

Faculté des sciences

Les nombres complexes dans l'enseignement secondaire

Auteure : Aline Blothiaux

Promoteur·rices : Laure Ninove et Jean Van Schaftingen

Lecteur·rices : Cécile Coyette et Enrico Vitale

Année académique 2023-2024

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Les nombres complexes dans l'enseignement secondaire

Aline Blothiaux

Promoteurs : Laure Ninove et Jean Van Schaftingen

Lecteurs : Cécile Coyette et Enrico Vitale

Mémoire
Juin 2024

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenue dans la rédaction de ce mémoire.

Tout d'abord, je remercie mes promoteurs, Laure Ninove et Jean Van Schaftingen, pour leurs précieux conseils et le temps qu'ils ont consacré à mon encadrement.

Je suis également reconnaissante envers les professeures et professeurs qui m'ont permis d'observer leurs classes.

Un grand merci à toutes les personnes ayant pris le temps de répondre au questionnaire partagé.

Je tiens à remercier Cécile Coyette et Enrico Vitale d'avoir accepté de lire mon mémoire.

Enfin, je remercie mes proches pour leur soutien constant et leurs encouragements, et en particulier Hugo pour sa relecture attentive de ce mémoire.

Introduction

Dans ce travail, nous explorerons le monde des nombres complexes sous plusieurs angles, en nous concentrant particulièrement sur leur enseignement au niveau secondaire et en proposant des améliorations pédagogiques. Ce travail se divise en trois parties.

Dans la première partie, nous plongerons dans les fondements théoriques des nombres complexes, structurant notre exploration en trois sections distinctes. Nous commencerons par détailler les différentes représentations des nombres complexes, mettant en lumière leur diversité et leur pertinence dans diverses opérations mathématiques. Ensuite, nous illustrerons l'utilité des nombres complexes à travers différents exemples d'applications concrètes, démontrant leur avantage dans des domaines variés. Enfin, nous nous concentrerons sur les nombres, en examinant leur extension ensembliste et en révélant les obstacles conceptuels propres à chaque ensemble. Nous retracerons également l'évolution historique des nombres et analyserons dans quel ordre ils sont enseignés.

La seconde partie se penchera sur l'enseignement des nombres complexes dans les filières dites « scientifiques ». Nous explorerons les programmes d'enseignement des nombres complexes. Nous examinerons également la place du chapitre des nombres complexes dans le contexte des mathématiques modernes. Par la suite, nous nous pencherons sur les différentes structures adoptées par les enseignants pour aborder ce chapitre. Une attention particulière sera accordée à la compétence de transfert, souvent négligée dans l'enseignement des nombres complexes. Nous explorerons ensuite différentes approches possibles pour introduire ce chapitre, offrant ainsi une variété de perspectives pédagogiques. De plus, nous analyserons la manière dont les élèves appréhendent les nombres complexes, en examinant leurs réactions initiales à ce concept abstrait ainsi que les erreurs et difficultés fréquemment rencontrées dans les exercices et interrogations. Enfin, nous répondrons à la question : pourquoi enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire ?

La troisième partie concernera mes réflexions personnelles. Je décrirai les outils pédagogiques que j'envisage de mettre en œuvre dans mes propres classes. Cette description sera basée sur l'analyse globale des pratiques observées, avec l'objectif d'enrichir l'enseignement des nombres complexes au niveau secondaire.

Ce travail vise à offrir une vision globale de l'enseignement des nombres complexes, en intégrant des perspectives théoriques, pratiques et pédagogiques. Nous espérons ainsi contribuer à une meilleure compréhension et à une amélioration des méthodes d'enseignement de ce concept fondamental des mathématiques.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	6
1 Exploration des fondements théoriques des nombres complexes	9
1.1 Les différentes représentations des nombres complexes	9
1.1.1 Représentation algébrique	10
1.1.2 Représentation géométrique	14
1.1.3 Représentation trigonométrique	17
1.1.4 Représentation exponentielle	21
1.1.5 Représentation matricielle	23
1.2 Exemples d'applications des nombres complexes	28
1.2.1 Exemple 1 : ingénierie électrique	28
1.2.2 Exemple 2 : signaux périodiques	29
1.3 Les nombres	33
1.3.1 Extension ensembliste des nombres	33
1.3.2 L'histoire des nombres	35
1.3.3 L'enseignement des nombres	36
2 L'enseignement des nombres complexes	38
2.1 Les programmes de l'enseignement secondaire	39
2.1.1 Comment les programmes de l'enseignement secondaire sont-ils construits ?	39
2.1.2 Analyse des programmes dans l'enseignement de transition en ma- thématiques pour scientifiques (6h/semaine)	39
2.1.3 Analyse des programmes dans l'enseignement de qualification axé sur les métiers d'industrie	41
2.1.4 Les nombres complexes durant les mathématiques modernes	44
2.2 Structuration du chapitre sur les nombres complexes par différents ensei- gnants	45
2.3 Utilisation des nombres complexes pour démontrer une propriété géomé- trique ou résoudre un problème de géométrie plane.	46
2.4 Introductions du chapitre	50
2.4.1 Introduction par extension des nombres	50
2.4.2 Introduction par la démarche de Cardan	52

2.4.3	Introduction "découverte d'un nouveau monde"	55
2.4.4	Introduction vectorielle	57
2.5	Perception du chapitre des nombres complexes par les élèves	61
2.5.1	Réactions des élèves face à ces nouveaux nombres et conseils	61
2.5.2	Erreurs et difficultés observées en classe (cadre formatif)	62
2.5.3	Erreurs et difficultés observées lors des interrogations (cadre certifi- catif)	63
2.5.4	Réactions et erreurs observées dans la littérature	66
2.6	Pourquoi enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire ?	69
2.6.1	L'utilité pratique	71
2.6.2	La transversalité	71
2.6.3	Le développement cognitif	72
2.6.4	Vision dynamique et évolutive des mathématiques	73
2.6.5	L'histoire	74
2.6.6	La préparation académique	74
3	Réflexion personnelle	76
	Conclusion	79
A	Résumé des opérations dans les différentes représentations des nombres complexes	80
B	Référentiel et programmes d'enseignement	82
B.1	Les nombres complexes dans le référentiels de la FWB pour les 6ème GT-TT	83
B.2	Les nombres complexes : programme du Segec pour les 6ème GT-TT . . .	84
B.3	Les nombres complexes : programme de la WBE pour les mathématiques pour scientifiques	86
B.4	Les nombres complexes : programme du SeGEC pour les 6ème TQ - 4 périodes	91
B.5	Les nombres complexes : programme de la WBE pour les mathématiques liées aux spécificités des options du troisième degré technique et artistique de qualification 4 périodes/semaine	93
C	Tables des matières des écoles observées	97
D	Réponses au questionnaire partagé aux professeurs de mathématiques	103

Chapitre 1

Exploration des fondements théoriques des nombres complexes

Dans ce chapitre, nous aborderons les fondements théoriques des nombres complexes, structurant notre exploration en trois parties distinctes.

Tout d'abord, nous détaillerons les différentes représentations des nombres complexes, soulignant leur diversité et leur pertinence dans les opérations.

Ensuite, des exemples concrets d'application des nombres complexes seront présentés, montrant leur importance dans différents domaines.

Enfin, nous nous pencherons sur les nombres eux-mêmes, en examinant leur extension ensembliste et révélant les obstacles conceptuels propres à chaque ensemble. Nous retracerons leur évolution historique et analyserons dans quel ordre ils sont enseignés.

1.1 Les différentes représentations des nombres complexes

Les nombres complexes constituent un domaine transversal des mathématiques, avec une diversité de représentations. Dans cette section, nous explorerons cinq représentations des nombres complexes : algébrique, géométrique, trigonométrique, exponentielle et matricielle. Chaque représentation offre une perspective différente sur les nombres complexes, mettant en lumière leurs caractéristiques et leurs opérations sous des angles différents. Il est important de noter que certaines représentations peuvent être plus adéquate pour certaines opérations. Le but de cette section est de découvrir les avantages des différentes représentations des nombres complexes, en mettant en évidence la pertinence de chacune selon les opérations mathématiques considérées : égalité, somme, produit, puissance, quotient, conjugué, opposé.

1.1.1 Représentation algébrique

Pour tout nombre complexe z , il existe un unique couple de réels (a, b) tel que z peut s'écrire sous la forme $a + bi$, dite « forme algébrique » où a et b sont des nombres réels, et i est défini comme l'unité imaginaire avec $i^2 = -1$.

Considérons $z_1 = a_1 + b_1i$ et $z_2 = a_2 + b_2i$ afin d'effectuer diverses opérations avec ceux-ci.

Égalité

Sous la forme algébrique, deux nombres complexes sont égaux $z_1 = z_2$ si et seulement si leurs parties réelles a_1 et a_2 sont égales et leurs parties imaginaires b_1 et b_2 sont également égales. Ceci découle de l'unicité de la forme algébrique. En effet, un nombre complexe est entièrement déterminé par ses parties réelle et imaginaire.

Somme

La définition de la somme de deux nombres complexes sous forme algébrique est directe : il suffit d'additionner les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + b_1i + a_2 + b_2i \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \end{aligned}$$

Produit

Concernant le produit de deux nombres complexes sous forme algébrique, nous devons distribuer chaque terme du premier nombre complexe avec chaque terme du deuxième nombre complexe, en utilisant les règles de multiplication de nombres réels et en se rappelant que $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Puissance

Pour calculer la puissance d'un nombre complexe exprimé sous forme algébrique, nous utilisons le binôme de Newton. Cette méthode requiert une compréhension des propriétés des puissances de i . En effet, les puissances successives de i suivent un motif périodique : i , -1 , $-i$ et 1 , et i élevé à une puissance multiple de 4 est égal à 1.

$$\begin{aligned} z_1^n &= (a + bi)^n \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p (bi)^{(n-p)} \end{aligned}$$

En résumé, pour le produit et la puissance de nombres complexes sous forme algébrique, le processus est moins direct que pour la somme. Il nécessite une manipulation plus délicate des termes et une compréhension plus approfondie des propriétés des nombres complexes.

Conjugué

Le concept de conjugué d'un nombre complexe z_1 est intimement lié au binôme conjugué, il est noté $\bar{z}_1$ et est défini comme $\bar{z}_1 = a_1 - b_1i$. Celui-ci est compatible avec l'addition et la multiplication : $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. En effet,

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)} \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i \\ &= (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i) \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\end{aligned}$$

Inverse

Concernant l'inverse $\frac{1}{z_1}$, pour obtenir un nombre complexe sous la forme $a + bi$, nous ne laissons pas de terme i au dénominateur. Pour neutraliser ce terme i au dénominateur, nous utilisons le conjugué du nombre complexe, cela nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1} &= \frac{1}{a_1 + b_1i} \\ &= \frac{(a_1 - b_1i)}{(a_1 + b_1i)(a_1 - b_1i)} \\ &= \frac{(a_1 - b_1i)}{(a_1^2 + b_1^2)} \\ &= \frac{\bar{z}_1}{(a_1^2 + b_1^2)}\end{aligned}$$

Quotient

A propos du quotient, pour obtenir un nombre complexe sous la forme $a + bi$, comme

précédemment nous ne laissons pas de terme i au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} \\
&= \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}$$

Opposé

L'opposé d'un nombre complexe z_1 sous forme algébrique est simplement obtenu en changeant le signe des parties réelle et imaginaire, ce qui donne $-z_1 = -a_1 - b_1 i$.

Cette représentation algébrique des nombres complexes, attribuée à Cauchy, offre une perspective intéressante en les reliant aux polynômes à coefficients réels. En effet, derrière la proposition que le nombre imaginaire i satisfait $i^2 = -1$ se cache une connexion profonde entre les nombres complexes et l'algèbre des polynômes réels. L'ensemble des nombres complexes peut être vu comme l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels modulo le polynôme $X^2 + 1$. [9] Ceci implique qu'il existe un isomorphisme entre le quotient $\mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$ et le corps de nombres complexes $\mathbf{C}$.

En effet, soit l'application $f : R[X] \rightarrow R[X]/(X^2 + 1)$ qui envoie $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ sur $p(i) = \sum a_j i^j$, comme $f(a+bx) = a+bi, \forall a, b \in \mathbf{R}$, alors f est surjective.

Pour obtenir le nombre complexe associé au polynôme réel $p_1(x) = 5x^7 + 3x^4 + 8x^3 - 5x^2 + x + 6$, nous avons deux approches. La première consiste à remplacer chaque occurrence de x par i dans le polynôme réel, sachant que $i^2 = -1$, cela nous permet de simplifier les termes contenant des puissances de i supérieures à 1. En additionnant ensuite les parties réelles et imaginaires, nous obtenons le nombre complexe correspondant. La seconde méthode implique de diviser le polynôme réel par $x^2 + 1$ en utilisant la division euclidienne. En conservant le reste de cette division, nous obtenons un polynôme de degré au plus 1, ayant une expression de la forme $a + bx$, qui correspond à un nombre complexe $a + bi$. En appliquant ces deux méthodes, nous aboutissons au même résultat : le nombre complexe $14 - 12i$.

Dans notre exemple, le polynôme réel $p_1(x)$ correspond en effet à un seul nombre complexe, mais un nombre complexe donné, comme $14 - 12i$, peut être le résultat de plusieurs polynômes différents. Cela met en évidence la propriété de surjectivité, où différents polynômes réels peuvent être associés au même nombre complexe dans l'espace complexe.

De plus, soit $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ et $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ et supposons que $m \geq n$,

$$\begin{aligned}
 f(p(x) + q(x)) &= f\left(\sum_{j=0}^n a_j x^j + \sum_{k=0}^m b_k x^k\right) \\
 &= f\left(\sum_{l=0}^m (a_l + b_l) x^l\right) \\
 &= \sum_{l=0}^m (a_l + b_l) i^l \\
 &= \sum_{j=0}^n a_j i^j + \sum_{k=0}^m b_k i^k \\
 &= p(i) + q(i) \\
 &= f(p(x)) + f(q(x))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 f(p(x)q(x)) &= f\left(\sum_{j=0}^n a_j x^j \cdot \sum_{k=0}^m b_k x^k\right) \\
 &= f\left(\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k x^{j+k}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k i^{j+k} \\
 &= \sum_{j=0}^n a_j i^j \cdot \sum_{k=0}^m b_k i^k \\
 &= p(i)q(i) \\
 &= f(p(x))f(q(x))
 \end{aligned}$$

en conclusion f est un homomorphisme.

Reprenons $p_1(x)$ de l'exemple précédent avec $p_1(i) = 14 - 12i$ et prenons un autre polynôme réel $p_2(x) = x^5 - x^2 + 2$ avec $p_2(i) = 3 + i$.

$$\begin{aligned}
 f(p_1(x) + p_2(x)) &= f(5x^7 + x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + x + 8) \\
 &= 5i^7 + i^5 + 3i^4 + 8i^3 - 6i^2 + i + 8 \\
 &= -5i + i + 3 - 8i + 6 + i + 8 \\
 &= 17 - 11i \\
 &= 14 - 12i + 3 + i \\
 &= p_1(i) + p_2(i)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(p_1(x)p_2(x)) &= f(5x^{12} - 2x^9 + 8x^8 + 5x^7 - 2x^6 - 2x^5 + 11x^4 + 15x^3 - 16x^2 + 2x + 12) \\
&= 5i^{12} - 2i^9 + 8i^8 + 5i^7 - 2i^6 - 2i^5 + 11i^4 + 15i^3 - 16i^2 + 2i + 12 \\
&= 5 - 2i + 8 - 5i + 2 - 2i + 11 - 15i + 16 + 2i + 12 \\
&= 54 - 22i \\
&= (14 - 12i) \cdot (3 + i) \\
&= p_1(i)p_2(i) \\
&= f(p_1(x))f(p_2(x))
\end{aligned}$$

Le noyau de l'application f est l'ensemble de tout les polynômes $p(x) \in \mathbf{R}[\mathbf{X}]$ tel que $p(i) = 0$. Notons que les polynômes réels ont toujours des racines complexes qui se présentent par paires conjuguées. Ainsi, si $p(i) = 0$, alors $p(-i) = 0$ également. Cela découle du fait que pour tout polynôme réel $p(x)$, si z est une racine complexe de $p(x)$, alors son conjugué $\bar{z}$, est aussi une racine de $p(x)$. Alors le polynôme réelle évalué en i s'annule si et seulement si $p(x)$ est divisible par $(x - i)$ et $(x + i)$. Cependant, comme $(x - i)$ et $(x + i)$ sont irréductibles, n'importe quel polynôme divisible par les deux, est divisible par leur produit $(x^2 - i^2) = (x^2 + 1)$. En conclusion, le noyau de l'application f est l'ensemble des polynômes divisible par $x^2 + 1$. Par le premier théorème de l'isomorphisme : *Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme entre deux anneaux A et B . Alors $A/\text{Ker}(f)$ est isomorphe à $\text{Im}(f)$* , nous pouvons donc affirmer que $\mathbf{R}[\mathbf{X}]/(x^2+1) \cong \mathbf{C}$.

