voir lemme 3.6 dans [10]). Grâce au corollaire A.37, nous pouvons alors transporter ce produit en cohomologie.

Proposition A.45. *Soit X un espace topologique et R un anneau commutatif. Le morphisme*

$$\begin{aligned}\smile: H^*(X) \otimes H^*(X) &\longrightarrow H^*(X) \\ [f] \otimes [g] &\longmapsto [f \smile g]\end{aligned}$$

est bien défini et munit la cohomologie de X d'une structure d'algèbre différentielle graduée.

Finissons cette section par mentionner un dernier résultat important sur la cohomologie. Alors que le cup produit sur les cochaines singulières n'a, a priori, aucune raison d'être commutatif, il s'avère que la cohomologie est en réalité graduée commutative.

Théorème A.46 (Commutativité graduée du cup produit, théorème 3.11 [10]). *Pour R un anneau commutatif et X un espace topologique, le cup produit sur $H(X; R)$ est gradué commutatif (voir définition A.18). C'est-à-dire, pour $f, g \in H^*(X)$, nous avons l'équation*

$$f \smile g = (-1)^{|f||g|} g \smile f.$$

Démonstration. La démonstration n'est pas triviale et ne sera pas faite dans ce document. Voir 3.11 dans [10]. □

Annexe B

Objets (co)simpliciaux

Table des matières

B.1 Définitions et exemples d'objets (co)simpliciaux	119
B.2 Normalisation	123
B.3 Théorème d'Eilenberg-Zilber	125

D'abord, nous introduirons la définition d'objets (co)simpliciaux, avec de nombreux exemples. Nous ferons une petite note sur la normalisation de tels objets, qui permet de transformer un module (co)simplicial en un complexe de (co)chaines. Nous mentionnerons également le théorème d'Eilenberg-Zilber, qui est un outil de calcul de l'homologie que nous utiliserons dans le chapitre 3.

B.1 Définitions et exemples d'objets (co)simpliciaux

Définition B.1 (La catégorie simpliciale). *Soit Δ la catégorie ayant pour objets les ensembles de la forme $[n] := \{0, 1, 2, \dots, n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$, et pour morphismes les fonctions croissantes entre ces ensembles. Les $n + 2$ injections entre $[n]$ et $[n + 1]$*

$$\begin{aligned} \partial^i : [n] &\longrightarrow [n + 1] \\ k &\longmapsto \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k + 1 & \text{si } k \geq i, \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n + 1. \end{aligned}$$

*sont appelées les **cofaces** ou les **cobords**.*

Les n surjections entre $[n]$ et $[n - 1]$

$$\begin{aligned} s^i : [n] &\longrightarrow [n - 1] \\ k &\longmapsto \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k - 1 & \text{si } k > i, \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n - 1. \end{aligned}$$

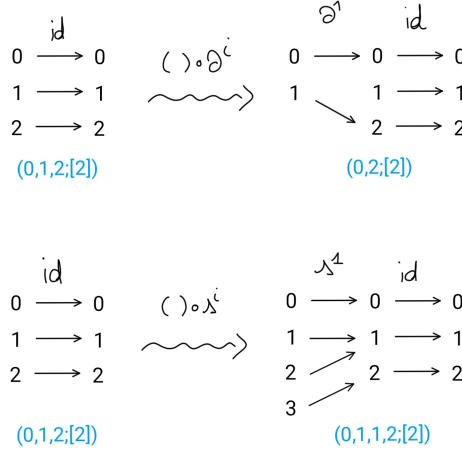


FIGURE B.1 – Effet de la pré-composition par des cofaces et des codégénérescences.

sont appelées les **codégénérescences**.

Remarque B.2 (Les cofaces et codégénérescences caractérisent la catégorie simpliciale). Il est utile de remarquer que chaque fonction croissante de Δ peut être obtenue comme composition de cobords et codégénérescences. Pour s'en convaincre, caractérisons une fonction croissante $f : [n] \rightarrow [m]$ de Δ comme une suite croissante de n nombres naturels entre 0 et m , que nous pouvons noter $(k_0, \dots, k_n; [m])$. Il suffit alors de remarquer que la pré-composition par le i -ème cobord a pour effet de supprimer la i -ème composante, alors que la pré-composition par la i -ème codégénérescence a pour effet de dupliquer la i -ème composante (figure B.1). Étant donné une fonction $(k_0, \dots, k_n; [m])$, il suffit alors de partir de l'identité $(0, 1, \dots, m; [m])$ (qui peut toujours être obtenue comme $s_0 \circ \partial_0$ cela dit) et de supprimer et dupliquer les entrées nécessaires pour obtenir $(k_0, \dots, k_n; [m])$.

Définition B.3 (Objet simplicial et cosimplicial). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, un **objet simplicial** dans $\mathcal{C}$ est un foncteur

$$\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}.$$

La catégorie des objets simpliciaux sur $\mathcal{C}$ est notée $s\mathcal{C}$, les morphismes sont les transformations naturelles. L'image des cofaces et codégénérescences sont appelées les faces et les dégénérescences.

Un **objet cosimplicial** est un foncteur

$$\Delta \rightarrow \mathcal{C}.$$

La catégorie des objets cosimpliciaux sur $\mathcal{C}$ est notée $\mathcal{C}^\Delta$. L'image des cobords et codégénérescences est également appelée cobords et codégénérescences.

Notons que parfois, les objets simpliciaux et cosimpliciaux sont introduits comme une suite d'espaces avec des morphismes respectant les *identités (co)simpliciales* (p230 et

p267 dans [6]). Dans notre cas, ces identités (co)simpliciales sont déjà contenues dans la catégorie Δ et transmises par fonctorialité.

Notation B.4. Étant donné un objet simplicial $F : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$. On note $F_\bullet$ pour se souvenir de sa nature simpliciale (ou $F^\bullet$ s'il s'agissait d'un objet cosimplicial). L'image de ce foncteur sur un objet $[n]$ de la catégorie Δ est alors notée $F_{[n]}$ ou F_n (resp. $F^{[n]}$ ou F^n) ou $F([n])$ ou encore $F(n)$. L'image des cofaces et codégénérescences est en général simplement notée ∂_i et s_i (resp. ∂^i et s^i).

Les trois exemples suivants justifient sans conteste l'utilisation du terme *(co)simpliciale* dans les définitions précédentes.