1.1.2 Représentation géométrique

Le plan de Gauss, également connu sous le nom de plan complexe, est un outil visuel utilisé pour représenter graphiquement les nombres complexes. Dans ce plan, chaque nombre complexe $z = a + bi$ est associé à un point (a, b) où l'axe horizontal représente la partie réelle a et l'axe vertical représente la partie imaginaire b . Ainsi, le plan de Gauss permet de visualiser géométriquement les opérations sur les nombres complexes.

La représentation géométrique des nombres complexes permet d'introduire un nouveau vocabulaire : « l'argument » d'un nombre complexe $\arg(z)$ est la mesure de l'angle θ entre l'axe des réels positifs du plan complexe et le segment reliant l'origine et l'image du nombre complexe, mesurée en radians dans le sens trigonométrique. Dans ce travail, nous fixons la convention que l'argument θ est compris dans l'intervalle $] - \pi, \pi]$, ceci est un choix personnel et d'autres conventions peuvent exister comme par exemple $\theta \in [0, 2\pi[$.

Considérons $z_1 = (a_1, b_1)$ et $z_2 = (a_2, b_2)$ afin d'effectuer diverses opérations avec ceux-ci.

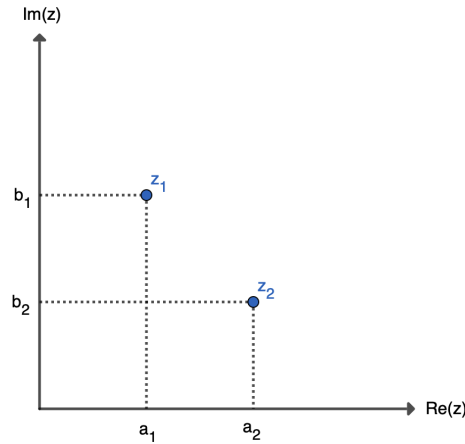


FIGURE 1.1 – Représentation des nombres complexes dans le plan de Gauss

Égalité

De par la définition d'un nombre complexe sous forme géométrique, deux nombres complexes sont égaux s'ils possèdent la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Somme

La somme $z_1 + z_2$ de deux nombres complexes z_1 et z_2 sous forme géométrique peut être perçue comme le quatrième sommet du parallélogramme dont $z_1 O z_2$ sont 3 sommets consécutifs. Autrement dit, ajouter à un nombre complexe z_1 un autre nombre complexe z_2 , revient à effectuer une translation de vecteur $\vec{Oz_2}$ à z_1 .

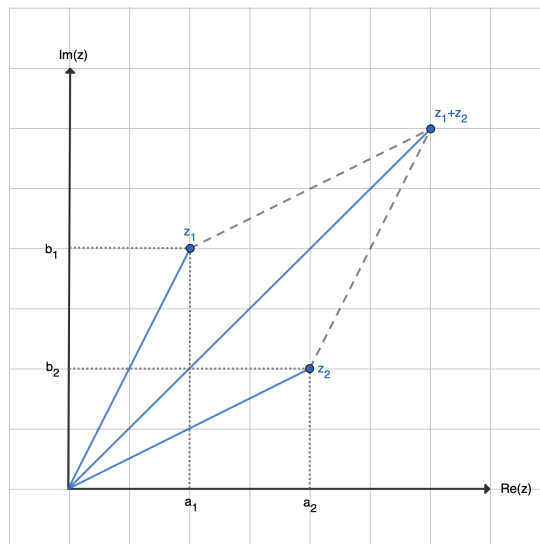


FIGURE 1.2 – Représentation géométrique de la somme de nombres complexes

Produit

L'interprétation du produit de deux nombres complexes sous forme géométrique est un peu plus recherchée. Considérons le triangle formé par l'origine du repère O , le premier nombre complexe de la multiplication z_1 et le nombre complexe $z_1.z_2$ et le triangle formé par l'origine du repère O , le deuxième nombre complexe de la multiplication z_2 et le nombre complexe 1 noté P . Ces triangles, colorés sur la figure 1.3 ci dessous, sont semblables. En effet, par la propriété de l'argument d'un nombre complexe, $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, on a que l'angle formé par z_1 , O et $z_1.z_2$ est égale à l'angle formé par O , z_2 et P . Les deux triangles sont alors semblables puisqu'on a également :

$$\frac{|Oz_1.z_2|}{|Oz_1|} = \frac{|z_1.z_2|}{|z_1|} = z_2 = \frac{|z_2|}{1} = \frac{|Oz_2|}{|OP|}$$

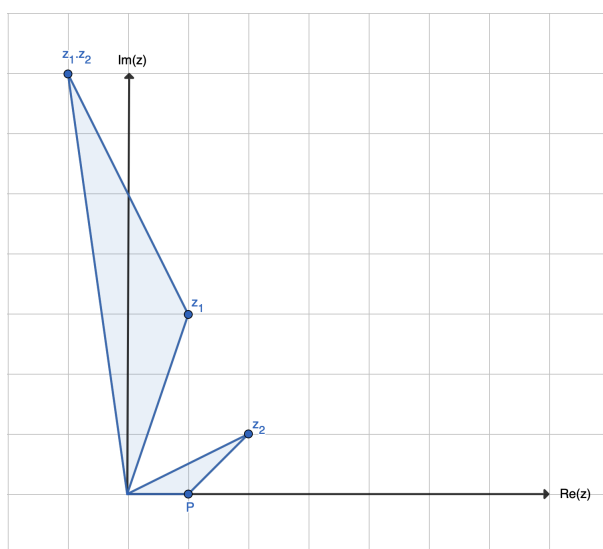


FIGURE 1.3 – Représentation géométrique du produit de nombres complexes

Puissance

En partant du produit, on peut en déduire que la n^e puissance d'un nombre complexe revient à effectuer n rotations de la valeur de son argument dans le plan complexe et à élever sa distance à l'origine à la puissance n . Voici un exemple :

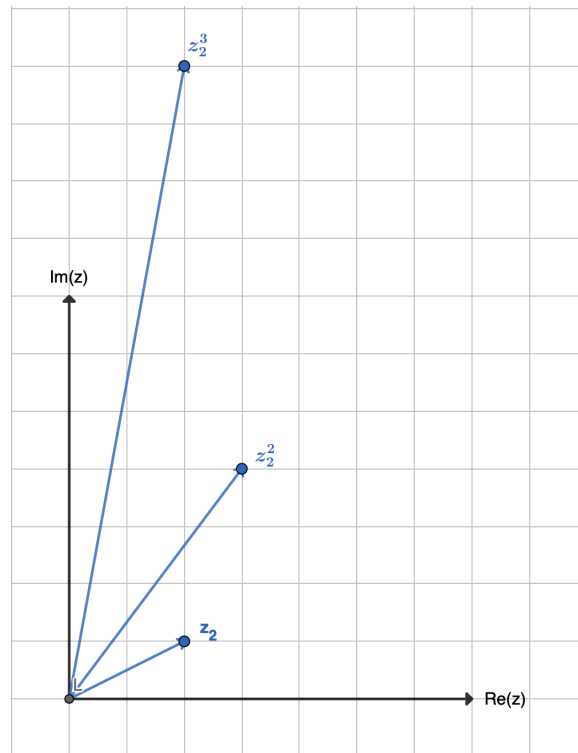


FIGURE 1.4 – Représentation géométrique de la puissance d'un nombre complexe

Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z_1 est noté $\bar{z}_1$ et est sa symétrie par rapport à l'axe x .

Opposé

L'opposé d'un nombre complexe z_1 , $-z_1$ est sa symétrie centrale de centre $(0, 0)$.

En conclusion, les opérations avec des nombres complexes sous forme géométrique offrent une perspective intuitive et visuelle sur la manipulation de ces nombres dans le plan complexe. L'addition de nombres complexes est relativement directe et facile à visualiser. En revanche, la multiplication est moins évidente et possède une représentation moins intuitive.

1.1.3 Représentation trigonométrique

La représentation trigonométrique d'un nombre complexe peut être établie en partant de sa forme géométrique et en utilisant les coordonnées polaires. Afin d'exprimer ce nombre complexe $z = (a, b)$ en coordonnées polaires, nous devons trouver sa distance à l'origine, appelée le « module » du nombre complexe et noté $|z| = \rho$ ainsi que l'angle

que le segment reliant l'origine et l'image du nombre complexe forme avec l'axe des réels positifs $\theta \in]-\pi, \pi]$, « l'argument ». Cette représentation en coordonnées polaires peut être obtenue à l'aide de la trigonométrie. La distance entre l'origine O et le point z est donnée par le théorème de Pythagore : $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

En utilisant les fonctions trigonométriques, notamment le cosinus et le sinus, nous pouvons exprimer la représentation trigonométrique du nombre complexe z :

$$z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta) = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Ainsi, en partant de sa représentation géométrique dans le plan complexe et en utilisant les coordonnées polaires, nous pouvons trouver la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

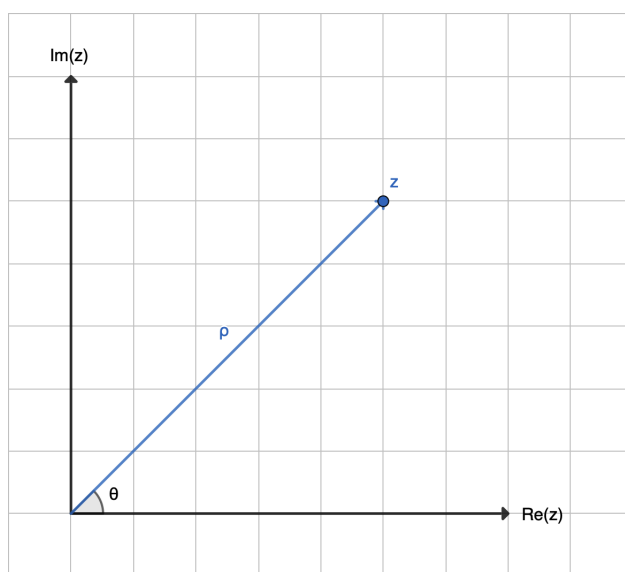


FIGURE 1.5 – Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Considérons $z_1 = a_1 + b_1i = \rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ et $z_2 = a_2 + b_2i = \rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ pour la suite de l'analyse.

Égalité

Sous forme trigonométrique, la représentation d'un nombre complexe n'est pas unique en raison de la périodicité des fonctions trigonométriques. Puisque les fonctions trigonométriques sont périodiques, tout angle θ peut être représenté de manière unique seulement dans une plage de 2π . Cela signifie qu'ajouter ou soustraire un multiple entier k de 2π à l'argument θ d'un nombre complexe ne change pas son expression. Par conséquent, un nombre complexe peut avoir différents arguments et donc avoir plusieurs représentations sous forme trigonométrique. Alors, pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ et } \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$$

Somme

Concernant la somme de deux nombres complexes sous forme trigonométrique, elle ne peut pas être simplifiée facilement. En effet,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) + \rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= (\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)) + i(\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2)) \end{aligned}$$

Produit

En revanche, le produit de deux nombres complexes sous forme trigonométrique est un nouveau nombre complexe dont le module est le produit des modules des nombres complexes initiaux, et l'argument est la somme des deux arguments des nombres complexes initiaux. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ et } \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$$

En effet, ceci est prouvé en utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} z_{12} &= \rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot \rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

Puissance

Il est possible de montrer par récurrence que la puissance n d'un nombre complexe sous forme trigonométrique est un nouveau nombre complexe dont le module est la puissance n du module du nombre complexe initial, et l'argument est n fois l'argument du nombre complexe initial z_1 . Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$|z_1^n| = |z_1|^n \text{ et } \arg(z_1^n) = n \cdot \arg(z_1) + 2k\pi$$

Quotient

Quant au quotient de deux nombres complexes sous forme trigonométrique, il est un nouveau nombre complexe dont le module est le quotient des modules des nombres complexes initiaux, et l'argument est la différence des deux arguments des nombres complexes initiaux. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ et } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

En voici la preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))}{\rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))}{(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))} \cdot \frac{(\cos(\theta_2) - i \sin(\theta_2))}{(\cos(\theta_2) - i \sin(\theta_2))} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) - i \sin(\theta_2))}{(\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2)} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2)))}{1} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}$$

Conjugué

Sous sa représentation trigonométrique, le conjugué d'un nombre complexe est :

$$\begin{aligned}
\bar{z}_1 &= a_1 - b_1 i \\
&= \rho_1(\cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1)) \\
&= \rho_1(\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))
\end{aligned}$$

Cela revient à conserver le module du nombre complexe et à inverser le signe de l'argument. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$|\bar{z}| = |z| \text{ et } \arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$$

Opposé

L'opposé d'un nombre complexe dans sa forme trigonométrique est obtenu en ajoutant π à l'argument du nombre complexe. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$|-z| = |z| \text{ et } \arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$$

En effet,

$$\begin{aligned}
-z_1 &= -a_1 - b_1 i \\
&= -(a_1 + b_1 i) \\
&= -\rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \\
&= \rho_1(\cos(\theta_1 + \pi) + i \sin(\theta_1 + \pi))
\end{aligned}$$

Inverse

Concernant l'inverse d'un nombre complexe sous forme trigonométrique, cela revient à prendre l'inverse du module et l'opposé de l'argument. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$$

En effet, en raison de la propriété :

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2 = \rho^2$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{\bar{z}_1}{z_1.\bar{z}_1} \\ &= \frac{\bar{z}_1}{\rho_1^2} \\ &= \frac{\rho_1(\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))}{\rho_1^2} \\ &= \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{\rho_1} \end{aligned}$$

En conclusion, la représentation trigonométrique des nombres complexes ne simplifie pas facilement l'écriture des sommes, mais elle offre la possibilité de réduire les expressions des autres opérations en termes de relations entre leurs modules et arguments. Toutefois, pour tirer pleinement parti de cette représentation, une solide connaissance de la trigonométrie est indispensable.

1.1.4 Représentation exponentielle

La représentation exponentielle des nombres complexes découle principalement de la formule d'Euler, qui établit une relation fondamentale entre les fonctions trigonométriques et la fonction exponentielle. Cette formule est donnée par :

$$\forall t \in \mathbf{R} : e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Elle peut être démontrée par les séries de Taylor ou en définissant l'exponentielle complexe à partir des fonctions exponentielles et trigonométriques connues, comme ceci : $e^z = e^{a+bi} := e^a(\cos b + i \sin b)$. Cette définition garantit la propriété $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. En effet, en utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{a_1}(\cos b_1 + i \sin b_1)e^{a_2}(\cos b_2 + i \sin b_2) \\ &= e^{a_1+a_2}(\cos b_1 \cos b_2 - \sin b_1 \sin b_2 + i(\sin b_1 \cos b_2 + \cos b_1 \sin b_2)) \\ &= e^{a_1+a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i \sin(b_1 + b_2)) \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

L'introduction de la notation $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ permet d'écrire les nombres complexes sous une forme exponentielle. Pour un nombre complexe z de module ρ et d'argument

$\theta \in]-\pi, \pi]$, sa représentation exponentielle est donnée par :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Considérons $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$ pour la suite de l'analyse.

Égalité

Tout comme dans la représentation trigonométrique, un nombre complexe avec une représentation exponentielle possède une unicité module 2π due à la périodicité des fonctions trigonométriques. Pour $k \in \mathbf{Z}$,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \text{ et } \arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$$

Somme

La somme de deux nombres complexes sous forme exponentielle $z_1 + z_2$ est donnée par :

$$z_1 + z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2}$$

Comme pour la représentation trigonométrique, aucune simplification majeure n'est possible pour la somme.

Produit

Concernant le produit de deux nombres complexes $z_1 \cdot z_2$ sous la forme exponentielle, il est donné par $\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2}$. En utilisant les propriétés des exposants, nous pouvons écrire ce produit comme :

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Nous constatons que les propriétés des exposants réduisent la preuve que la multiplication revient à multiplier les modules entre-eux et d'additionner les arguments.

Puissance

Toujours en exploitant les propriétés des puissances, l'exposant d'un nombre complexe sous forme exponentielle est donné par :

$$z_1^n = (e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$$

Quotient

Concernant le quotient de deux nombres complexes sous forme exponentielle, il est calculé en divisant les modules et en soustrayant les arguments entre-eux :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Il est encore plus flagrant pour le quotient que la forme exponentielle simplifie nettement les calculs par rapport à la forme trigonométrique.

Conjugué

Pour ce qui est du conjugué d'un nombre complexe sous forme exponentielle, le module reste inchangé et on prends l'opposé de l'argument :

$$\bar{z}_1 = \rho_1 e^{-i\theta_1}$$

Opposé

L'opposé d'un nombre complexe sous forme exponentielle, revient à conserver le module et à ajouter π à l'argument. Il est donné par :

$$-z_1 = \rho_1 e^{i(\pi+\theta_1)}$$

Inverse

Inverser un nombre complexe revient à inverser son module et à prendre l'opposé de l'argument :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$$

En conclusion, les règles d'exponentiation simplifient grandement les calculs.

1.1.5 Représentation matricielle

La représentation matricielle des nombres complexes provient principalement de leur relation avec les transformations linéaires et les rotations dans le plan complexe.

Une transformation linéaire t du plan peut être vue comme une homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport ρ codée par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ suivie d'une rotation de centre $(0, 0)$ représentée par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée. La matrice correspondante est alors $\begin{pmatrix} \rho \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui peut se décomposer comme :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et correspond en effet à une rotation de $\pi/2$. [17]

Considérons les nombres complexes $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Égalité

Les nombres complexes sous forme matricielle implique l'unicité de leur représentation. En effet, deux matrices sont égales si et seulement si $z_{1ij} = z_{2ij}$ pour chaque paire d'indices (i, j) correspondant à une position dans les matrices z_1 et z_2 .

Somme

Pour additionner deux nombres complexes sous forme matricielle, nous devons additionner les éléments correspondants :

$$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la somme de deux nombres complexes sous forme matricielle consiste à additionner les parties réelles et imaginaires des nombres complexes.

Produit

Pour multiplier deux nombres complexes sous forme matricielle, nous utilisons les règles de multiplication de matrices. Le produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 sous forme matricielle est donc :

$$z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Puissance

La puissance d'un nombre complexe sous forme matricielle est obtenue en multipliant la matrice par elle-même un certain nombre de fois. Cependant, un nombre complexe sous forme matricielle est une matrice diagonalisable, il existe donc une méthode plus rapide pour calculer sa puissance. Cette méthode implique de diagonaliser la matrice du nombre complexe, c'est-à-dire de la décomposer en une matrice diagonale D et une matrice de passage P telle que $z = PDP^{-1}$. Ensuite, élever la matrice diagonale D à la puissance n revient simplement à élever chacun de ses éléments à la puissance n . Enfin, on réassemble le tout : $z^n = P.D^n.P^{-1}$.

Diagonalisons la matrice du nombre complexe z et commençons par remarquer que les valeurs propres et vecteurs propres de n'importe quel nombre complexe seront toujours de la même forme. En effet, soit $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, les valeurs propres d'un nombre complexe sous forme matricielle seront de la forme $\lambda_1 = a + i.b$ et $\lambda_2 = a - i.b$. Prouvons-le en résolvant $\det(z - \lambda Id) = 0$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix}\right) = (a - \lambda)^2 + b^2 = 0$$

$$a - \lambda = \pm\sqrt{-b^2} = \pm i.b$$

$$\lambda_1 = a + i.b \text{ et } \lambda_2 = a - i.b$$

Après avoir trouvé les valeurs propres de la matrice z , nous devons trouver les vecteurs propres correspondants à chaque valeur propre.

Pour λ_1 :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - (a + i.b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a + i.b) & -b \\ b & a - (a + i.b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i.b & -b \\ b & -i.b \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Pour λ_2 :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - (a - i.b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - (a - i.b) & -b \\ b & a - (a - i.b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i.b & -b \\ b & i.b \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Nous avons donc $z = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a + i.b & 0 \\ 0 & a - i.b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{pmatrix}$

Pour obtenir la puissance z^n , nous utilisons la diagonalisation de z comme suit :

$$z^n = P.D^n.P^{-1}$$

D^n est une puissance de chaque élément de la diagonale. Ensuite, nous utilisons la matrice P et son inverse P^{-1} pour revenir à la base d'origine et obtenir z^n .

Nous remarquons que la matrice diagonale correspondant à un nombre complexe z est formée sur sa diagonale du nombre complexe lui même z et de son conjugué $\bar{z}$. Multiplier les nombres complexes z_1 et z_2 revient donc à :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= P \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} z_1 \cdot z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Quotient

En ce qui concerne le quotient de deux nombres complexes sous forme matricielle, il revient à une multiplication par la matrice inverse :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ b_1 a_2 - a_1 b_2 & b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z_1 est obtenu en changeant le signe de sa partie imaginaire. Sous forme matricielle, cela se traduit par :

$$\bar{z}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

et correspond à la matrice transposée de z_1 .

Opposé

L'opposé d'un nombre complexe z_1 est simplement le nombre complexe ayant ses parties réelles et imaginaires opposées. Ainsi, son opposé est :

$$-z_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Inverse

L'inverse d'un nombre complexe z_1 sous forme matricielle est simplement sa matrice inverse :

$$\frac{1}{z_1} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

En conclusion, la forme matricielle d'un nombre complexe apporte une certaine structure mais affiche les informations en double, ce qui rends l'écriture plus lourde.

En résumé, les opérations avec des nombres complexes sous forme géométrique offrent une perspective intuitive et visuelle. La représentation trigonométrique des nombres complexes ne simplifie pas l'addition mais facilite les autres opérations en termes de relations entre modules et arguments, nécessitant toutefois une bonne connaissance de la trigonométrie. Concernant la représentation exponentielle, les règles d'exponentiation simplifient considérablement les calculs. Enfin, la forme matricielle d'un nombre complexe apporte une structure mais double les informations, rendant l'écriture plus lourde.

Un tableau récapitulatif regroupant chaque opération pour chaque représentation des nombres complexes est présenté en annexe [A](#).

1.2 Exemples d'applications des nombres complexes

Dans cette section, nous explorerons deux exemples d'applications des nombres complexes, mettant en lumière leur utilité tant dans l'ingénierie électrique que dans l'analyse des signaux périodiques. Ces exemples illustrent comment les nombres complexes permettent de simplifier la modélisation des circuits électriques et la description de phénomènes périodiques.

J'ai choisi le premier exemple pour établir un lien avec le programme de l'enseignement du qualifiant, et le second pour témoigner d'une observation, où des élèves, dans le cadre du cours d'activité mathématiques, ont utilisé les nombres complexes dans un projet sur le thème de la musique.

1.2.1 Exemple 1 : ingénierie électrique

Considérons le problème de trouver l'intensité du courant $i(t)$ dans un circuit RLC en série (circuit constitué d'une bobine, d'une résistance et d'un condensateur) dans lequel la charge $q(t)$ sur le condensateur pendant le temps $t > 0$ est décrite par l'équation différentielle :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \gamma t$$

où les constantes positives R , L et C sont, respectivement, la résistance, l'inductance et la capacité et $E_0 \sin \gamma t$ correspond à la source de tension alternative. Pour trouver l'intensité du courant $i(t)$, on résout $q(t)$. En procédant comme nous le ferions dans un cours d'équations différentielles, nous utilisons la méthode des coefficients indéterminés pour trouver $q(t)$. Cela implique de supposer une solution particulière de la forme $q(t) = A \sin \gamma t + B \cos \gamma t$, de substituer cette expression dans l'équation différentielle, de simplifier, d'égaliser les coefficients et de résoudre les coefficients inconnus A et B .

Nous pouvons également résoudre ce problème en utilisant l'analyse complexe. Tout d'abord, pour éviter toute confusion avec l'intensité du courant i , l'unité imaginaire i sera dénotée par le symbole j : autrement dit, $j^2 = -1$. Puisque l'intensité du courant i est liée à la charge q par $i = \frac{dq}{dt}$, l'équation différentielle est la même que :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \gamma t$$

Au vu de la formule d'Euler, la tension appliquée $E_0 \sin \gamma t$ correspond à la partie imaginaire $\text{Im}(E_0 e^{j\gamma t})$. Du fait de cette dernière forme, la méthode des coefficients indéterminés suggère d'essayer une solution de $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E_0 \sin \gamma t$ sous la forme d'un multiple constant d'une exponentielle complexe, c'est-à-dire $i(t) = \text{Im}(A e^{j\gamma t})$. Nous substituons cette dernière expression dans l'équation :

$$L \frac{dIm(Ae^{j\gamma t})}{dt} + RIm(Ae^{j\gamma t}) + \frac{1}{C}q = Im(E_0 e^{j\gamma t})$$

Supposons que l'exponentielle complexe satisfait aux règles de différenciation habituelles et utilisons le fait que la charge q est une primitive du courant i ($q = \int Im(Ae^{j\gamma t})dt = \frac{Im(Ae^{j\gamma t})}{j\gamma}$) :

$$jL\gamma Im(Ae^{j\gamma t}) + RIm(Ae^{j\gamma t}) + \frac{Im(Ae^{j\gamma t})}{jC\gamma} = Im(E_0 e^{j\gamma t})$$

Simplifions les coefficients $e^{j\gamma t}$. Le résultat est l'équation du second degré $(jL\gamma + R + \frac{1}{jC\gamma})A = E_0$ et on obtient :

$$A = \frac{E_0}{R + j(L\gamma - \frac{1}{C\gamma})}$$

Le dénominateur de la dernière expression est appelé l'impédance complexe Z_c du circuit. Puisque le module de l'impédance complexe est $|Z_c| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - \frac{1}{C\gamma})^2}$, nous constatons que l'impédance $Z = \sqrt{R^2 + (L\gamma - \frac{1}{C\gamma})^2}$ et l'impédance complexe sont liées par $Z = |Z_c|$.

A partir de la forme exponentielle d'un nombre complexe, nous pouvons écrire l'impédance complexe sous la forme :

$$Z_c = |Z_c|e^{j\theta} = Ze^{j\theta}$$

En conclusion $A = \frac{E_0}{R + j(L\gamma - \frac{1}{C\gamma})} = \frac{E_0}{Z_c} = \frac{E_0}{Ze^{j\theta}}$, et donc l'intensité du courant est donné par :

$$i(t) = Im(\frac{E_0}{Z}e^{-j\theta}e^{j\gamma t})$$

Bien que l'utilisation des nombres complexes ne soit pas une nécessité absolue pour résoudre les problèmes liés aux circuits électriques, elle offre une approche simplifiée et élégante. En exprimant les grandeurs électriques sous forme d'exponentielles complexes, nous pouvons éviter de dériver des sommes de sinus et cosinus, ce qui rend les calculs plus simples et plus intuitifs. Ainsi, l'utilisation des nombres complexes facilite la résolution des équations différentielles.

1.2.2 Exemple 2 : signaux périodiques

Le son résulte d'un mouvement physique d'oscillation, tel qu'une corde qui vibre ou la membrane d'un haut-parleur. Un signal sonore représente une forme unidimensionnelle

de signal (une onde se propageant dans une seule direction) perçue et analysée par l'oreille et le cerveau.

Les trois signaux représentés en fonction du temps partagent les mêmes valeurs de fréquence et d'amplitude (Figure 1.6), mais sont perçus différemment par l'oreille humaine. En fait, l'oreille interne est constituée de « cils », lorsque ceux-ci vibrent sous l'impulsion de certaines ondes sonores, ils envoient des signaux au cerveau. Les cils de l'oreille interne sont spécialisés dans la capture de différentes fréquences sonores. Chaque cil est sensible à une gamme spécifique de fréquences, ce qui permet à l'oreille de détecter et de traiter un large éventail de sons. Une fois que ces signaux sont captés, ils sont transmis au cerveau, qui va les interpréter et recomposer le signal initial. [22]

Les sons « triangle » et « créneau » sont en fait composés de plusieurs sinusoïdes de fréquence et d'amplitude différentes [14] chacune interprétée par des cils différents. On peut ainsi conclure que l'oreille effectue une analyse spectrale des sons et qu'un signal périodique peut s'écrire comme une somme de sinusoïdes.

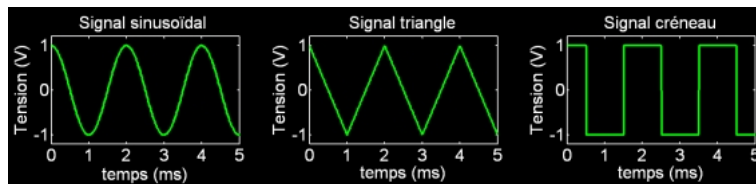


FIGURE 1.6 – Signaux représentés en fonction du temps [14]

L'analyse spectrale d'un signal consiste à trouver toutes les sinusoïdes qui contribuent significativement au signal, ce qui correspond à identifier les fréquences et les amplitudes des sinusoïdes associées.

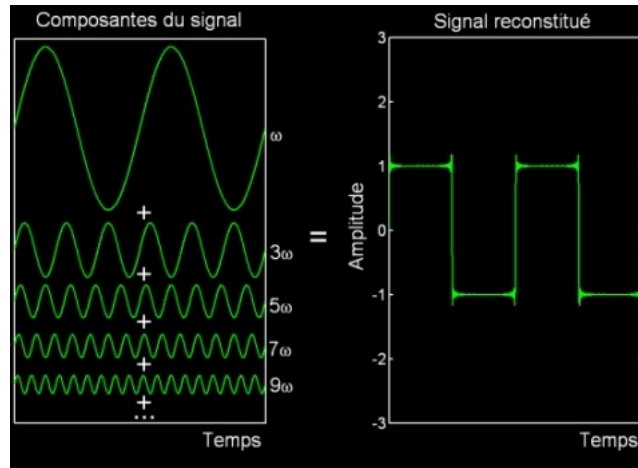


FIGURE 1.7 – Analyse spectrale d'un signal [14]

Le signal périodique de fréquence f et de période T se décompose en une somme de sinusoides, appelée série de Fourier et s'écrit sous la forme générale, avec n entier :

$$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f t)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos(2\pi n f t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin(2\pi n f t) dt$$

On peut écrire également cette série de Fourier en notation complexe :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n f t}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-2i\pi n f t} dt$$

Un spectre de Fourier, ou spectre fréquentiel, est une représentation graphique permettant de visualiser les fréquences en abscisses et les amplitudes en ordonnées. Avec un signal périodique, le spectre se présente sous la forme de pics, situés au niveau de chaque fréquence intervenant dans le signal. Plus une fréquence contribue au signal, plus le pic est haut, c'est-à-dire plus l'amplitude de la sinusoïde associée est forte. Dans la pratique, l'outil informatique permet d'établir le spectre. Avec les sons utilisés comme exemples, on a ainsi trouvé :

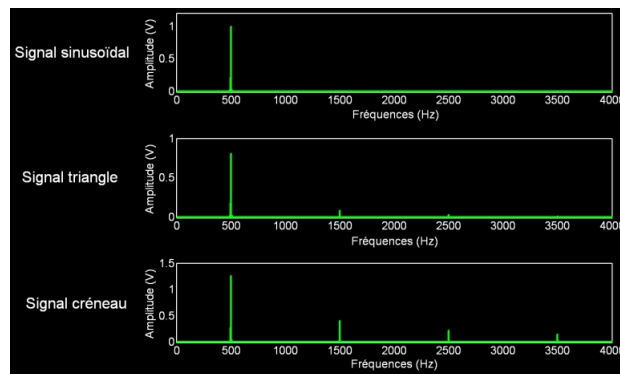


FIGURE 1.8 – Signaux représentés de manière fréquentielle [14]

Le son « sinusoïde » n'est composé que d'une seule sinusoïde, sous la forme d'un pic, donc d'une seule fréquence. Le son est qualifié de son pur, comme celui joué par un diapason.

Les sons « triangle » et « créneau » sont composés de plusieurs sinusoïdes et sont qualifiés de sons complexes. La plus basse est nommée fréquence fondamentale f . Les autres fréquences sont des multiples de cette fréquence aussi appelées des harmoniques.

On constate donc qu'on peut écrire un signal soit par son expression temporelle soit par son expression fréquentielle. Il est important de préciser que la représentation fréquentielle est plus facilement interprétable.