Exemple B.5 (Les simplexes standards). La suite des simplexes standards, notée

$$\Delta^\bullet = \left(\Delta^0 \rightrightarrows \Delta^1 \rightrightarrows \Delta^2 \rightrightarrows \dots \right),$$

qui sont introduits dans la définition A.3, peut être vue comme un espace cosimplicial, c'est-à-dire, un élément de la catégorie TOP^Δ . Les cofaces sont ceux de la définition A.3, et les codégénérescences sont les n applications linéaires caractérisées sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$s^i : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n-1}$$

$$e_k \longmapsto \begin{cases} e_k & \text{si } k \leq i \\ e_{k-1} & \text{si } k > i. \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1.$$

Exemple B.6 (Les simplexes singuliers). Les simplexes singuliers définis en A.4 constituent un ensemble simplicial, c'est-à-dire, un élément de la catégorie $s\text{ENS}$. Pour un espace topologique X , on peut effectivement obtenir les simplexes singuliers $\text{Sg}_\bullet(X)$ comme le dual de la composition

$$\Delta \xrightarrow{\Delta^\bullet} \text{TOP} \xrightarrow{\text{TOP}(-, X)} \text{ENS}^{\text{op}}.$$

où $\text{TOP}(-, X)$ est le hom-*foncteur* contravariant dans la catégorie TOP . Notons que si l'on compose ensuite par le foncteur libre dans les R -modules, on obtient un module simplicial, à savoir, un élément de $s\text{MOD}$.

Exemple B.7 (Le simplexe standard). Le simplexe standard Δ^m (seul cette fois-ci) peut être vu comme un ensemble simplicial, noté $\Delta_\bullet^m$ c'est-à-dire, un élément de la catégorie $s\text{ENS}$. On considère, en quelque sorte, tous les sous-simplexes pouvant être obtenus comme cofaces et codégénérescences (au sens de l'exemple B.5) de Δ^m . En notant $\Delta^m := [e_0, \dots, e_m]$, $\partial^i(\Delta^m) := [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_m]$ et $s^i(\Delta^m) := [e_0, \dots, e_i, e_i, \dots, e_m]$, on définit

$$\Delta^m(n) := \{[e_{k_0}, \dots, e_{k_l}] \mid 0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_l \leq m\}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_i : \Delta^m(n) &\longrightarrow \Delta^m(n-1) & s_i : \Delta^m(n) &\longrightarrow \Delta^m(n+1) \\ [e_{k_0}, \dots, e_{k_l}] &\longmapsto [e_0, \dots, \widehat{e_{k_i}}, \dots, e_m], & [e_{k_0}, \dots, e_{k_l}] &\longmapsto [e_{k_0}, \dots, e_{k_i}, e_{k_i}, \dots, e_{k_l}]. \end{aligned}$$

Notons qu'une autre manière de définir $\Delta_\bullet^m$ est de considérer le foncteur

$$\text{hom}_\Delta(\bullet, [m]) : \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \text{ENS}.$$

Montrer l'équivalence entre $\Delta_\bullet^m$ et $\text{hom}_\Delta(\bullet, [m])$ n'est pas sans lien avec l'observation faite à la remarque B.2 : la pré-composition avec des cobords et codégénérescences correspond à la suppression ou à la duplication d'éléments.

Exemple B.8 (La *cobar* construction géométrique, exemple 3.4 [19]). Étant donné un espace topologique X pointé ($x_0 \in X$), l'on peut construire un espace cosimplicial,

$$X^{\times \bullet} = \left(\{x_0\} \rightrightarrows X \rightrightarrows X \times X \rightrightarrows X \times X \times X \rightrightarrows \dots \right),$$

Où

$$\begin{aligned} \partial_0 : X^{\times n} &\longrightarrow X^{\times(n+1)} & \partial_{n+1} : X^{\times n} &\longrightarrow X^{\times(n+1)} \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (x_0, y_1, \dots, y_n), & (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (y_1, \dots, y_n, x_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i : X^{\times n} &\longrightarrow X^{\times(n+1)} \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (y_1, \dots, y_i, y_i, \dots, y_n), \end{aligned}$$

Les dégénérescences correspondent à retirer la i -ème composante.

Remarquons que cet exemple est naturel, dans le sens où une fonction continue pointée $f : X \longrightarrow Y$ induit un morphisme entre $X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ dont chaque composante prend la forme de $f \times \dots \times f$.

Notons qu'il existe une construction qu'on appelle la *totalisation* pour transformer un espace cosimplicial en espace topologique.

Définition B.9 (Totalisation d'un espace cosimplicial). Soit $X^\bullet$ un espace¹ cosimplicial, sa **totalisation** correspond à l'ensemble des morphismes d'espaces cosimpliciaux (transformations naturels) des simplexes standards (exemple B.5) à $X^\bullet$

$$\text{Tot}(X^\bullet) := \text{Nat}(\Delta^\bullet, X^\bullet).$$

1. Pour définir une topologie sur $\text{Nat}(\Delta^\bullet, X^\bullet)$ il faut d'abord considérer la topologie *compacte-ouverte* sur l'ensemble de fonctions continues $(X^n)^{(\Delta^n)}$. On considère alors $\text{Nat}(\Delta^\bullet, X^\bullet)$ comme un sous-espace de l'espace produit $(X^0)^{(\Delta^0)} \times (X^1)^{(\Delta^1)} \times (X^2)^{(\Delta^2)} \times \dots$

L'exercice suivant donne une certaine interprétation à cette définition.

Exercice B.10. Soit X un espace topologique pointé ($x_0 \in X$), alors l'espace des lacets pointés en x_0 , noté $\Omega(X)$ est homéomorphe à $\text{Tot}(X^{\times \bullet})$, la totalisation de la cobar géométrique (voir B.8). (indice : étant donné un élément de $\text{Tot}(X^{\times \bullet})$, montrer que la composante $\Delta^1 \rightarrow X$ caractérise les autres composantes.)

B.2 Normalisation

Pour continuer notre exploration des espaces (co)simpliciaux, il est utile de mentionner deux foncteurs entre $s\text{MOD}$ (la catégorie des modules simpliciaux) et Ch (la catégorie des complexes de chaînes). Le foncteur de *non-normalisation* C et le foncteur de *normalisation* N_* :

$$s\text{MOD} \xrightarrow[N_*]{C_*} \text{Ch}.$$

Définition B.11 (Normalisation simpliciale). Soit $A_\bullet \in s\text{MOD}$ un module simplicial, notons ∂_i et s_i les faces et dégénérescences respectivement. On définit le **complexe non-normalisé** $C(A_\bullet)$ comme

$$\begin{aligned} C_n(A_\bullet) &:= A_n \\ d_C : A_n &\longrightarrow A_{n-1} \\ a &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(a) \end{aligned}$$

et le **complexe normalisé** $N_*(A_\bullet)$ comme

$$\begin{aligned} N_n(A_\bullet) &:= \frac{A_n}{\sum_{i=0}^{n-1} \text{Im}(s_i)} \\ d_N : N_n(A_\bullet) &\longrightarrow N_{n-1}(A_\bullet) \\ [a] &\longmapsto \left[\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(a) \right] \end{aligned}$$

où $[-]$ représente la classe d'équivalence dans le quotient.²

Le foncteur de non-normalisation correspond à ce que nous avons fait pour définir l'homologie d'un espace topologique (section A.1.2). La normalisation peut alors être

2. Le fait que ce complexe forme un complexe de chaînes ($d^2 = 0$) peut être vérifié notamment grâce aux relations $\partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_j$ pour $i < j$.

Le fait que d_N soit bien définie suit des relations $\partial_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} \circ \partial_i & \text{si } i < j \\ \text{id} & \text{si } i = j, j+1 \\ s_j \circ \partial_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases}$.

vue comme une simplification du complexe de chaines ainsi obtenue : on se débarrasse de tous les simplexes dégénérés. Il est alors possible de montrer que cette simplification n'a pas d'impact sur le calcul de l'homologie. Citons simplement ce résultat

Théorème B.12 (Quasi-équivalence de la normalisation simpliciale, théorème 8.3.8 dans [26]). *Soit $A_\bullet \in s\text{MOD}$ un module cosimplicial³, alors*

$$H(C(A_\bullet)) \cong H(N_*(A_\bullet)).$$

Remarque B.13 (Plusieurs normalisations). Il est utile de remarquer qu'en fonction des auteurs, plusieurs normalisations sont utilisées. Dans notre texte, nous avons choisi d'utiliser la normalisation présentée par Bousfield dans [5]. Weibel [26] ou Goerss/Jarine [9] utilisent par exemple une autre normalisation, que nous noterons N_*^W ici :

$$N_n^W(A_\bullet) := \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(\partial_i : A_n \longrightarrow A_{n-1}) \quad \begin{array}{l} d^W : N_n^W(A_\bullet) \longrightarrow N_{n-1}^W(A_\bullet) \\ a \longmapsto (-1)^n \partial_n(a) \end{array}$$

Bien qu'à première vue très différent, il s'avère que $N_*(A_\bullet)$ et $N_*^W(A_\bullet)$ sont isomorphes.⁴

Dualement au cas simplicial, lorsque nous avons affaire à un module cosimplicial, il existe aussi une notion de normalisation.

Définition B.14 (Normalisation cosimpliciale). *Soit $A^\bullet \in \text{MOD}^\Delta$ un module cosimplicial, notons ∂^i et s^i les cofaces et codégénérescences respectivement. On définit le **complexe de cochaines non-normalisé** $C(A^\bullet)$ comme*

$$C^n(A^\bullet) := A^n \quad \begin{array}{l} d^C : A^n \longrightarrow A^{n+1} \\ a \longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i(a) \end{array}$$

*et le **complexe de cochaines normalisé** comme*

$$N^n(A^\bullet) := \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(s^i) \quad \begin{array}{l} d^W : N^n(A_\bullet) \longrightarrow N^{n+1}(A_\bullet) \\ a \longmapsto \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i(a) \end{array}$$

Nous avons également un équivalent cosimplicial du théorème B.12.

3. Ce théorème est en réalité valable pour toute catégorie abélienne.

4. Voir lemme 8.3.7 dans [26] ou théorème 2.1 (chap III) dans [9], où dans les deux cas leur $\frac{A}{D(A)}$ correspond à notre $N_*(A_\bullet)$.

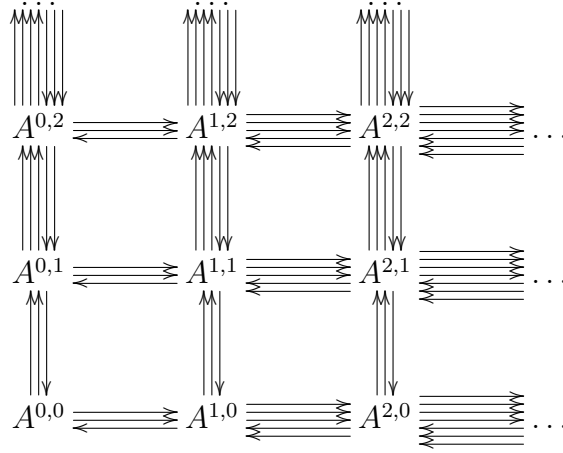


FIGURE B.2 – Représentation d'un module bicosimplicial $A^{\bullet,\bullet}$.

Proposition B.15 (Quasi-équivalences entre normalisation et non-normalisation co-simpliciale). *Soit $A_\bullet \in \text{MOD}^\Delta$, alors*

$$H(C(A^\bullet)) \cong H(N^*(A^\bullet)).$$

B.3 Théorème d'Eilenberg-Zilber

Considérons $A^{\bullet,\bullet}$ un module bicosimplicial, qui peut être vu, comme un foncteur

$$\Delta \times \Delta \longrightarrow \text{MOD},$$

comme en figure B.2. Sur base de ce module bicosimplicial, nous pouvons considérer deux complexes de chaînes. Notons ∂_H^i et ∂_V^i les cofaces horizontales et verticales respectivement. Les deux constructions sont alors

- **La diagonale** : qui consiste à considérer l'espace cosimplicial

$$A^{0,0} \rightrightarrows A^{1,1} \rightrightarrows A^{2,2} \rightrightarrows A^{3,3} \rightrightarrows \dots$$

où les cofaces sont définies comme $\partial^i = \partial_H^i \circ \partial_V^i = \partial_V^i \circ \partial_H^i$, et on prend la somme alternée des cofaces pour obtenir un complexe de chaîne.