La décomposition en série de Fourier, que nous venons d'observer pour les ondes acoustiques, peut être appliquée à n'importe quel signal périodique. La notation complexe des séries de Fourier permet une notation plus concise en regroupant les composantes cosinus et sinus en une seule expression. En effet, au lieu d'avoir les trois expressions a_0 , a_n et b_n , nous n'avons plus que c_n . La notation complexe des séries de Fourier permet donc un gain d'écriture.

1.3 Les nombres

Dans cette partie, nous focaliserons notre attention sur l'univers des nombres. Nous mettrons en lumière les défis conceptuels rencontrés à chaque extension ensembliste des nombres. Nous remonterons également le fil de leur évolution historique. Enfin, nous analyserons l'ordre d'apprentissage des différents ensembles de nombres.

1.3.1 Extension ensembliste des nombres

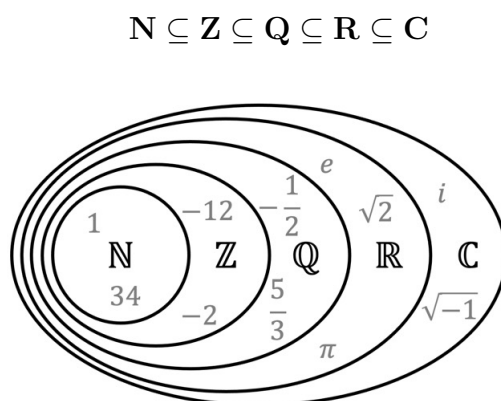


FIGURE 1.9 – Ensemble des nombres [11]

Les naturels $\mathbf{N}$

Les nombres naturels $\mathbf{N}$ sont les premiers nombres que nous utilisons, ils nous sont utiles pour compter des objets ou des éléments dans le monde qui nous entoure. Cependant, la compréhension du concept zéro, nombre faisant partie des naturels, peut être initialement difficile pour certains. Cette difficulté découle en partie de l'absence du zéro en tant que classe grammaticale dans la langue française. Par exemple, alors qu'on peut dire « j'ai trois pommes » pour représenter une quantité positive, il n'y a pas de construction linguistique équivalente pour indiquer l'absence complète, comme « j'ai zéro pomme ». Au lieu de cela, on utilise des expressions négatives telles que « je n'ai pas de pomme » ou « je n'ai aucune pomme ».[19] De plus, la représentation du zéro dans des contextes concrets, tel que le comptage avec les doigts, pose un défi supplémentaire. Lorsque nous comptons avec nos doigts, nous commençons généralement par un et non par zéro. Cette absence de représentation claire rend le concept du zéro plus abstrait et donc plus difficile à saisir pour certains.

Les entiers $\mathbf{Z}$

En introduisant les nombres entiers $\mathbf{Z}$, nous étendons l'ensemble des nombres naturels $\mathbf{N}$ pour inclure également les nombres négatifs. Cependant, cela vient avec une perte de propriété importante : l'addition n'est plus une opération strictement croissante. Par exemple, dans les nombres entiers, $2 + 2$ est égal à 4, mais $-2 + 2$ donne 0. Cette perte de la propriété de croissance peut être contre-intuitive pour certains. De plus, lorsque nous introduisons des opérations avec des nombres négatifs, comme la multiplication, la signification devient moins intuitive, surtout lorsque nous combinons des nombres positifs et négatifs. Par exemple, il est relativement facile de comprendre l'expression $2 \cdot (-3)$ comme signifiant « prendre 2 quantités de -3 ». Cependant, la signification de $(-3) \cdot 2$ ou encore $-2 \cdot (-3)$ devient plus abstraite et moins intuitive dans le contexte quotidien. L'expression $(-3) \cdot 2$ pourrait être interprétée comme « prendre -3 quantités de 2 », ce qui peut sembler étrange dans un contexte concret. De même, l'expression $-2 \cdot (-3)$ pourrait être interprétée comme « prendre -2 quantités de -3 », ce qui peut sembler encore plus déroutant. Ces expressions nous éloignent du contexte quotidien dans le sens où elles sont moins susceptibles de représenter des situations concrètes que nous rencontrons habituellement.

Les rationnels $\mathbf{Q}$

L'introduction des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ étend encore notre ensemble numérique pour inclure les fractions. Cela nous permet de représenter des quantités qui ne sont pas nécessairement des nombres entiers. Cependant, avec cette extension, nous perdons la propriété que la multiplication est toujours une opération qui fait grandir la solution. Par exemple, $2 \cdot 1 = 2$, mais $(1/2) \cdot (1/4)$ donne $1/8$, une valeur plus petite. De plus, la représentation des fractions en nombres décimaux peut poser problème. En effet, pour certains, les fractions sont plus intuitives que les nombres décimaux car elles représentent des parties d'un tout. Lorsque nous travaillons avec des fractions, nous avons une compréhension claire de la relation entre les parties et le tout. Par exemple, la fraction $1/2$ représente clairement la moitié d'une unité. Cependant, cette connexion avec le tout peut être perdue lors de la représentation en nombres décimaux.

Les réels $\mathbf{R}$

L'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ regroupe les nombres rationnels ainsi que les nombres irrationnels, qui sont des décimaux illimités non périodiques ou encore des nombres transcendants. L'extension aux nombres réels peut apporter encore plus de confusion, pourquoi des nombres comme π , e sont-ils représentés par des lettres ? De plus, beaucoup d'élèves ont des difficultés à comprendre la notation racine carrée. Une des causes à ces incompréhensions est sans doute le manque d'utilisation des nombres irrationnels et transcendants dans les situations de la vie quotidienne.

Les nombres complexes $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est une extension encore plus profonde de notre ensemble numérique. Les nombres complexes comprennent une composante réel et une composante imaginaire, ce qui les rend utiles pour représenter des quantités dans un espace à deux dimensions comme par exemple les vecteurs. Cela a des applications importantes en mathématiques, en physique et dans d'autres domaines. Cependant, l'introduction des nombres complexes entraîne une perte de la notion d'ordre, ce qui signifie que nous ne pouvons plus classer les nombres complexes de la même manière que les nombres réels. Cela peut être un concept difficile à saisir pour certains. Malgré cela, l'introduction des nombres complexes apporte un gain significatif dans la résolution d'équations du troisième degré ou d'équations différentielles (Section 1.2).

1.3.2 L'histoire des nombres

Cette section est essentiellement basée sur une présentation de Rémi Carles [7].

Les premières traces de comptage remontent au Paléolithique, il y a environ 30 000 ans. A cette époque les gens utilisaient des encoches sur des os ou du bois pour représenter des quantités. Compter sur les doigts était également courant, mais cela avait ses limites. Pour surmonter ces limites, les gens ont commencé à procéder par paquets ou groupements. Voici un exemple avec la numérotation égyptienne :

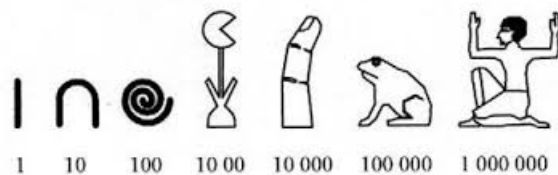


FIGURE 1.10 – Numérotation égyptienne [4]

Il est probable que notre système de numération décimale, dans lequel après neuf, on ajoute un chiffre pour passer aux dizaines, trouve son origine dans le fait que nous ayons dix doigts.

Les fractions ont été utilisées dès le 3e millénaire avant notre ère en Mésopotamie et en Égypte, souvent dans le contexte de problèmes de partage de ressources ou de mesures. Le Papyrus Rhind d'Égypte, datant d'environ -1800, ainsi que les tablettes babyloniennes de la même époque, montrent des calculs impliquant des fractions.

Vers le 5e siècle avant notre ère, les mathématiciens ont introduit le concept de zéro pour résoudre les ambiguïtés de position, comme dans l'exemple où « 806 » pourrait

signifier différentes choses sans un zéro pour séparer les centaines, les dizaines et les unités.

A la même époque, les pythagoriciens ont découvert l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire à certaines équations. Leur étude, centrée sur les relations géométriques telles que le théorème de Pythagore, a révélé que dans certains cas, comme celui des triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières, les longueurs ne peuvent pas être exprimées exactement en termes de nombres rationnels. Cette découverte a conduit à la reconnaissance des nombres irrationnels, remettant en question la vision traditionnelle selon laquelle toutes les grandeurs pouvaient être représentées de manière simple et exacte par des nombres entiers ou des fractions, et ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans l'étude des nombres et de leurs propriétés.

Les nombres négatifs, en revanche, sont apparus plus tard dans l'histoire des mathématiques. Sans doute introduits en Chine, ils sont apparus en Europe très tardivement, avec des mathématiciens tels que Nicolas Chuquet (1445-1500) et Jérôme Cardan (1501-1576).

En ce qui concerne les nombres complexes, ils sont nés de confrontations avec des opérations impossibles comme les racines carrées de nombres négatifs. Cardan, en 1545, fut l'un des premiers à concevoir leur existence. Il tentait de résoudre des équations cubiques. Cependant, pour appliquer sa méthode, il était nécessaire que le discriminant de l'équation soit positif. Le paradoxe surgit lorsque l'équation initiale possède trois solutions réelles, conduisant à un discriminant négatif. Dans cette situation, la méthode de Cardan devient inapplicable, à moins d'accepter l'introduction temporaire, comme étape intermédiaire, des nombres imaginaires, qui impliquent l'utilisation de racines carrées de nombres négatifs [21]. René Descartes a appelé $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire en 1637 et Euler a introduit la notation i pour cette racine carrée de -1 en 1777.

En résumé, l'histoire des nombres révèle un processus évolutif où chaque ensemble numérique a été découvert à des époques distinctes et pas forcément dans l'ordre attendu. Les nombres négatifs, bien qu'essentiels dans les mathématiques d'aujourd'hui, sont apparus postérieurement aux nombres rationnels. Par ailleurs, la découverte des nombres complexes est un développement plus récent, mettant en lumière l'évolution continue de la pensée mathématique.

1.3.3 L'enseignement des nombres

Au début de leur parcours scolaire, les élèves sont initiés aux nombres naturels. Ils apprennent à compter et à manipuler des nombres entiers positifs tels que 1, 2, 3, etc. Cette première étape, généralement abordée dès les premières années de l'école primaire, pose les bases de la numération.

En progressant dans leur apprentissage, les élèves sont initiés aux nombres rationnels,

qui comprennent les fractions. Cette étape intervient souvent à l'école primaire, les élèves les conceptualisent souvent comme le partage d'un tout. Ils apprennent à représenter, comparer et opérer avec des fractions consolidant ainsi leur compréhension des nombres.

Par la suite, ils découvrent les nombres entiers et apprennent à manipuler les nombres négatifs. Ces nombres sont introduits à l'école secondaire et permettent aux élèves de résoudre des équations. Il faut noter que les nombres négatifs sont côtoyés déjà en primaire (exemple : température négative) mais ne sont manipulés qu'à partir du secondaire.

Au fur et à mesure de leur progression dans le cursus scolaire, les élèves explorent les nombres réels, qui englobent à la fois les nombres rationnels et irrationnels. Cette étape est généralement abordée dans le secondaire lors de la découverte du théorème de Pythagore.

Enfin, certains élèves approfondissent leur compréhension des nombres avec les nombres complexes, introduits dans les dernières années du secondaire.

Chapitre 2

L'enseignement des nombres complexes

Dans ce chapitre, nous aborderons l'enseignement des nombres complexes dans les filières dites « scientifiques ». Cette analyse s'appuie sur l'observation de six classes dans différents établissements, complétée par l'accès aux notes de cours de quatre de ces classes ainsi qu'aux réponses de deux interrogations.

Avant d'entamer cette analyse, nous explorerons les programmes d'enseignement des nombres complexes tant dans les filières « scientifiques » que dans les filières du qualifiant axées sur les métiers de l'industrie. De plus, nous examinerons la place du chapitre des nombres complexes dans le contexte des mathématiques modernes.

Par la suite, nous nous pencherons sur les différentes structures adoptées par les enseignants pour aborder ce chapitre.

Après cela, nous accorderons une attention particulière à la compétence de transfert, souvent négligée dans l'enseignement des nombres complexes.

Ensuite, nous explorerons différentes approches possibles pour introduire ce chapitre, offrant ainsi une variété de perspectives pédagogiques.

Nous examinons la manière dont les élèves appréhendent les nombres complexes, en analysant leurs réactions initiales à ce concept abstrait ainsi que les erreurs et difficultés fréquemment rencontrées dans les exercices et interrogations.

Enfin, nous nous intéresserons à l'utilité d'enseigner les nombres complexes telle qu'elle est perçue par les enseignants.

2.1 Les programmes de l'enseignement secondaire

Dans cette partie, nous expliquerons comment les programmes sont construits en Communauté française de Belgique. Ensuite, nous analyserons le programme du chapitre des nombres complexes dans l'enseignement de transition en mathématiques pour scientifiques ainsi que dans l'enseignement de qualification axé sur les métiers d'industrie. Finalement, nous évoquerons brièvement comment les nombres complexes étaient abordés durant les mathématiques modernes.

2.1.1 Comment les programmes de l'enseignement secondaire sont-ils construits ?

En Belgique, au sein de la Communauté française, le système éducatif organise l'enseignement secondaire selon un référentiel général défini par les autorités compétentes. Ce référentiel explicite clairement et précisément les contenus d'apprentissage à travailler en classe. Il établit les savoirs, savoir-faire et compétences (connaître, appliquer et transférer) essentiels à faire acquérir par les élèves pour chaque domaine d'études. Toutefois, au sein de la Communauté française, plusieurs réseaux scolaires coexistent, chacun adaptant ce référentiel général à ses propres valeurs pédagogiques, philosophiques ou religieuses, ainsi qu'aux besoins spécifiques de ses élèves. Voici les différents réseaux présents en Fédération Wallonie-Bruxelles : l'enseignement organisé par la Fédération Wallonie-Bruxelles (WBE), l'enseignement libre subventionné (CECP et CPEONS) et l'enseignement libre non subventionné (SeGEC, FELSI,...).[\[10\]](#)

Chaque réseau a la possibilité de proposer des options pédagogiques différentes tout en respectant les exigences du référentiel général. Ainsi, bien que le référentiel général assure une certaine cohérence dans l'enseignement secondaire au sein de la Communauté française, les programmes peuvent varier d'un réseau à l'autre.

2.1.2 Analyse des programmes dans l'enseignement de transition en mathématiques pour scientifiques (6h/semaine)

Nous allons examiner les spécificités de chaque programme en ce qui concerne le chapitre des nombres complexes. Nous analyserons uniquement les programmes du SeGec et de la WBE car ces deux réseaux encadrent la majeure partie des élèves de l'enseignement francophone. Dans l'enseignement secondaire de transition (général et technique), spécifiquement en mathématiques pour scientifiques (6h/semaine), une analyse des programmes révèle une convergence entre les programmes établis par le SeGEC (Annexe [B.2](#)) et la WBE (Annexe [B.3](#)). Cette convergence entre ces deux programmes est logique puisqu'ils ont été élaborés à partir du même référentiel de compétences (Annexe [B.1](#)). Toutefois, le programme de la WBE est nettement plus détaillé.

Selon le référentiel et les programmes des deux réseaux, le chapitre des nombres complexes a pour objectif de développer l'utilisation de ces nombres pour démontrer ou obtenir des résultats. En particulier, il est précisé dans la compétence « Transférer » que les nombres complexes doivent être utilisés pour démontrer une propriété géométrique ou résoudre un problème de géométrie plane. Dans la section 2.3, nous discuterons de l'absence d'indication sur la méthodologie à suivre pour développer cette compétence.

Comme évoqué précédemment lors de la parenthèse sur la construction des programmes, les compétences telles que « Appliquer », « Connaître », « Transférer » et « Ressources » sont semblables dans tous les programmes, car elles sont basées sur le même référentiel. Les différences entre les programmes des deux réseaux résident donc dans les prérequis, les objectifs visés, ainsi que dans les stratégies pédagogiques, mais cela est le cas pour chaque unité d'acquis d'apprentissage (UAA).

Concernant les prérequis, le programme de la WBE évoque les outils algébriques, la trigonométrie, le deuxième degré et les fonctions trigonométriques. En revanche, le SeGEC insiste sur les prérequis en algèbre avec la notion de nombre, en géométrie, dans le cadre du calcul vectoriel et en trigonométrie, avec notamment les formules d'addition. Celles-ci seront nécessaires pour définir la forme trigonométrique de la multiplication de nombres complexes.