- **La totalisation** : qui consiste à prendre la somme alternée de chaque coface pour obtenir un bicomplexe et puis en prendre sa totalisation (dans le sens de la section C.1.1, à signe des indices près). Explicitement, nous obtenons le complexe de chaîne

$$\dots \xrightarrow{D} \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q} \xrightarrow{D} \bigoplus_{p+q=n+1} A^{p,q} \xrightarrow{D} \dots$$

avec $D = \sum_i \partial_V^i + (-1)^p \sum_i \partial_H^i$.

Théorème B.16 (Théorème d'Eleiberg-Zilber, version cosimplicial, théorème 8.5.1 dans [26]). *Soit $A^{\bullet,\bullet}$ un espace vectoriel bicosimplicial, alors, l'homologie de sa diagonale est naturellement isomorphisme à l'homologie de son complexe total.*

Annexe C

Suites spectrales

Table des matières

C.1 Les étapes de construction	128
C.1.1 D'un bicomplexe différentiel à un complexe de chaines filtré (étape 1)	128
C.1.2 D'un complexe de chaines filtré à un couple exact (étape 2)	129
C.1.3 D'un couple exacte à une suite spectrale (étape 3)	132
C.2 A quoi ressemble les premières pages ?	132

Nous reprenons ici les trois étapes clefs pour construire une suite spectrale, comme définie en 2.18.

1. D'un bicomplexe différentiel à un complexe de chaines filtré.
2. D'un complexe de chaines filtré à un couple exact.
3. D'un couple exact à une suite spectrale.

ensuite, nous mentionnerons quelque propriétés classique de cette construction.

Dans ce chapitre, nous travaillerons dans la catégorie des espaces vectoriels.

Pour appréhender le concept de *suites spectrales*, il existe deux livres de références : *A user's guide to spectral sequences* de John McCleary [18], et *An Introduction to Homological Algebra* de Charles A. Weibel [26]. Ils prennent un point de vue direct où ils construisent une suite spectrale à partir d'un complexe bigradué (c'est-à-dire, un module gradué (définition A.10), pour lequel la graduation est sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ plutôt que $\mathbb{Z}$). J'ai choisi dans ce travail de présenter le concept de suite spectral par le formalisme des *couples exacts* de Massey. Nous nous calquerons ainsi sur l'exploration des suites spectrales comme présentées dans une troisième référence, le livre de Bott et Tu [4].

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xleftarrow{D} & T_{n-1} & \xleftarrow{D} & T_n & \xleftarrow{D} & T_{n+1} \xleftarrow{D} \cdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdots & \xleftarrow{D} & F_1^{T_{n-1}} & \xleftarrow{D} & F_1^{T_n} & \xleftarrow{D} & F_1^{T_{n+1}} \xleftarrow{D} \cdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdots & \xleftarrow{D} & F_2^{T_{n-1}} & \xleftarrow{D} & F_2^{T_n} & \xleftarrow{D} & F_2^{T_{n+1}} \xleftarrow{D} \cdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

FIGURE C.1 – Filtration sur un complexe de chaîne

C.1 Les étapes de construction

C.1.1 D'un bicomplexe différentiel à un complexe de chaînes filtré (étape 1)

Commençons par cerner notre objectif en définissant la notion de complexe de chaînes filtré.

Définition C.1 (Filtration). Soit $T = (\cdots \xleftarrow{D} T_{n-1} \xleftarrow{D} T_n \xleftarrow{D} T_{n+1} \xleftarrow{D} \cdots)$ un complexe de chaînes avec une différentielle D , une **filtration** sur T est la donnée d'une suite de sous-complexe de chaînes de T . Explicitement, une filtration est la donnée, pour chaque T_i d'une suite de sous-espace vectoriel $T_i = F_0^{T_i} \supset F_1^{T_i} \supset F_2^{T_i} \supset \cdots$ tel que la restriction de D sur la chaîne

$$\cdots \xleftarrow{D} F_p^{T_{n-1}} \xleftarrow{D} F_p^{T_n} \xleftarrow{D} F_p^{T_{n+1}} \xleftarrow{D} \cdots$$

est bien définie¹. Voir figure C.1.

Donnons nous un bicomplexe différentiel (K, d^V, d^H) comme dans la définition 2.23. Considérons ce qu'on appelle le **complexe total**²

$$\text{Tot}(K) := \left(\cdots \xleftarrow{D} \bigoplus_{q-p=n-1} K_{p,q} \xleftarrow{D} \bigoplus_{q-p=n} K_{p,q} \xleftarrow{D} \bigoplus_{q-p=n+1} K_{p,q} \xleftarrow{D} \cdots \right) \quad (\text{C.1})$$

1. Nous voulons en d'autres mots que $D(F_p^{T_{n+1}}) \subset F_p^{T_n}$.

2. A ne pas confondre avec la totalisation d'un complexe cosimplicial (définition B.9), qui est la même notation !

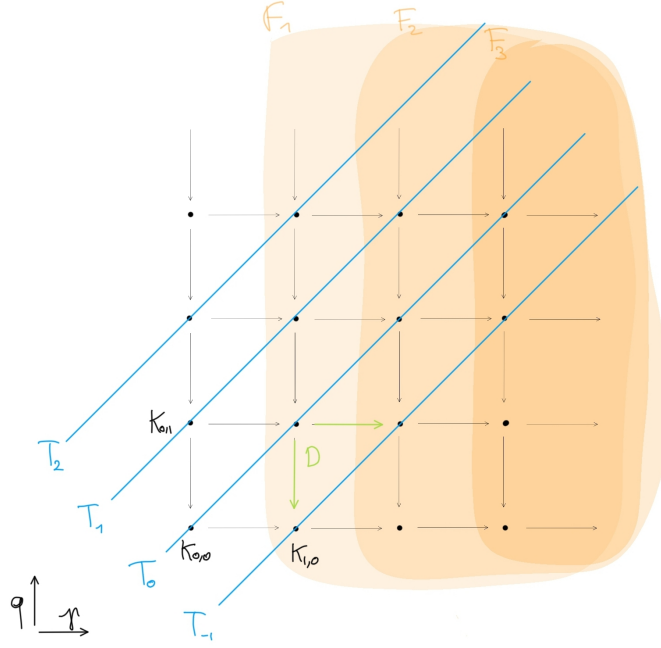


FIGURE C.2 – Représentation du complexe total T avec sa filtration F , construit à partir d'un bicomplexe K .

où³ $D := d^V + (-1)^p d^H$. En notant $T_n := \bigoplus_{p-q=n} K_{p,q}$ on définit alors comme filtration :

$$F_\ell^{T_n} := \bigoplus_{\substack{p-q=n \\ p \geq \ell}} K_{p,q}$$

Notons que le degré n d'un élément de K vu dans $\text{Tot}(K)$ est souvent appelé le **degré total**. Ainsi, un élément de $\text{Tot}(K)$ peut avoir un degré n , ou un bidegré (p, q) . La figure C.2 montre une représentation de la situation.