En ce qui concerne les objectifs, dans le programme de la WBE, le chapitre sur les nombres complexes vise à introduire une nouvelle notion afin d'élargir le champ des nombres réels. Il met en avant que la représentation algébrique d'un nombre complexe offre une solution aux équations qui étaient jusque-là non résolues, tout en indiquant que la forme trigonométrique d'un nombre complexe présente des avantages pour effectuer certaines opérations algébriques et est efficace pour définir les transformations du plan. Le programme du SeGEC quant à lui souligne l'interdisciplinarité du chapitre des nombres complexes permettant de mobiliser les acquis de domaines différents : nombres, algèbre, géométrie et trigonométrie ; conférant ainsi à plusieurs concepts un statut nouveau dans la construction mathématique.

En ce qui concerne les directives et stratégies pédagogiques, le programme de la WBE propose une introduction des nombres complexes soit par l'histoire de la résolution des équations soit comme codage des similitudes directes, ce qui donne un certain cadre. Ce programme demande également d'effectuer un lien entre le signe de la partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe et la valeur de son argument. Il est également précisé que l'enseignant pourra aborder la représentation exponentielle d'un nombre complexe. Dans le programme SeGEC, il est demandé d'explicitier que la somme de deux nombres complexes représente une translation, le produit d'un nombre complexe par un réel représente une homothétie, le produit d'un nombre complexe par un nombre complexe de module 1 correspond à une rotation et le produit de deux nombres complexes correspond à la composée d'une rotation et d'une homothétie. Ce programme évoque que l'approche

historique ne doit pas être négligée mais ne recommande aucune introduction spécifique. La forme exponentielle d'un nombre complexe n'est pas évoquée dans le programme du SeGEC.

En conclusion, l'analyse des programmes d'enseignement de transition en mathématiques pour scientifiques (6h/semaine) dans les réseaux SeGEC et WBE révèle une convergence due à leur fondement sur un référentiel commun. Cette convergence était prévisible, mais il est notable que le programme de la WBE est nettement plus détaillé, tandis que celui du SeGEC offre des indications plus générales. Les deux programmes évoquent l'importance de l'approche historique et de la représentation géométrique. Une différence notable concerne la présence ou non de la forme exponentielle dans le programme.

2.1.3 Analyse des programmes dans l'enseignement de qualification axé sur les métiers d'industrie

Dans l'enseignement secondaire de qualification, les nombres complexes sont abordés dans les options proposant une formation dans l'industrie telles que technicien en informatique, technicien en usinage, mécanicien/automaticien, technicien en électronique, électricien/automaticien, technicien en microtechniques, technicien du froid.

Pour ces élèves, la compétence à développer dans le chapitre des nombres complexes est l'utilisation de l'outil « nombre complexe » dans le cadre d'un cours d'électricité.

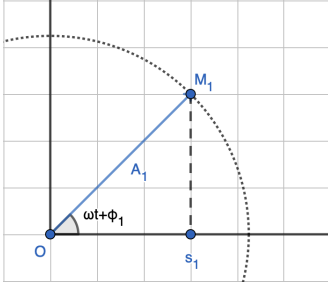
Concernant les prérequis, le programme de la WBE (Annexe B.5) identifie la trigonométrie comme prérequis tandis que le programme du SeGEC (Annexe B.4) évoque les différents ensembles de nombres.

En ce qui concerne les objectifs du programme du SeGEC, il s'agit d'introduire les concepts et les méthodes nécessaires pour expliquer certains phénomènes électriques où l'utilisation des nombres complexes est avantageuse. Le programme de la WBE quant à lui précise que l'objectif est de modifier la représentation de Fresnel, permettant d'ajouter, de soustraire des fonctions sinusoïdales, en une notation complexe. En effet, dans l'analyse des circuits à courant continu, les élèves ont appris à additionner des tensions et des courants. Cependant, en courant alternatif, ces grandeurs varient en sinusoïdes, l'addition des valeurs instantanées point par point est une méthode fastidieuse, ce qui justifie l'utilisation de nombres complexes. Ces nombres permettent d'effectuer des opérations qui combinent les caractéristiques de façon rapide.

Voici l'explication de ce qu'est la représentation de Fresnel suivi d'un exemple de l'apport des nombres complexes à cette représentation.

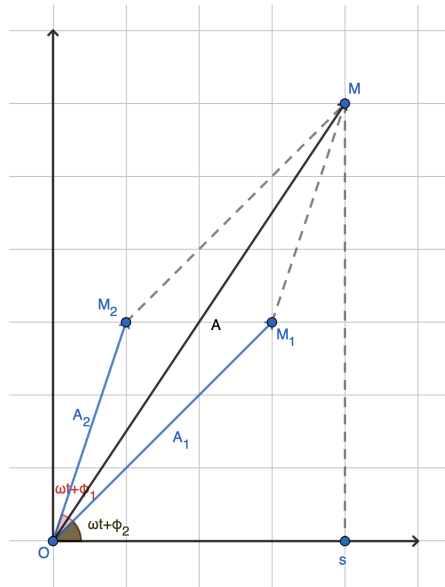
La représentation de Fresnel permet de représenter une grandeur sinusoïdale par un vecteur tournant.

On associe à une grandeur sinusoïdale $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ un vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ appelé vecteur de Fresnel [20] :



- de module $\|\overrightarrow{OM_1}\| = A_1$,
- tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω ,
- et d'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1})$ à l'instant t de mesure $\omega t + \varphi_1$.

Considérons $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, alors on peut représenter la somme de $s_1(t) + s_2(t) = s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ comme ceci :



où OM_1MM_2 est un parallélogramme.

Dans le triangle OMs :

$$\|sM\| = \|s_1M_1\| + \|s_2M_2\|$$

$$\|Os\| = \|Os_1\| + \|s_2s\| = \|Os_1\| + \|Os_2\|$$

d'où

$$\tan \varphi = \frac{\|sM\|}{\|Os\|} = \frac{\|s_1M_1\| + \|s_2M_2\|}{\|Os_1\| + \|Os_2\|} = \frac{A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \quad (2.1)$$

De plus,

$$A^2 = \|OM\|^2 = \|OS\|^2 + \|sM\|^2 \quad (2.2)$$

$$= (A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2))^2 + (A_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \sin(\varphi_2))^2 \quad (2.3)$$

$$= A_1^2 \cos^2(\varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\varphi_2) + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \quad (2.4)$$

$$+ A_1^2 \sin^2(\varphi_1) + A_2^2 \sin^2(\varphi_2) + 2A_1A_2 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \quad (2.5)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.6)$$

Utilisation de la représentation de Fresnel dans un exemple :

Soit $s_1(t)$ représenté par le vecteur tournant $\overrightarrow{OM_1}$: $A_1 = 3\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_1}) = \pi/4$ et soit $s_2(t)$ représenté par le vecteur tournant $\overrightarrow{OM_2}$: $A_2 = \sqrt{10}$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_2}) = 1,249rad$.

Par (2.1) : $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2} \sin(\pi/4) + \sqrt{10} \sin(1,249)}{3\sqrt{2} \cos(\pi/4) + \sqrt{10} \cos(1,249)} = 1,4999$ alors $\varphi = 0,9828rad$

et par (2.6) : $A^2 = (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 + 2(3\sqrt{2})(\sqrt{10}) \cos(1,249 - \pi/4) = 52,0005$, alors $A = 7,2111$

L'introduction des nombres complexes et du plan complexe réduit les calculs. En effet, grâce au plan complexe :

$$s_1(t) = 3 + 3i \text{ et } s_2(t) = 1 + 3i \rightarrow s(t) = (3 + 3i) + (1 + 3i) = 4 + 6i.$$

Le module du nombre complexe $s(t)$ est $|s(t)| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13} \simeq 7,2111$ et l'argument est $\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) = \arctan(\frac{6}{4}) = 0,9828rad$ ce qui concorde.

Le but du chapitre des nombres complexes est donc de développer le calcul afin d'appréhender les notions d'électricité et de modéliser des phénomènes ondulatoires. L'objectif n'est pas de se concentrer sur la résolution technique d'équations complexes, mais plutôt de fournir les outils indispensables pour aborder les cours d'électricité.

Revenons aux programmes, il est indiqué d'utiliser la lettre « j » pour représenter le nombre imaginaire, plutôt que « i » afin d'éviter toute confusion avec l'intensité du courant. Par ailleurs, de manière similaire aux programmes de l'enseignement de transition, la WBE envisage également l'approche de la forme exponentielle.

En conclusion, l'analyse des programmes dans l'enseignement de qualification axé sur les métiers de l'industrie explicite l'importance du chapitre des nombres complexes dans

le cadre de cours d'électricité. En particulier, le programme de la WBE insiste sur le fait que les nombres complexes permettent la modification de la représentation de Fresnel, tandis que le programme du SeGEC reste plus générale, en mentionnant que les nombres complexes permettent d'acquérir des concepts et méthodes nécessaires pour expliquer des phénomènes électriques. En outre, les programmes recommandent l'utilisation de la lettre « j » pour représenter le nombre imaginaire afin d'éviter toute confusion avec l'intensité du courant, et la WBE envisage également l'approche de la forme exponentielle.

2.1.4 Les nombres complexes durant les mathématiques modernes

Pendant l'époque des mathématiques modernes (1970-1980), les nombres complexes étaient abordés dans un chapitre intitulé « Le champ complexe » du manuel Mathématique Moderne de G. Papy [15]. La section « nombres complexes » de ce chapitre contient différentes représentations des nombres complexes : algébrique, matricielle et trigonométrique. Cependant, la représentation géométrique de l'addition et de la multiplication n'était pas explicitement enseignée, bien que la compréhension des nombres complexes comme une rotation d'un quart de tour soit présente. De plus, la forme exponentielle des nombres complexes n'était pas incluse dans le programme de cette période.

2.2 Structuration du chapitre sur les nombres complexes par différents enseignants

Dans cette section, nous analyserons la structure du chapitre des nombres complexes à partir des tables des matières de quatre écoles différentes (Annexe C).

La progression typique d'un chapitre commence par une introduction qui peut mettre en lumière l'origine et/ou l'importance de cette extension des nombres réels. Nous aborderons différentes introductions à la Section 2.4.

Ensuite, la définition de l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ et d'un nombre complexe est abordée. Dans la majorité des cas cela se fait via la forme algébrique, bien que dans un établissement un nombre complexe est tout d'abord compris comme un couple (a, b) .

L'égalité entre deux nombres complexes est universellement traitée, mais le moment où les enseignants introduisent le plan de Gauss varie. Il peut être introduit avant ou après les opérations avec les nombres complexes sous forme algébrique ainsi que les équations.

Après avoir introduit les différentes opérations sur la forme algébrique d'un nombre complexe et sa représentation dans le plan de Gauss (dans un ordre peut-être différent), la représentation trigonométrique d'un nombre complexe est abordée. Dans une des classes observées, cette représentation est vue sans interprétation graphique. Toutes les opérations précédemment vues avec la représentation algébrique sont revues avec cette représentation trigonométrique mais on y ajoute l'opération puissance et aborde ainsi la formule de Moivre.

Dans une des quatre écoles, la forme trigonométrique est vue en parallèle de la forme exponentielle.

Ensuite vient le calcul des racines n^{e} d'un nombre complexe. Toutes les écoles abordent le fait que dans le plan de Gauss, ces racines sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon $r = \sqrt[n]{\varphi}$.

L'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes est parfois omise dans certaines écoles, en particulier celle de la multiplication.

La forme exponentielle est généralement abordée dans le cours d'activités complémentaires.

En conclusion, dans le chapitre des nombres complexes, les professeurs mettent souvent moins l'accent sur la représentation et l'interprétation géométrique, ce qui peut être une lacune dans la compréhension globale des élèves.

2.3 Utilisation des nombres complexes pour démontrer une propriété géométrique ou résoudre un problème de géométrie plane.

Dans cette section, nous examinerons trois problèmes où l'on peut utiliser les nombres complexes pour démontrer des propriétés géométriques ou résoudre des problèmes de géométrie plane, compétence cible du programme (Section 2.1.2). Les programmes de la WBE et du SeGec n'incluent pas de démarche spécifique pour aborder ce type de problèmes, ce qui conduit à ce qu'ils soient peu voire pas traités par les professeurs.

Le premier problème que nous allons traiter est tiré du cours d'une école du Brabant wallon, avec un indice socio-économique de 18. Bien qu'il soit inclus dans les ressources des élèves, il n'a pas été abordé en classe. De plus, il s'agit du seul exercice traitant cette compétence parmi les quatre cours consultés lors des observations dans les classes.

Les deux autres problèmes sont extraits de la dernière édition du manuel CQFD [3].

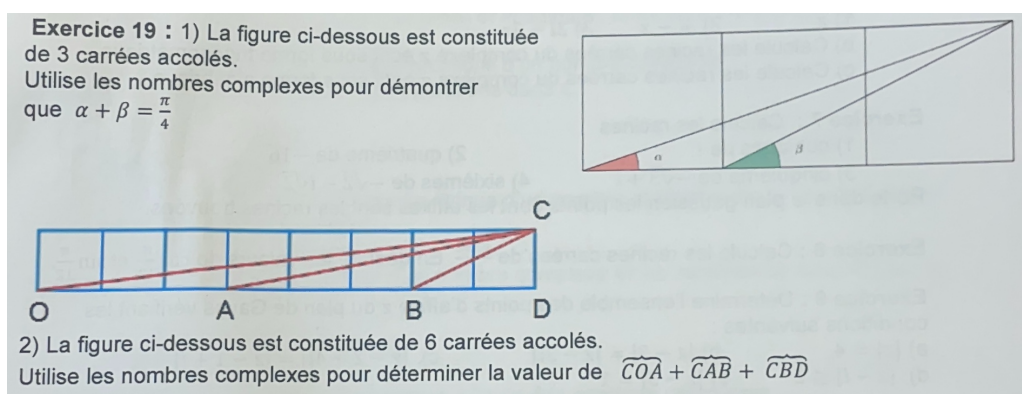
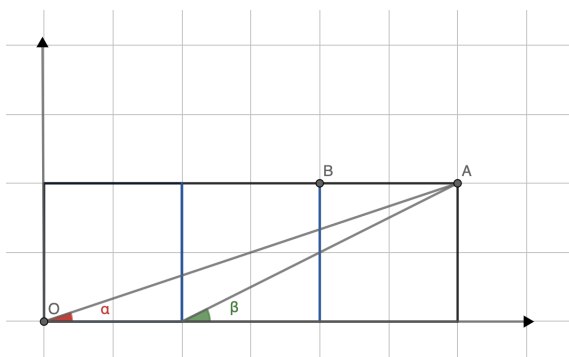


FIGURE 2.1 – Exercice géométrique tiré du cours d'une école du Brabant Wallon

Voici une manière de résoudre la première partie de l'exercice de la Figure 2.1 :

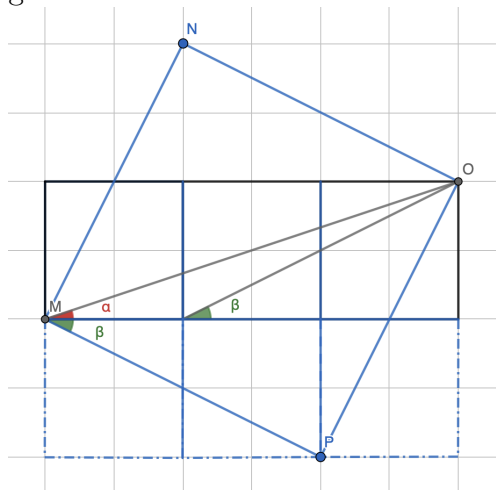


Soit le plan complexe d'origine O , les nombres complexes $z_A = 3 + i$ et $z_B = 2 + i$ associés aux points A et B , ont respectivement comme argument α et β . Par la propriété du produit de deux nombres complexes sous forme trigonométrique, nous déduisons que nous voulons prouver que l'argument du produit de $z_A \cdot z_B$ est $\pi/4$.

Calculons $z_A \cdot z_B = (3 + i) \cdot (2 + i) = 6 + 3i + 2i - 1 = 5 + 5i$. Puisque la partie réelle est égale à la partie imaginaire, nous pouvons conclure que l'argument de $z_A \cdot z_B$ est bien $\pi/4$. En effet, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{5}{5} = 1$ et donc $\alpha + \beta = \pi/4$.

La résolution de la deuxième partie de l'exercice est similaire.

Cependant cet exercice aurait pu se résoudre sans les nombres complexes en utilisant la géométrie euclidienne. Voici une résolution possible :



Puisque MO est une diagonale du carré $MNOP$, l'angle $\widehat{OMP} = \alpha + \beta = 45^\circ$.