L'étape 1 de notre plan d'action est maintenant achevée. Notons que tous ce que nous avons fait lors de cette étape était naturelle, dans un sens catégorique du terme.

C.1.2 D'un complexe de chaines filtré à un couple exact (étape 2)

Nous connaissons déjà la notion de filtration sur un complexe de chaines (définition C.1), il nous faut maintenant découvrir la définition d'un couple exact.

Définition C.2 (Couple exact). *Un couple exact est la donnée de deux espaces vectoriels*

3. Le fait que d^H et d^V commutent et sont des différentielles implique bien que $D^2 = 0$.

A et B ainsi que trois morphismes α, β, γ formant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A \\ & \searrow \gamma & \swarrow \beta \\ & B & \end{array}$$

et tels que chaque paire de morphismes est exacte, c'est-à-dire, $\text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$, $\text{Im}(\beta) = \text{Ker}(\gamma)$ et $\text{Im}(\gamma) = \text{Ker}(\alpha)$.

En pratique, les espaces vectoriels A et B seront des espaces vectoriels gradués (voir définition A.10) et α, β et γ des morphismes gradués de degré 0, 0 et 1 respectivement.

Maintenant, étant donné un complexe de chaines filtré (T, D, F^T) comme dans la définition C.1, commençons par construire un complexe de chaines

$$A := \dots \xleftarrow{D} \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} F_{\ell}^{T_{n-1}} \xleftarrow{D} \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} F_{\ell}^{T_n} \xleftarrow{D} \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} F_{\ell}^{T_{n+1}} \xleftarrow{D} \dots$$

où l'on a étendu la filtration vers le haut en posant $F_{\ell}^{T_i} := T_i$ lorsque $\ell < 0$, et l'on définit la différentielle comme étant la différentielle de T sur chaque composante. Au regard de la figure C.1, nous avons pris la somme DIRECT par colonnes. Il est utile de réaliser que si $x \in F_2^{T_n}$ par exemple, ce même x dans $A_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} F_p^{T_n}$ correspond à une infinité d'éléments, parce que x peut être vu comme étant dans $F_1^{T_n}$ ou encore dans $F_0^{T_n}$, mais aussi dans $F_{-1}^{T_n}$, $F_{-2}^{T_n}$, ... L'expression $(x \in F_q^{T_n})$ désignera donc l'élément de A_n , correspondant à x , mais vu dans le terme $F_q^{T_n}$. Nous avons donc par exemple que $(x \in F_2^{T_n}) \neq (x \in F_1^{T_n})$ dans A_l , même si dans T , $x = x$ que l'on regarde x dans $F_2^{T_n}$ ou dans $F_1^{T_n}$.

Considérons maintenant le morphisme $\alpha : A \rightarrow A$ dont chaque composante est donnée par

$$\begin{aligned} \alpha_n : A_n &\rightarrow A_n \\ x \in F_p^{T_n} &\mapsto x \in F_{p-1}^{T_n}. \end{aligned}$$

On vérifie bien que α définit un morphisme de chaines (il commute bien avec D). On constate également que ce morphisme est injectif (direct) mais n'est pas surjectif. En effet, un $y \in F_p^{T_n}$ qui n'appartiendrait pas à la filtration suivante $F_{p+1}^{T_n}$ n'aurait pas d'antécédent à travers α . Nous pouvons alors considérer le conoyau de α , à savoir

$$B_n := \frac{A_n}{\text{Im}(\alpha)} \cong T_n.$$

Pour justifier intuitivement⁴ l'isomorphisme $\frac{A_n}{\text{Im}(\alpha)} \cong T_n$, on peut remarquer que les

4. Pour une justification formelle de cet isomorphisme, il faut décomposer α comme somme directe

éléments qui survivent dans le quotient $\frac{A_n}{\text{Im}(\alpha)}$ sont exactement les $y \in F_p^{T_n}$ qui n'appartiennent pas à $F_{p+1}^{T_n}$, pour chaque p . En additionnant tous ces y , on retrouve bien T_n .

Notons alors β la projection sur le quotient, c'est-à-dire, $\beta_n : A_n \longrightarrow B_n$. La différentielle

obtient une suite exacte courte de complexes de chaîne

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow 0 .$$

Le lemme du zigzag (théorème 1.3.1 dans [26]) nous donne alors une longue suite exacte, en écrivant α_1 et β_1 pour les morphismes induits en homologie :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \xrightarrow{\beta_1} & H_{n+1}(B) & & \\ & & \xleftarrow{\gamma_1} & & & & \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow{\gamma_1} & H_n(A) & \xrightarrow{\alpha_1} & H_n(A) & \xrightarrow{\beta_1} & H_n(B) & \\ & & \xleftarrow{\gamma_1} & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & \xrightarrow{\gamma_1} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{\alpha_1} & \dots & & & \end{array}$$

En posant $H(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(A)$ et $H(B) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n(B)$, cette longue suite exacte correspond exactement au couple exact :

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{\alpha_1} & H(A) \\ & \searrow \gamma_1 \quad \swarrow \beta_1 & \\ & H(B) & \end{array} \quad (\text{C.2})$$

où α_1, β_1 et γ_1 sont des morphismes gradués, de degré 0, 0 et -1 respectivement. Nous sommes donc parvenus à créer un couple exact depuis un complexe différentiel filtré (T, D, F^T) , l'étape 2 de notre plan d'action est maintenant achevée. Notons qu'une vérification assidue (que nous omettrons dans ce document) permettrait de montrer que tout ce procédé est naturel, au sens catégorique du terme. La naturalité du lemme du zigzag en étant un élément clef.

de morphismes $\alpha_i : F_p^{T_n} \longrightarrow A_n$. On utilise alors que l'image de α et la somme de l'image des α_i . En sachant que le quotient de la somme est la somme des quotients, on obtient que $\frac{A_n}{\text{Im}(\alpha)} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \frac{F_p^{T_n}}{F_p^{T_n-1}}$, ce qui dans le cas des corps permet de reconstruire T_n .