Passons aux exercices tirés du manuel CQFD [3] :

26 Quadrilatère et triangles équilatéraux
Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Les points M, N, P et Q sont respectivement les troisièmes sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ comme sur la figure ci-contre. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$? Justifier la réponse.

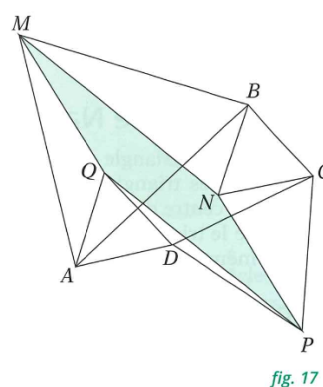
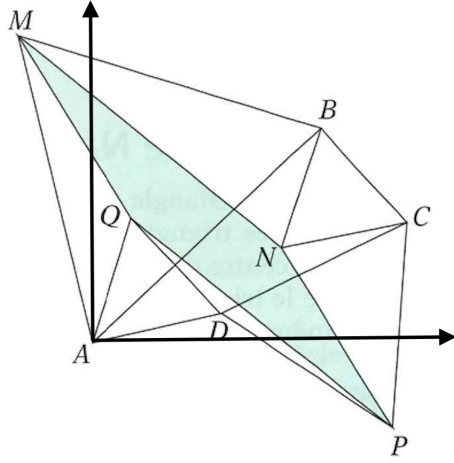


FIGURE 2.2 – Exercice tiré de la partie Transférer du manuel CQFD [3]



On fixe l'origine du plan complexe en A . Chaque point $B, C, M, N, \dots$ est associé à un unique nombre complexe $z_B, z_C, \dots$

Le triangle ADQ étant équilatéral, le segment $[z_A z_Q]$ est une rotation de 60° du segment $[z_A z_D]$ ou autrement dit $z_Q = z_D(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$. De même, $z_M = z_B(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$.

On obtient le nombre z_N en effectuant une rotation de 60° du nombre z_B autour du nombre z_C : $z_N = z_C + (z_B - z_C)(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$. De même pour le nombre z_P , il résulte d'une rotation de 60° du nombre z_D autour de z_C : $z_P = z_C + (z_D - z_C)(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$

Les nombres z_M, z_N, z_P, z_Q étant définis, nous pouvons calculer que vaut $\overrightarrow{z_M z_Q}$ et $\overrightarrow{z_N z_P}$:
 $z_M - z_Q = (z_B - z_D)(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$
 $z_N - z_P = ((z_B - z_C) - (z_D - z_C))(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ)) = (z_B - z_D)(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$
 Les deux cotés $[MQ]$ et $[NP]$ de $MNPQ$ sont donc de même longueur, de même direction et orientés de la même manière. Nous pouvons conclure que $MNPQ$ est un parallélogramme.

27 Triangle et carrés

Soit un triangle MNP . On construit les carrés $MPQR$ et $MNST$ ainsi que le parallélogramme $MRUT$ comme sur la figure ci-contre. Montrer que MU est une hauteur du triangle MNP et que $|MU| = |NP|$.

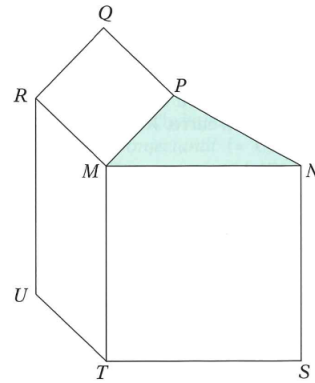
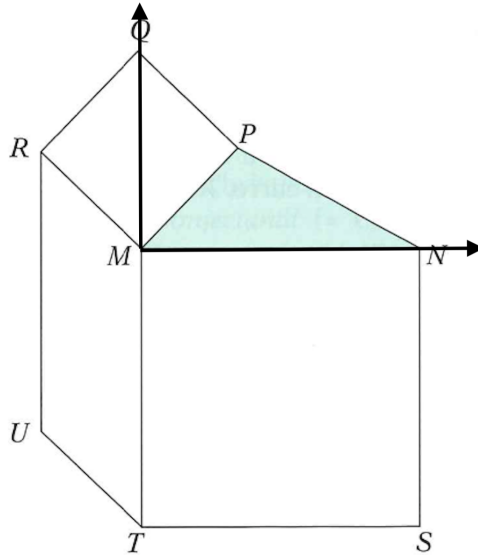


fig. 18

FIGURE 2.3 – Exercice tiré de la partie Transférer du manuel CQFD [3]



On fixe l'origine du plan complexe en M . Chaque point $N, P, Q, \dots$ est associé à un unique nombre complexe $z_N, z_P, \dots$

Le nombre z_R résulte d'une rotation de 90° du nombre z_P : $z_R = z_P \cdot i$ et de même :

$$z_T = z_N(-i)$$

Puisque $MRUT$ est un parallélogramme :

$$\begin{aligned} z_U &= z_R + z_T \\ &= z_P \cdot i - z_N \cdot i = (z_P - z_N)i \end{aligned}$$

Alors $\overrightarrow{z_U z_M}$ est une rotation de 90° de $\overrightarrow{z_P z_N}$ autour de l'origine du plan complexe et ces vecteurs sont de même longueur. De plus, $\overrightarrow{z_U z_M}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{z_P z_N}$ de part la rotation de 90° . En particulier MU est une hauteur du triangle MNP car MU est une droite passant par un de ses sommets M et coupant perpendiculairement le côté opposé à ce sommet : PN .

Il est intéressant de remarquer que dans ces deux derniers exercices la représentation exponentielle des nombres complexes aurait pu réduire l'écriture et que ces problèmes auraient pu être résolus sans les nombres complexes.

2.4 Introductions du chapitre

J'ai observé la façon dont le chapitre sur les nombres complexes a été introduit dans six écoles distinctes. Voici un résumé des écoles concernées ainsi que de l'approche utilisée dans chacune d'elles :

- Le professeur d'une école du Brabant wallon, avec un indice socioéconomique de 18, a opté pour une approche exclusivement historique.
- Un autre professeur d'une autre école du Brabant wallon, avec un indice socioéconomique de 20, a introduit le sujet à travers une introduction historique sous forme de jeu de rôle.
- Un professeur d'une école de la région bruxelloise, avec un indice socioéconomique de 19, a utilisé la formule de Cardan pour démontrer l'importance des nombres complexes.
- Dans une école de la région namuroise, avec un indice socioéconomique de 15, le professeur a choisi une introduction basée sur la démarche de Cardan.
- Dans une autre école de la région namuroise, avec un indice socioéconomique de 20, le professeur a abordé le sujet en se concentrant sur le problème des racines négatives.
- Enfin, l'équipe enseignante d'une école de la région du Brabant wallon, avec un indice socioéconomique de 18, a choisi une introduction par extension de l'ensemble des nombres.

J'ai également examiné ce qui était proposé dans les manuels scolaires. Dans le manuel CQFD 6e (6 périodes/semaine) [2], le chapitre sur les nombres complexes commence par un historique et propose ensuite deux introductions. La première s'appelle « Cardan et l'équation du troisième degré » et consiste à utiliser la démarche de Cardan pour trouver une solution particulière d'une équation du troisième degré de la forme $x^3 + px + q = 0$. La seconde s'intitule « Bombelli et l'équation du troisième degré » et propose d'utiliser la formule de Cardan pour résoudre une équation du troisième degré. Dans le manuel Espace Math 5e/6e (Coffre à outils) [1], une « activité pour découvrir » est proposée. Elle est basée sur l'historique et demande d'utiliser la formule de Cardan. Cette introduction met ensuite en évidence qu'il existe des équations du troisième degré pour lesquelles cette formule de Cardan ne fournit pas de solution et que Bombelli en trouva en posant i une racine de -1.

À partir de ces différentes approches, je vais vous proposer plusieurs méthodes d'introduction des nombres complexes. Les encadrés correspondent aux documents destinés aux élèves, et le texte en rouge indique la réponse attendue par l'élève.

2.4.1 Introduction par extension des nombres

Cette première introduction est basée sur l'introduction utilisée pour l'équipe enseignante d'une école de la région du Brabant wallon. Elle est tirée du manuel Conquérir

les mathématiques [13].

Résous les équations suivantes :

$$x + 2 = 0 \quad (2.7)$$

$$x = -2$$

$$4x + 5 = 0 \quad (2.8)$$

$$x = \frac{-5}{4}$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad (2.9)$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$$x^2 + 4 = 0 \quad (2.10)$$

$$x^2 = -4$$

$$x = ?$$

Dans l'ensemble des naturels $\mathbf{N}$, l'équation (2.7) n'admet pas de solution. On résout ce problème en créant les nombres négatifs. Dans l'ensemble des entiers $\mathbf{Z}$, cette équation (2.7) admet une solution.

Dans l'ensemble des entiers $\mathbf{Z}$, l'équation (2.8) n'admet pas de solution. On introduit les fractions. Dans l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$, cette équation (2.8) admet une solution.

Dans l'ensemble des rationnels $\mathbf{Q}$, l'équation (2.9) n'admet pas de solution. On introduit les irrationnels. Dans l'ensemble des réels $\mathbf{R}$, cette équation (2.9) admet deux solutions.

Dans l'ensemble des réels $\mathbf{R}$, l'équation (2.10) n'admet pas de solution. C'est pourquoi on crée de nouveaux nombres : les nombres complexes $\mathbf{C}$, qui permettent de déterminer les solutions de cette équation.

Dans cet ensemble des nombres complexes, il existe un nombre i appelé imaginaire tel que $i^2 = -1$. A l'aide de ce nouveau nombre tu es maintenant capable de résoudre l'équation (2.10).

$$x^2 = -4 = 4 \cdot (-1) = 4i^2$$

$$x = \pm\sqrt{4i^2} = \pm 2i$$

Cette introduction offre une approche concrète pour les élèves en présentant la construction d'un ensemble de nombres étendu. Cependant, elle peut sembler magique en faisant passer subitement l'impossible, comme la racine de nombres négatifs, au possible. Elle ne donne pas de justification à l'introduction de ces nombres. De plus, cette présentation ne reflète pas fidèlement l'historique du développement des nombres complexes ni leur réel utilité.

2.4.2 Introduction par la démarche de Cardan

Cette introduction est basée sur celle utilisée dans une école de la région namuroise. Elle est elle-même dérivée d'une introduction proposée dans le manuel CQFD [2]. Cependant, j'ai apporté certaines modifications à l'introduction initiale. En effet, l'introduction proposée par le manuel CQFD ne fait pas apparaître le « problème » du discriminant négatif. Elle souhaite juste faire remarquer aux élèves que la méthode de Cardan n'apporte pas toutes les solutions. Cette approche ne fournit donc pas de réelle justification à l'introduction des nombres complexes ce qui a motivé mes modifications.

Nous allons découvrir ensemble ce que Cardan a proposé afin de résoudre l'équation $x^3 = px + q$.

Voici sa démarche :

Premièrement il a posé que $x = u + v$. Cardan remarque ensuite que

$$\begin{aligned}(u + v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= 3uv(u + v) + u^3 + v^3\end{aligned}$$

et si l'on pose $\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$ alors $u + v$ est solution de l'équation $x^3 = px + q$.

A partir de l'équation

$$x^3 = -6x + 20 \tag{2.11}$$

réalise les étapes suivantes afin de trouver, comme Cardan l'a fait, une solution de cette équation.

- 1.) Réécris l'équation en posant $x = u + v$: $(u + v)^3 = -6(u + v) + 20$
- 2.) Écris le système d'équation en remplaçant p et q par leur valeur respective :

$$\begin{cases} 3uv = -6 \\ u^3 + v^3 = 20 \end{cases}$$

3.) Quelle est la valeur du produit $u.v$? -2

4.) Déduis la valeur de u^3 (Indice : pose $y = u^3$) :

$$u^3 - \frac{8}{u^3} = 20$$

Posons $y = u^3 \neq 0$:

$$y - \frac{8}{y} = 20$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8 = 20y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 8 - 20y = 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = (-20)^2 - 4.1.(-8) = 432$

$$\Rightarrow u_{1,2}^3 = y_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{432}}{2.1} = 10 \pm 6\sqrt{3}$$

5.) Déduis-en une valeur de v^3 :

$$v_{1,2}^3 = 20 - (10 \pm 6\sqrt{3}) = 10 \mp 6\sqrt{3}$$

Une solution de cette équation 2.11 est $x = u + v = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 2$
Tu peux simplifier la valeur de x que tu as obtenue à l'aide de ta calculette.

6.) Vérifie à l'aide de la calculette graphique que l'équation n'admet que cette solution.

Utilise la même démarche pour calculer une solution de l'équation

$$x^3 - 30x + 36 = 0 \tag{2.12}$$

et explique ton raisonnement.

Avec la même démarche, nous avons $3uv = p = 30$ et $u^3 + v^3 = q = -36$. On déduit que $uv = 10$. Ensuite, on recherche la valeur de u^3 : $u^3 + \frac{1000}{u^3} = -36$ ce qui, en posant

$y = u^3$ nous mène à résoudre : $y^2 + 36y + 1000 = 0$. Nous obtenons un discriminant négatif ($\Delta = -2704$).

1.) Est-il possible que cette équation 2.12 n'admette aucune solution ?

Non. Les équations polynomiale du troisième degré sont continues. Leurs graphes sont donc des courbes continues et lisses, sans interruptions ni sauts, ce qui implique qu'ils doivent inévitablement traverser l'axe des abscisses à un certain point.

En effet, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 30x + 36 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 30x + 36 = +\infty$. Ainsi, chaque équation du troisième degré possède au moins une solution.

2.) Calcule les solutions de l'équation 2.12 à l'aide de la calculatrice graphique.

La calculatrice graphique nous indique que l'équation 2.12 admet trois solutions : $x = -6$, $x = 3 - \sqrt{3}$ et $x = 3 + \sqrt{3}$.

Pour pouvoir utiliser la méthode de Cardan, Bombelli inventa un nouveau nombre, dit « imaginaire », noté plus tard i par Euler et vérifiant $i^2 = -1$.

3.) En utilisant ce nombre imaginaire, donner les solutions « imaginaires » de l'équation du second degré pour laquelle tu avais obtenu un discriminant négatif.

$$\Delta = -2704 = 2704i^2, u_{1,2}^3 = y_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{2704i^2}}{2} = \frac{-36 \pm 52i}{2} = -18 \pm 26i$$

4.) En utilisant le fait que $i^2 = -1$, développer $(-3 + i)^3$ et $(-3 - i)^3$. En déduire u et v .

$$(-3 + i)^3 = -18 + 26i \text{ et } (-3 - i)^3 = -18 - 26i.$$

$$u = -3 + i \text{ et } v = -3 - i$$

5.) Vérifier que $u + v$ est bien solution de l'équation.

$u + v = -6$ qui est une solution donnée par la calculatrice graphique.

6.) La méthode de Cardan permet donc d'obtenir une solution. Trouve les 2 autres solutions en factorisant.

$$x^3 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x^2 - 6x + 6) = 0, \Delta = 12, x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

La méthode de Cardan pour résoudre les équations cubiques a révélé ses limites lorsqu'il est apparu que certaines équations n'avaient pas de solutions réelles. Pour surmonter cette limitation, certains mathématiciens ont eu l'idée de travailler avec des nombres imaginaires, impliquant des racines carrées de nombres négatifs. Ces nouveaux nombres, appelés nombres complexes, ont élargi le domaine des mathématiques en permettant la résolution d'équations auparavant insolubles dans le domaine des nombres réels.

Cette approche est fidèle à la problématique historique qui a conduit à la découverte des nombres complexes, évitant ainsi une introduction mystique de la racine d'un nombre né-

gatif. Cependant, cette méthode guidée peut susciter des interrogations chez les élèves.

2.4.3 Introduction "découverte d'un nouveau monde"

Cette introduction est inspirée de celle utilisée dans une école du Brabant wallon.

Voici une histoire fascinante qui nous emmène sur les rivages exotiques d'un monde totalement inconnu, mais cette fois-ci, nous n'allons pas parler des Amériques découvertes par Christophe Colomb. Non, l'Italien protagoniste se nomme Jérôme Cardan, et sa découverte ne nécessite pas de caravelles, mais plutôt une table, une chaise, du papier et une plume, car Cardan était un mathématicien.

Contrairement à Colomb, Cardan n'a fait qu'apercevoir ces nouveaux rivages. Cette exploration d'un nouveau monde s'est étalée sur trois siècles, menée par des mathématiciens éminents tels que Bombelli, Leibniz, Euler, Argan, Gauss, et bien d'autres encore. Peu importe les détails historiques, voici comment les choses auraient pu se passer.

Voici l'histoire d'un personnage fictif que nous appellerons « professeur ». Son aventure commence avec un problème en apparence simple :

Trouvez deux nombres m et n dont la somme vaut 10 et le produit vaut 40

Le professeur commence par écrire :

$$S = \dots m+n \quad \text{et} \quad P = \dots m.n$$

Le professeur un peu coincé se dit qu'avant de se lancer vers un nouveau monde, il va utiliser ce qu'il connaît. En d'autres termes, tester la bonne vieille équation du second degré pour faire avancer les choses. La boîte à outils du matheux donne une piste qui semble solide :

Deux nombres réels dont la somme est S et le produit est P sont, s'ils existent, les racines de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$

On connaît la valeur de S et P , remplaçons :

$$x^2 - (m+n)x + m.n = 0$$

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4.1.40 = -140$$

Aïe, l'exploration aboutit à une impasse, le discriminant est négatif. Si le discriminant est négatif, l'équation n'a pas de solution dans les réels. Mais ces deux nombres m et n doivent bien exister puisqu'ils se marient dans une somme et un produit.

Que faire ? Il faut tenter de contourner l'obstacle par des chemins de traverse. Visiblement, le problème entier nous dépasse. Ne regardons que la moitié, à savoir la somme $S = m + n$. Évidemment, il y a une infinité de solutions. Tiens, $5 + 5 = 10$, par exemple. Mais pourquoi introduire ce cas particulier ? Pourquoi se bloquer sur une solution si spéciale à savoir m et n égaux ? Faisons machine arrière et, excluons le fait de se limiter à cette solution.

Les deux nombres que nous cherchons peuvent s'écrire : $m = 5 + x$ et $n = 5 - x$. Nous recherchons maintenant un seul nombre x . Exécutons le produit P :

$$P = m.n = (5 + x).(5 - x) = 25 - 5x + 5x - x^2 = 25 - x^2$$

Ceci conduit à :

$$25 - x^2 = 40$$

$$\Rightarrow x^2 = -15$$

Le professeur est effaré. Dans son chemin de traverse, il tombe sur quelque chose de bizarre. A moins que ...mais non, cela ne mène nulle part...essayons quand même. Qui nous empêche d'écrire $x^2 = -15$ sous la forme $x^2 = 15.(-1)$? Personne, puisque c'est correct. Et pour trouver x , extrayons la racine carrée :

$$x = \pm\sqrt{-1}\sqrt{15}$$

Horreur ! Encore ce $\sqrt{-1}$. Tant pis, le nouveau monde est plein d'étrangetés, admettons. Posons,

$$m=5+x = 5 \pm \sqrt{-1}\sqrt{15}$$

$$n=5-x = 5 \mp \sqrt{-1}\sqrt{15}$$

Additionnons : $S = m + n = 10$

Mais ... ça fait 10 ! Nous retombons sur nos pattes.

Et pour le produit :

$$P = m.n = (5 + \sqrt{-1}\sqrt{15}).(5 - \sqrt{-1}\sqrt{15}) = 25 - 5\sqrt{-1}\sqrt{15} + 5\sqrt{-1}\sqrt{15} + 15 = 40$$

m et n existent bien ! Mais comme ces nombres sont bizarres ! Supprimons leur face hideuse par un lifting en posant :

$$\sqrt{-1} = i$$

i ? Oui, i comme imaginaire. Alors :

$$m = 5 + i\sqrt{15} \text{ et } n = 5 - i\sqrt{15}$$

C'est ainsi que le professeur a annexé un nouveau monde à l'empire des mathématiques. Il ne vous en dira pas plus mais sachez une chose : ce qui, à l'origine, n'était qu'une fantaisie a trouvé une multitude d'applications. Notamment en physique où tout ce qui vibre a besoin de complexes : électricité, ondes de radio et télé, physique des particules, acoustique, etc...

Cette méthode est basée sur la méthode de Cardan bien que cela ne soit pas explicite. En effet, lors de la recherche des racines de $x^3 = px + q$, l'astuce de Cardan consiste à poser $x = u + v$. L'équation devient alors : $(u + v)^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3$. On constate alors qu'on connaît la somme $u^3 + v^3 = q$ et le produit $uv = \frac{p}{3}$, quand on a la somme S et le produit P de deux nombres, on sait qu'ils sont racines de l'équation du second degré $x^2 - SX + P = 0$.

Cette méthode présente l'avantage d'adopter une approche assez littéraire, ce qui permet aux élèves de se laisser guider sans trop réfléchir. Cependant, cela peut également être un inconvénient car les élèves ne sont pas actif sur le plan cognitif. L'aspect plus amusant de cette approche introduit une dimension de confiance chez les élèves, ce qui peut favoriser un meilleur engagement dans l'apprentissage.

2.4.4 Introduction vectorielle

Cette introduction est inspirée des recherches de Caspar Wessel [6], mathématicien danois et norvégien du $XVII^e$ siècle.

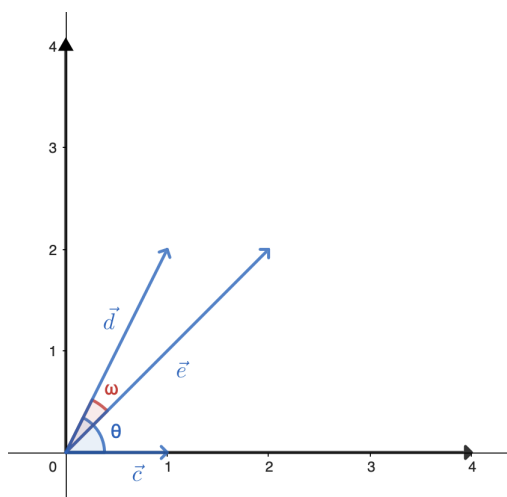
L'addition et la soustraction des nombres réels peuvent être représentées par des vecteurs placés sur une droite avec une direction positive et une direction négative. Ainsi $4 - 6$ est représentée comme suit :



La méthode consiste à déplacer l'origine de l'un des vecteurs jusqu'à l'extrémité de l'autre et d'utiliser la relation de Chasles.

La multiplication de deux nombres, représentés par deux vecteurs supportés par la même droite, comme par exemple $3 \cdot 1$ ou $3 \cdot -2$ est également simple. Toutefois, la règle $(-1) \cdot (-1) = 1$ n'est pas intuitive.

Nous pouvons généraliser ce calcul vectoriel sur une droite à un calcul vectoriel dans le plan. L'addition et la soustraction sont faciles à généraliser dans le plan par déplacement d'un des vecteurs en conservant la direction. Cependant, pour la multiplication, comment former le vecteur $\vec{e} \cdot \vec{d}$ à partir du vecteur $\vec{e}$ et du vecteur $\vec{d}$?

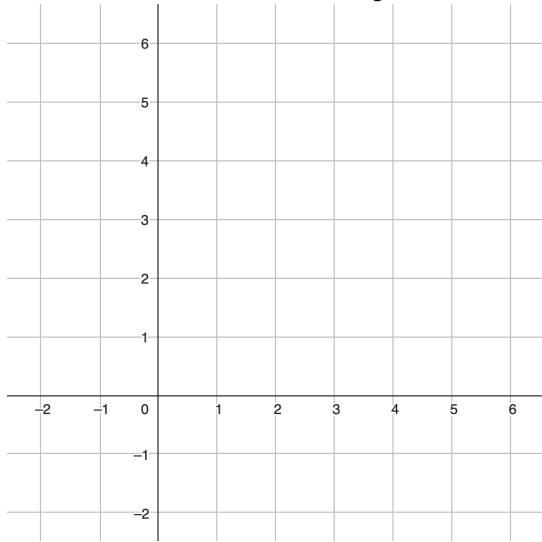


Si on multiplie le vecteur $\vec{c}$ représentant le nombre 1 par le vecteur $\vec{e}$, cela revient à multiplier le vecteur $\vec{c}$ par la norme du vecteur $\vec{e}$ et le faire tourner d'un angle θ , angle que forme le vecteur $\vec{e}$ avec la partie positive de l'axe x .

Maintenant si nous multiplions le vecteur $\vec{d}$ par le vecteur $\vec{e}$, nous allons dire que cela revient à multiplier le vecteur $\vec{d}$ par la norme du vecteur $\vec{e}$ et de le tourner dans le sens trigonométrique de l'angle θ . Cette opération ne correspond pas au produit scalaire, c'est une nouvelle opération.

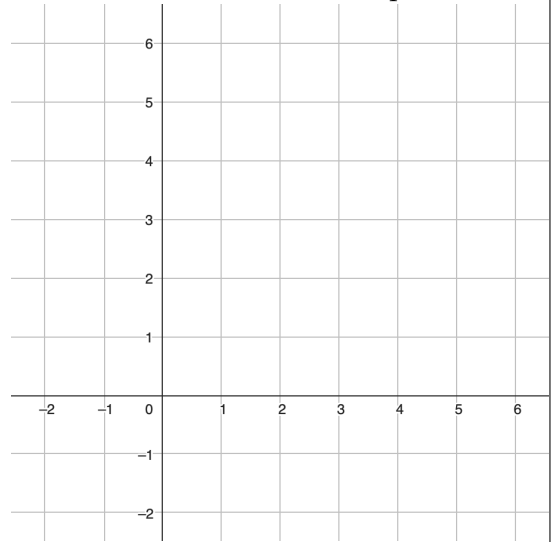
A l'aide de ce qui vient de t'être introduit, calcule les multiplications de vecteurs suivantes et donne une interprétation graphique.

Que vaut le produit du vecteur $\vec{e}$ et du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donne une interprétation.



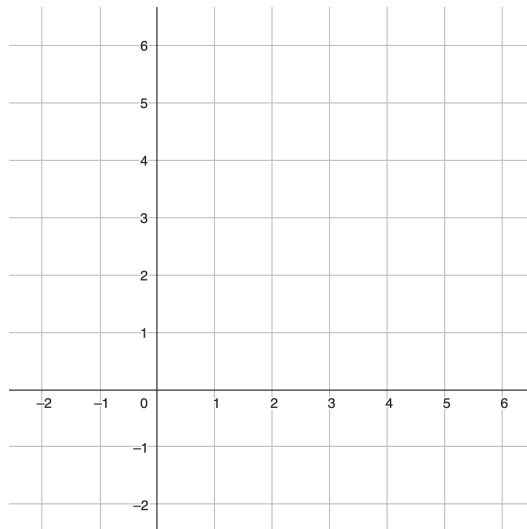
Cela revient à multiplier le vecteur $\vec{e}$ par la norme du vecteur $\vec{v}$ qui vaut 3

Que vaut le produit du vecteur $\vec{e}$ et du vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Donne une interprétation.

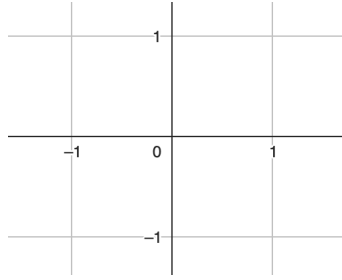


Cela revient à faire tourner le vecteur $\vec{e}$ d'un angle de 180°

Maintenant représente le vecteur obtenu en multipliant $\vec{e}$ et $\vec{d}$:



Que vaut alors le produit de deux vecteurs représentant le nombre -1 et pourquoi ?
(Tu peux t'aider d'une représentation graphique) **1 car le vecteur représentant de -1 à une norme de 1 et forme un angle de 180° avec la partie positive de l'axe x , alors multiplier -1 par -1 revient à faire tourner le vecteur représentant de -1 de 180° et à multiplier sa norme 1 par 1.**



Posons i qui a pour vecteur représentant le vecteur ayant pour composantes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que vaut $i \cdot i$ et pourquoi? -1 car le vecteur représentant de i a une norme de 1 et forme un angle de 90° avec la partie positive l'axe x , alors multiplier i par i revient à faire tourner de 90° le vecteur représentant de i et à multiplier sa norme 1 par 1.

Nous venons de développer des opérations avec les vecteurs afin de représenter des opérations entre nombres. En effet, les mathématiciens ont fait le choix de considérer i comme un nombre puisque $i \cdot i$ donne le nombre -1 . Ce nouveau nombre est constitué de deux dimensions, la dimension réelle représentée par l'axe x et la dimension imaginaire représentée par l'axe y . De part sa dimension réelle nulle, i est appelé « imaginaire ».

Ces nouveaux nombres bidimensionnels, qui s'appellent les nombres complexes, vont nous permettre d'associer un nombre à chaque vecteur.

Cette introduction aux nombres complexes à travers une représentation géométrique permet aux élèves de les visualiser comme des entités bidimensionnelles. De plus, cette perspective offre déjà une interprétation géométrique intuitive des opérations sur les nombres complexes, en particulier de la multiplication. Les élèves comprennent que multiplier deux nombres complexes implique non seulement la multiplication de leurs normes, mais aussi l'addition des angles qu'ils forment avec l'axe réel positif. Cette approche géométrique facilite la compréhension des propriétés fondamentales des nombres complexes et met l'accent sur la représentation géométrique, un aspect souvent négligé.

2.5 Perception du chapitre des nombres complexes par les élèves

Dans cette partie, nous donnerons des conseils pour contrer certaines réactions d'élèves face à l'introduction du chapitre des nombres complexes. Ensuite, nous analyserons les erreurs et difficultés observées en classes ainsi que lors des interrogations. Enfin, nous comparerons nos observations avec ce qui est présent dans la littérature.

2.5.1 Réactions des élèves face à ces nouveaux nombres et conseils

Voici quelques réactions d'élèves observées lors de l'introduction du chapitre sur les nombres complexes :

- « *Pas besoin de plus complexifier, c'est déjà difficile les mathématiques.* »
- « *On les a inventés ?* »
- « *Il y a d'autres nombres après ? Vous ne nous mentez pas cette fois ?* »
- « *i ça vaut quoi ? Ça n'a pas de valeur comme π ou e ?* »

En observant ces réactions, il est clair que les nombres complexes suscitent diverses interrogations et étonnements chez les élèves.

En effet, dans l'exploration des nombres complexes, l'utilisation du terme « complexe » peut engendrer des appréhensions et susciter un sentiment de peur chez les élèves. Ce mot semble impliquer une augmentation de la difficulté. Cette association peut être perçue comme une étape supplémentaire dans leur parcours mathématique déjà exigeant et peut générer une résistance mentale chez certains élèves, les poussant à craindre d'aborder ce nouveau concept mathématique.

Par ailleurs, il est important de clarifier que les nombres complexes ont été découverts plutôt qu'inventés car cela souligne leur légitimité dans la structure mathématique, renforçant ainsi la confiance des élèves dans leur utilisation.

De plus, l'idée de l'existence potentielle d'autres types de nombres après les nombres complexes peut sembler déroutante pour certains élèves. Ils sont habitués aux nombres réels et peuvent avoir du mal à concevoir qu'il puisse y avoir d'autres concepts mathématiques qui étendent encore notre compréhension de la quantité.

Enfin, la question de la valeur de i est cruciale dans la compréhension des nombres complexes. i représente l'unité imaginaire, la racine carrée de -1 . Cette notion abstraite peut dérouter les élèves, car elle ne correspond pas à une quantité physique observable. Cependant, en comprenant que i introduit une deuxième dimension dans le domaine des nombres, les élèves peuvent mieux appréhender son rôle. Cette représentation bidimensionnelle permet de visualiser et de manipuler les nombres complexes de manière plus intuitive, les rendant ainsi utiles dans de nombreux domaines scientifiques.

2.5.2 Erreurs et difficultés observées en classe (cadre formatif)

Lors des observations dans les classes, j'ai pu observer que les élèves rencontrent souvent plusieurs difficultés lorsqu'ils abordent le chapitre des nombres complexes.

Parmi les difficultés les plus courantes, certains élèves ont du mal à saisir qu'il faut enlever le « i », l'unité imaginaire, pour obtenir la partie imaginaire.

Un autre point de confusion réside dans l'ordre des termes dans les expressions complexes. Lorsque les nombres complexes ne sont pas sous la forme $a + ib$, comme dans l'expression $((3 + 5i) + (6i + 4))$, certains élèves ont du mal à distinguer les parties réelles des parties imaginaires. Cette confusion est exacerbée lorsque les nombres impliquent des imaginaires purs, certains élèves se demandent que vaut la partie réelle.