C.1.3 D'un couple exacte à une suite spectrale (étape 3)

Étant donné un couple exact

$$\begin{array}{ccc} A^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A^1 \\ & \searrow \gamma_1 \quad \swarrow \beta_1 & \\ & B^1 & \end{array}$$

comme celui de l'équation C.2 par exemple, nous allons en créer un deuxième, appelé le **couple exact dérivé**. Précisément, on pose

$$\begin{array}{ccc} A^2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A^2 \\ & \searrow \gamma_2 \quad \swarrow \beta_2 & \\ & B^2 & \end{array}, \tag{C.3}$$

avec

$$A^2 := \text{Im}(\alpha_1) \subset A^1 \quad B^2 := H(B^1; \beta_1 \circ \gamma_1).$$

En notant $\alpha_1(a)$ un élément quelconque de A^2 , et $[b]$ un élément de B^2 , on définit

$$\alpha_2(\alpha_1(a)) := \alpha_1(\alpha_1(a)), \quad \beta_2(\alpha_1(a)) := [\beta_1(a)], \quad \gamma_2([b]) := \gamma_1(b).$$

Il y a de multiples vérifications à effectuer (voir [4] p155).

- Pour β_2 : indépendance du choix de a et $\beta_1(a) \in \ker(\beta_1 \circ \gamma_1)$.
- Pour γ_2 : indépendance du choix de b et $\gamma_1(b) \in \text{Im}(\alpha_1)$.

Finalement, on peut également vérifier que le couple est toujours exact en chaque élément. Notons aussi que ce processus est naturel, dans le sens où il transporte des *morphismes de couples exacts* sur des morphismes de couples exact, nous ne rentrerons pas dans plus de détails.

En répétant ce processus de dérivation autant de fois que nous le souhaitons, nous obtenons la suite spectrale (E^r, d^r) :

$$E^r := B^r \quad d^r := \beta_r \circ \gamma_r.$$

C.2 A quoi ressemble les premières pages ?

Précédemment, nous venons d'expliquer chaque étape de la création d'une suite spectrale. Ces étapes peuvent être vues de manière indépendante. C'est-à-dire, si par hasard, nous rencontrions dans la nature, un couple exact, nous serions toujours capable de créer

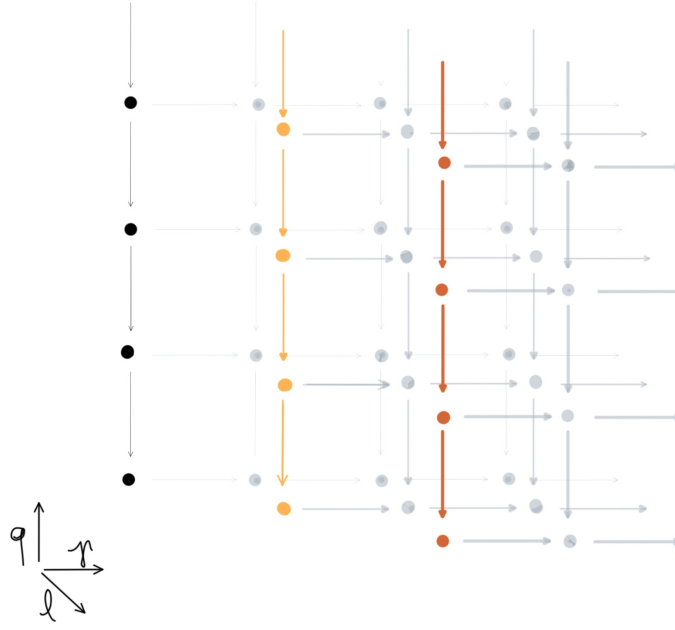


FIGURE C.3 – Représentation de complexe de chaînes $A = \bigoplus_\ell F_\ell$, où F est la filtration sur le complexe total d'un bicomplexe K .

une suite spectrale, même si ce couple exact ne provient pas d'un complexe de chaînes filtré.

Dans cette section, nous allons scruter la structure des suites spectrales, pour les trois premières pages, lorsqu'elles sont issues d'un bicomplexe différentiel, (K, d^H, d^V) .

Nous donnerons aussi un critère de dégénérescence, à savoir, la présence de l'une des deux différentielles nulle.

Lemme C.3 (La 0-ème page de la suite spectrale). *Si $(E^r(K), d^r)$ est la suite spectrale créé à partir d'un bicomplexe (K, d^H, d^V) , alors, la 0-ème page est naturellement munie d'une bigraduation, et*

$$E_{p,q}^0(K) := K_{p,q} \qquad \begin{aligned} d^0 : E_{p,q}^0 &\longrightarrow E_{p,q-1}^0 \\ x &\longmapsto d^V(x). \end{aligned}$$

Démonstration. En partant du bicomplexe K , on remarque d'abord que le complexe de chaînes A construit à l'étape 1 est naturellement muni d'une structure tri-graduée. En effet, aux graduations p et q s'ajoute la graduation l correspondant à la filtration, voir figure C.3. Sur cette figure, l'image de l'inclusion des couches de filtration les unes dans les autres est représentée en gris. Le quotient de A par cette image, correspond

exactement à ce que nous avons appelé B , à savoir, la première page de notre suite spectrale. B est alors naturellement muni d'une bigraduation, étant donné que $B \cong K$, comme précédemment expliqué.

La différentielle de B est la différentielle induite sur le quotient par la différentielle $D = d^V \pm d^H$ sur A (elle-même issue de celle de K). Cependant, dans le quotient, la composante horizontale de cette différentielle ne survit pas. Ainsi, la différentielle de B n'est simplement que la différentielle verticale. $\square$

Lemme C.4 (La première page de la suite spectrale). *Si $(E^r(K), d^r)$ est la suite spectrale créée à partir d'un bicomplexe (K, d^H, d^V) , alors, la première page est naturellement munie d'une bigraduation, et*

$$E_{p,q}^1(K) := H(K_{p,q}; d^V) \qquad d^1 : E_{p,q}^1 \longrightarrow E_{p+1,q}^1$$

$$[x] \longmapsto (-1)^p [H(d^H)(x)] .$$

Démonstration. Comme la première page est définie comme l'homologie de la page 0, nous savons directement que $E_{p,q}^1(K) := H(K_{p,q}; d^V)$.

Nous savons que la différentielle d^1 , par construction, correspond à la composition

$$H(B; d^V) \xrightarrow{\gamma_1} H(A; D) \xrightarrow{\beta_1} H(B; d^V)$$

en reprenant les notations du diagramme C.2. C'est-à-dire, γ_1 est le morphisme du lemme du zigzag et β_1 est le morphisme, en homologie, correspondant à la projection sur le quotient $\beta : A \longrightarrow B$.

Prenons $[x] \in H(K_{p,q}) = H(B_{p,q})$, en notant " $(-) \in F_\ell$ " les éléments de A (comme à l'étape 2), nous allons montrer que $\gamma_1([x]) = [(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]$. Pour trouver l'image de $[x]$ à travers l'application du lemme du zigzag, il faut trouver x'' comme dans la figure C.4. la première étape consiste à trouver x' , un antécédent de x à travers β , la projection sur le quotient. Nous choisirons $(x \in F_p)$ dans A_n .

En envoyant cet élément à travers $D = d^V + (-1)^p d^H$, on s'aperçoit que la composante d^V disparaît, parce que x est un cycle pour cette différentielle.

On cherche alors x'' un antécédent de $((-1)^p d^H(x) \in F_p)$ à travers le morphisme α qui correspond à l'inclusion de filtrations. On trouve alors $x'' = ((-1)^p d^H(x) \in F_{p+1})$, à savoir, le même élément, mais vu dans la filtration suivante. La classe d'homologie de cet élément est exactement ce que nous cherchons.

Pour trouver la différentielle de la page 1, il nous faut finalement envoyer cet élément $[(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]$ à travers β_1 . Ce qui correspond à projeter $(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}$ sur le quotient, pour obtenir simplement $[(-1)^p d^H(x)]$ dans $H(B_{p+1,q})$, comme souhaité. $\square$

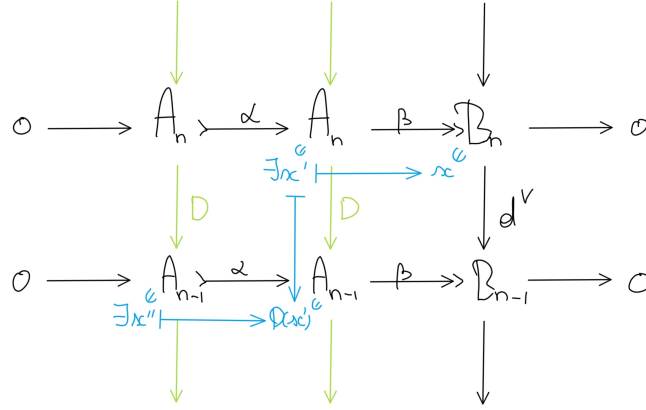


FIGURE C.4 – Illustration de la définition de γ_1 grâce au lemme du zigzag.

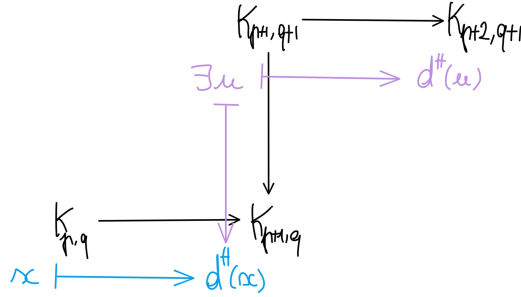


FIGURE C.5 – Définition de u pour la définition de la différentielle à la page 2.

Lemme C.5 (La deuxième page de la suite spectrale). *Si $(E^r(K), d^r)$ est la suite spectrale créée à partir d'un bicomplexe (K, d^H, d^V) , alors, la deuxième page est naturellement munie d'une bigraduation, et correspond à l'homologie selon la différentielle verticale puis horizontale :*

$$E_{p,q}^2(K) := H \left(H(K_{p,q}; d^V); H(\pm d^H) \right)$$

La différentielle de la deuxième page correspond alors à l'application

$$\begin{aligned} d^2 : E_{p,q}^2(K) &\longrightarrow E_{p+2,q+1}^2(K) \\ [[x]] &\longmapsto [[d^H(u)]], \end{aligned}$$

où u est un élément de $K_{p+1,q+1}$ tel que $d^V(u) = d^H(x)$ (voir figure C.5).

Démonstration. Le fait que $E_{p,q}^2(K)$ corresponde à l'homologie prise par rapport à la différentielle verticale suivie de la différentielle horizontale suit directement des lemmes C.3 et C.4.

Concernant la différentielle d^2 , comme précédemment, il faut comprendre la composition

$$H(B^1) \xrightarrow{\gamma_2} A^2 \xrightarrow{\beta_2} H(B^1; d^V)$$

où γ_2 et β_2 sont les morphismes créés à l'étape 3 du couple exact dérivé (voir équation C.3).

Commençons par prendre $[[x]]$ dans $H(B_{p,q}^1)$ représenté par un certain $x \in K_{p,q}$. Notons la condition suivante sur ce x :

$$d^H(x) \in \text{Im}(d^V) \quad (\text{C.4})$$

Ceci est une conséquence du fait que $[x]$ est un cycle pour la différentielle $H(\pm d^H)$, ce qui veut dire, en d'autres termes, que $[d^H(x)] = 0 \in H(K_{p+1,q})$.

Commençons par envoyer $[[x]]$ à travers γ_2 . Par définition, $\gamma_2([[x]]) = \gamma_1([x])$. Un coup d'œil dans la démonstration du lemme précédant nous apprend alors que $\gamma_1([x]) = [x''] = [(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]$.

Nous cherchons maintenant à envoyer ce dernier à travers β_2 . Pour pouvoir utiliser la définition de β_2 (voir diagramme C.3), il faut toutefois écrire $[(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]$ comme un élément de l'image de α_1 . La clef est alors de considérer $u \in F_{p+1}$ (avec $u \in K_{p+1,q+1}$) tel que $d^V(u) = d^H(x)$, qui existe, grâce à la condition C.4 précédemment citée. Ainsi, on constate directement que dans $A_1 = H(A; D)$,

$$[d^H(x) \in F_{p+1}] = [(-1)^p d^H(u) \in F_{p+1}]$$

parce que $D(u) = d^V(u) + (-1)^{p+1} d^H(u) = (d^H(x) - (-1)^p d^H(u)) \in \text{Im}(D)$. Nous avons donc réussi à écrire l'élément $[(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]$ comme $\alpha_1([d^H(u) \in F_{p+2}])$, où $d^H(u) \in F_{p+2}$ est bien défini, car $d^H(u) \in K_{p+2,q+1}$. Nous savons alors, par définition, que $\beta_2([(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]) = [\beta_1([d^H(u) \in F_{p+2}])] = [[d^H(u)]]$.

Pour conclure, nous avons bien trouvé que

$$\beta_2 \circ \gamma_2([[x]]) = \beta_2([(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}]) = [[d^H(u)]] \quad \square$$

Exercice C.6 (Degré des différentielles suivantes). Si $(E^r(K), d^r)$ est la suite spectrale créée à partir d'un bicomplexe (K, d^H, d^V) , alors la différentielle de la page r est un morphisme $d^r : E_{p,q}^r(K) \longrightarrow E_{p+r,q+r-1}^r(K)$ de bidegré $(r, r-1)$.

Lemme C.7 (Condition de dégénérescence). *Soit (E^r, d^r) une suite spectrale construite à partir d'un bicomplexe (K, d^H, d^V) , alors*

1. *Si d^H est nul, alors la suite spectrale dégénère à la page 1.*
2. *Si d^V est nul, alors la suite spectrale dégénère à la page 2.*

Démonstration. 1) supposons que d^H est nul. Au vu de la démonstration du lemme C.4, nous avons alors, que γ_1 , dans le premier couple exact dérivé est nul. Comme tous les γ_r , des couples exactes dérivés suivants dépendent, par définition, de γ_1 , il s'ensuit alors que tous les γ_r sont nuls. Comme les différentielles sont définies comme $d_r = \beta_r \circ \gamma_r$, il s'ensuit qu'elles sont toutes nulles, et donc que la suite spectrale dégénère.

2) Supposons que d^V est nul. Au vu de la démonstration du lemme C.5, le u de la définition de la deuxième page peut être choisi comme étant $u = 0$ (voir équation C.4 notamment). Ainsi, avec toutes les notations de la démonstration du lemme C.5, si $u = 0$, on trouve

$$\gamma_2([[x]]) = [(-1)^p d^H(x) \in F_{p+1}] = \alpha_1(d^H(u) \in F_{p+2}) = 0.$$

Ceci montre que γ_2 est nul, et donc tous les γ_r suivants le seront également. La différentielle, à chaque page, le sera alors aussi, ce qui implique directement la dégénérescence de la suite spectrale. $\square$

Bibliographie

- [1] Frank Adams. On the cobar construction. In *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volume 42, pages 409–412. National Academy of Sciences, 1956.
- [2] Pedro Boavida, Joana Cirici, and Geoffroy Horel. Equivariant formality of the little disks operad. *Forum of Mathematics, Pi*, 14, 2026.
- [3] Armand Borel. Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de lie compacts. *Annals of Mathematics, Second Series*, 57(1) :115–207, 1953.
- [4] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, chapter III. Springer New York, 1982.
- [5] Aldridge K. Bousfield. On the homology spectral sequence of a cosimplicial space. *American Journal of Mathematics*, 109(2) :361–394, 1987.
- [6] Aldridge K. Bousfield and Daniel M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. Springer Berlin, Heidelberg, 1972. lecture Notes in Mathematics.
- [7] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational Homotopy Theory*. Springer New York, NY, 2000.
- [8] Yves Félix, John Oprea, and Daniel Tanré. *Algebraic Models in Geometry*. Oxford University Press, 2008.
- [9] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Birkhäuser Basel, 2009.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] Anton Khoroshkin and Thomas Willwacher. Real models for the framed little n -disks operads. *Journal of Topology*, 18(4) :e70042, 2025.
- [12] Ben Knudsen. Lie algebras and the (co)homology of configuration spaces. To appear in Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2025.
- [13] Maxime Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. *Letters in Mathematical Physics*, 1999.
- [14] Pascal Lambrechts, Victor Turchin, and Ismar Volić. The rational homology of spaces of long knots in codimension > 2 . *Geometry and topology*, 14(4) :2151–2187, 2010.
- [15] Pascal Lambrechts and Ismar Volić. Formality of the little N -disks operad. *arXiv e-prints*, August 2008.
- [16] Jean-Louis Loday and Bruno Valette. *Algebraic Operads*. Springer Berlin, Heidelberg, 2012.

- [17] Martin Markl, Steve Shnider, and Jim Stasheff. *Operads in Algebra, Topology and Physics*. American Mathematical Society, 2002.
- [18] John McCleary. *A user's guide to spectral sequences*, volume Second Edition. Cambridge University Press, 2001.
- [19] James E. McClure and Jeffrey H. Smith. Operads and cosimplicial objects : An introduction. *Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory*, 131, 2004.
- [20] Shunji Moriya. Multiplicative formality of operads and sinha's spectral sequence for long knots. *Kyoto journal of mathematics*, 55(1) :17–27, 2015.
- [21] Shunji Moriya. Non-formality of the odd dimensional framed little balls operads. *International Mathematics Research Notices*, 2019(2) :625–639, 2019.
- [22] Paolo Salvatore. Knots, operads and double loop spaces. *International Mathematics Research Notices*, 2006.
- [23] Paolo Salvatore and Nathalie Wahl. Framed discs operads and batalin-vilkovisky algebrea. *Quarterly Journal of Mathematics*, 54(2) :213–231, 2003.
- [24] Dev P. Sinha. operads and knot spaces. *Journal of the American Mathematical Society*, 19(2) :461–486, 2006.
- [25] Victor Tourtchine. On the homology of spaces of long knots. *Advances in Topological Quantum Field Theory*, 179, 2004.
- [26] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press, 1994.