La manipulation des racines carrées de nombres complexes constitue également un défi. En effet, certains élèves ont du mal à conceptualiser que la méthode pour trouver les racines d'un discriminant complexe n'est pas la solution finale lors de la résolution d'équations du deuxième degré à coefficients complexes. Ils peuvent avoir du mal à comprendre que ces racines ne sont que des étapes intermédiaires dans la résolution de l'équation. Voici un exemple de cette confusion :

Question : Résoudre l'équation $z^2 - z + 3i - 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3i - 1) = 1 - 12i + 4 = 5 - 12i \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5-12i}}{2}$$

Calculons $\sqrt{5 - 12i}$: Soit $x + iy$ ($x, y \in \mathbf{R}$) une racine carrée de $5 - 12i$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x + iy)^2 &= 5 - 12i \\ \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi &= 5 - 12i \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \end{aligned}$$

Isolons x (ou y) dans la 2^e équation : $x = \frac{-12}{2y} = \frac{-6}{y}$

et substituons cela dans la 1^e équation : $(\frac{-6}{y})^2 - y^2 = 5$.

Réolvons l'équation obtenue $36 - y^4 - 5y^2 = 0$

On pose $w = y^2$: $-w^2 - 5w + 36 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{169}}{-2}$

$\Rightarrow w_1 = -9$ (rejet car $y^2 > 0, y \in \mathbf{R}$) et $w_2 = 4$

On obtient donc : $y = \pm 2$ et $x = \frac{-6}{\pm 2} = \mp 3$

Puisque x et y sont de signes contraires, les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

Certains élèves considèrent $3 - 2i$ et $-3 + 2i$ comme les solutions de l'équation $z^2 - z + 3i - 1 = 0$ et non comme les racines carrées de $5 - 12i$, étape intermédiaire à la résolution

de l'équation. Pour obtenir la solution finale, il faut, dans l'expression $z_{1,2}$, remplacer $\sqrt{5 - 12i}$ par les valeurs trouvées.

En ce qui concerne les erreurs fréquentes non spécifiques au chapitre des nombres complexes, l'oubli de la double distributivité/binôme conjugué conduit à des erreurs dans les calculs. Il est également fréquent que les élèves confondent l'inverse d'un nombre complexe avec son opposé, ce qui peut mener à des erreurs dans les manipulations algébriques.

2.5.3 Erreurs et difficultés observées lors des interrogations (cadre certificatif)

J'ai eu l'opportunité d'analyser les réponses d'une interrogation dans une école, ainsi que les erreurs les plus courantes rapportées par un professeur d'un autre établissement, selon le triangle didactique (Figure 2.4).

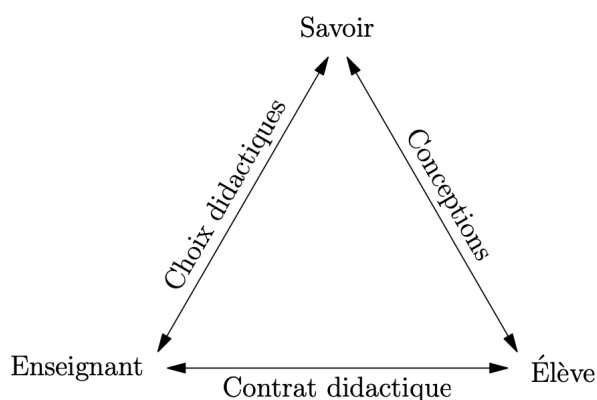


FIGURE 2.4 – Triangle didactique

Une situation d'enseignement peut se schématiser par un triangle dont les sommets sont le maître, l'élève et le savoir. Ce triangle permet de décrire les interactions qui ont lieu entre les trois différents acteurs de la situation d'apprentissage. [8]

Dans ce triangle didactique, la relation entre l'élève et le savoir est marquée par les conceptions erronées que l'élève peut avoir, souvent basées sur des connaissances antérieures ou culturelles, qui résistent à l'acquisition de nouveaux savoirs. La relation entre l'enseignant et le savoir est quant à elle influencée par les choix didactiques que l'enseignant fait, lesquels dépendent de sa propre compréhension des mathématiques et de la didactique, et peuvent parfois renforcer les obstacles d'apprentissage des élèves. Enfin, la relation entre l'enseignant et l'élève est régie par le contrat didactique, un accord souvent implicite qui influence les attentes de l'élève et ses prises de décision, pouvant mener à des erreurs. Ce contrat, bien que nécessaire, doit être régulièrement

remis en question pour favoriser la progression des élèves. Ce schéma 2.4 peut permettre aux enseignants de mieux comprendre les erreurs récurrentes observées dans leurs classes.[5]

Voici les questions de l'interrogation ainsi qu'une analyse des réponses erronées :

Question 1 : *L' affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifie.*

$$z_1 = (-2\sqrt{3} + 6i)^2 \text{ est l'inverse de } z_2 = \frac{1}{48}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Un solution possible :

$$z_1 = (-2\sqrt{3} + 6i)^2 = -24 - 24\sqrt{3}i$$

$$\text{Le module de } z_1 \text{ est } \rho = \sqrt{24^2 + (24\sqrt{3})^2} = 48$$

$$\text{L'argument de } z_1 \text{ est } \theta = \arctan \frac{-24\sqrt{3}}{24} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{La forme exponentielle de } z_1 \text{ est } z_1 = 48e^{\frac{4\pi}{3}} = 48e^{\frac{-2\pi}{3}}$$

$$\text{Vérifions que } z_1 \text{ est l'inverse de } z_2 : z_1 \cdot z_2 = (48e^{\frac{-2\pi}{3}}) \cdot (\frac{1}{48}e^{\frac{2\pi}{3}}) = 1$$

Réponse attendu par le professeur : Vrai

$$z_1 = 48e^{\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{1}{48}e^{\frac{-4\pi}{3}}$$

Dans plusieurs cas, les élèves ont ignorés l'exposant 2 dans les calculs, ceci est une erreur anecdotique, non reproductible. D'autres, ont confondu l'inverse avec l'opposé, ce qui a conduit à des réponses incorrectes. Cette erreur pourrait être due à un manque de connaissance du vocabulaire ou encore à une erreur d'inattention.

De plus, la plupart des élèves ont oublié de considérer dans quel quadrant se trouvait le nombre complexe z_1 afin de déterminer son argument : $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. D'autres étudiants ont négligé les relations entre angles orientés :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{(\sqrt{48}e^{i\frac{2\pi}{3}})^2} = \frac{1}{48}e^{-i\frac{4\pi}{3}} \neq z_2$$

Ces deux erreurs pourraient être liées à des choix didactiques. En effet, comme nous avons pu le remarquer dans la section 2.2, la représentation géométrique est souvent délaissée. Bien que ces choix didactiques n'ont fait que renforcer les difficultés épistémologiques déjà présentes. En effet, il n'est pas évident pour les élèves de considérer des angles négatifs ou supérieurs à 90° .

D'autres étudiants ont choisi de représenter le nombre complexe z_2 sous sa forme algébrique, mais ont commis une erreur en essayant de trouver l'inverse de z_2 dans cette forme algébrique :

$$z_2 = \frac{1}{48} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{48} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = \frac{-\sqrt{3}}{96} + i\frac{1}{96}$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{-96\sqrt{3}}{3} + 96i$$

Cette erreur pourrait être liée à une conception erronée de l'élève concernant l'inverse d'un nombre complexe. En effet, pour cet élève inverser un nombre complexe $z = a + bi$ revient à prendre l'inverse de la partie réelle et de la partie imaginaire : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}i$.

Question 2 : Dans le plan de Gauss, étudie la transformation f qui applique le point P d'affixe z sur le point P' d'affixe z' tel que $z' = -z + i$

Une solution possible :

Soit $z = a + bi$ le nombre complexe associé au point P . Ajoutons i à z : $z + i = a + bi + i = a + i(b + 1)$, cela correspond à traduire le point P d'une unité vers le haut. Ensuite, prenons le conjugué de $z + i$: $\overline{z + i} = a - i(b + 1)$, ceci revient à effectuer une symétrie orthogonale d'axe x à $z + i$. Pour finir, prenons l'opposé de $\overline{z + i}$: $-\overline{z + i} = -a + i(b + 1)$, ce qui correspond à effectuer une rotation d'angle π et de centre $(0, 0)$ à $\overline{z + i}$.

Réponse attendue par le professeur :

1. Translation $T(0,1)$
2. SO_x
3. $R(\pi)$

Remarquons que la formulation de la question demande d'étudier « la » transformation alors que le professeur attend la composée de plusieurs transformations. Il serait intéressant de reformuler la question en explicitant que nous attendons la composée de plusieurs transformations.

Pour cette question, certains étudiants n'ont pas identifiés à quelle transformation du plan correspond le conjugué d'un nombre complexe. De plus, la plupart des erreurs commises étaient dues à l'ordre des transformations. Ce type d'erreur peut être lié au choix didactiques dans le chapitre sur les compositions de fonctions et également au manque de représentation géométrique des nombres complexes.

Dans une autre école, le professeur m'a signalé que les fautes qui revenaient le plus souvent étaient :

- Lors de la démonstration que la somme de conjugués de deux nombres complexes est égale au conjugué de la somme de ces deux nombres complexes, les élèves ne distinguent pas les deux nombres complexes dans leur notation. Ils notent $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a + ib$ au lieu de distinguer les notations $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.
- Les étudiants négligent la définition de l'argument à 2π près.
- L'omission du fait que les racines 5^e d'un nombre complexe vont former un pentagone régulier dans le plan complexe.

Ces déclarations font part d'erreurs qui pourraient être liées aux choix didactiques. En effet, pour la première erreur, le professeur pourrait effectuer plus de calculs/démonstrations avec des nombres « abstraits ». Pour les deux dernières erreurs, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, il serait intéressant d'insister plus sur la représentation géométrique des nombres complexes. Bien qu'il est vrai, comme évoqué plus haut, que la notion d'angles associés est une difficulté épistémologique.

2.5.4 Réactions et erreurs observées dans la littérature

L'article intitulé « Ces nombres que l'on dit « imaginaires » » de Hilda Rosseel et Maggy Schneider [16] rassemble les réactions des élèves lors de l'introduction des nombres complexes par le postulat qu'il existe un nombre i dont le carré est égal à -1 . Les auteurs de cet article ont interviewé des élèves ayant reçu cet enseignement, où le concept de $i^2 = -1$ est introduit dès le début. Ces entretiens révèlent un certain malaise chez les élèves vis-à-vis des nombres complexes. Voici quelques extraits :

1. *« J'ai du mal à cerner cette idée que $i^2 = -1$. J'aime bien les choses bien concrètes, réelles et j'aime faire des schémas et des dessins. Ici c'est carrément le flou. Je ne comprends pas pourquoi on doit poser $i^2 = -1$. Pourquoi pas $i^2 = -0,97$? Pourquoi ça marche avec $i^2 = -1$? »*
2. *« L'évocation de « nombre complexe » me fait penser à l'impossible, à des nombres sans doute compliqués et qui n'existent peut-être pas. Je pense aussi, en entendant ce groupe de mots résonner dans mes oreilles, que les hommes les ont inventés pour résoudre l'« irrésolvable », ce dont toute personne sensée dirait « c'est impossible » ou « cela n'existe pas ». D'ailleurs, les professeurs des années inférieures vous diront tous que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Et pourtant, lorsqu'on voit cette symphonie de « i » mélangés avec des a et des b, des cosinus et autres logarithmes, on se rend bien vite compte, soit que les professeurs des années inférieures nous ont menti, soit que le professeur de rhéto veut nous faire découvrir une nouvelle dimension des mathématiques inconnue de nous, élèves, jusqu'alors. La question que je me pose dès lors est la suivante : pourquoi les professeurs des années précédentes ont-ils agi de la sorte ? »*

3. « Premièrement, la notion de nombre complexe est quelque chose de flou dont visiblement personne ne connaît la majeure partie de manière claire, quelque chose d'absurde et d'insignifiant puisqu'on ne peut se faire une idée réelle d'un fait imaginaire. Je ne vois pas l'intérêt de jouer avec des notions purement abstraites sans utilité et donc sans application. Il s'agit pour moi d'un truc pas drôle à apprendre, je n'y ai rien compris, absolument rien. »
4. « Il me serait impossible de donner une signification à i et je ne cherche pas vraiment à connaître sa signification. Pour moi, i représente uniquement un outil de calcul. »
5. « i est un nombre imaginaire qui permet de changer le signe d'un nombre qui nous dérange. »
6. « La lettre « i » est un nombre inventé qui élevé au carré donne -1 . On peut le voir comme un nombre vu que tous les autres nombres ont été inventés aussi mais il change tout à fait ce que je pensais des maths avant. »
7. « « i » est un nombre tellement difficile qu'on ne sait l'écrire que sous la forme d'une lettre. »

Dans ces citations nous retrouvons, comme dans les réactions observées en classes (Section 2.5.1), l'idée que les nombres complexes sont des nombres compliqués (Citation 2), qu'ils ont été inventés (Citations 2 et 6), la remise en question de pourquoi la racine carrée des nombres négatifs est maintenant considérée possible alors qu'auparavant elle ne l'était pas (Citation 2). De plus, la signification, la valeur, de i est interrogée dans plusieurs citations (1, 4, 5, 7). En outre, certains élèves remettent en question l'intérêt même de ces nombres (Citation 3).

Deux articles, l'un écrit par Imène Ghedamsi et Raja Tanazefi [12] et l'autre par Emily Smith, Justyna Zwolak et Corinne Manogue [18], mettent en lumière diverses difficultés liées aux nombres complexes.

Ils signalent tout d'abord des difficultés liées aux abus de généralisation des propriétés des nombres réels aux nombres complexes. Cela inclut notamment des élèves qui tendent à généraliser la relation d'ordre des nombres réels aux complexes. Il y a également ceux qui confondent le produit de deux nombres complexes avec celui de réels, dès lors que ce produit n'est pas exprimé sous forme cartésienne.

Des difficultés calculatoires sont également relevées, telles que l'incapacité d'utiliser correctement les propriétés de distributivité sur les complexes sous forme algébrique, soit dû à des erreurs arithmétiques liées à la multiplication ou à une négligence du signe de i^2 . Un autre exemple est l'oubli d'opérer sur le module lors du calcul z^2 sous la forme exponentielle.

En outre, les élèves rencontrent des obstacles lors du passage entre les différentes représentations des nombres complexes. Certains peinent à passer de la représentation géométrique à la représentation algébrique et vice versa. Nous observons cette difficulté à la question 1 (Section 2.5.3) où certains élèves n'ont pas considéré dans quel cadran se trouvait le nombre complexe. D'autres élèves souffrent d'un manque de connaissances de

base sur les nombres complexes nécessaires pour ces traitements, comme les notions de conjugué, de module, d'argument et les notations correspondantes.

Enfin, les élèves ont des difficultés à choisir la représentation appropriée. Ils sont souvent incapables de choisir de manière autonome les configurations complexes qui pourraient simplifier le travail attendu, et même ceux qui le font ne parviennent pas toujours à optimiser cette utilisation. De plus, ils éprouvent des difficultés à interpréter géométriquement les configurations complexes, comme nous l'observons à la question 2 (Section [2.5.3](#)), ce qui entrave la résolution des problèmes.

2.6 Pourquoi enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire ?

Durant les observations que j'ai pu effectuer dans le secondaire, j'ai demandé aux professeurs pourquoi ils trouvaient intéressant ou non d'enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire. Voici quelques réponses recueillies :

- « *Les nombres complexes permettent d'effectuer un lien entre les opérations algébriques et la représentation dans le plan, donc un lien entre la géométrie et les opérations algébriques. De plus, ces nombres permettent d'étudier les ondes.* »
- « *Les nombres complexes permettent de modéliser les rotations, les ondes et il est possible de les utiliser dans les séries de Fourier.* »
- « *Les nombres complexes éveillent la curiosité et montrent que l'envie d'aller plus loin permet de découvrir des choses qui auront un lien avec d'autres domaines.* »
- « *Pour montrer aux élèves qu'il existe un ensemble de nombres plus grand que celui des réels qui permet de résoudre toutes les équations du second degré et afin que les élèves soient bien préparés pour leurs études supérieures (scientifique).* »

Afin de recueillir plus de témoignages, j'ai diffusé un questionnaire comportant cette même question dans différents réseaux d'enseignants en mathématiques. Le questionnaire comportait des questions sur la carrière des enseignants telles que depuis quand ils enseignent, dans quelles classes, ainsi que leur opinion sur la pertinence de l'enseignement des nombres complexes dans le secondaire. Au total, j'ai recueilli les réponses de 38 professeurs de mathématiques.

Ci-dessous se trouve un aperçu des réponses obtenues, l'ensemble des réponses se trouve en Annexe [D](#) :

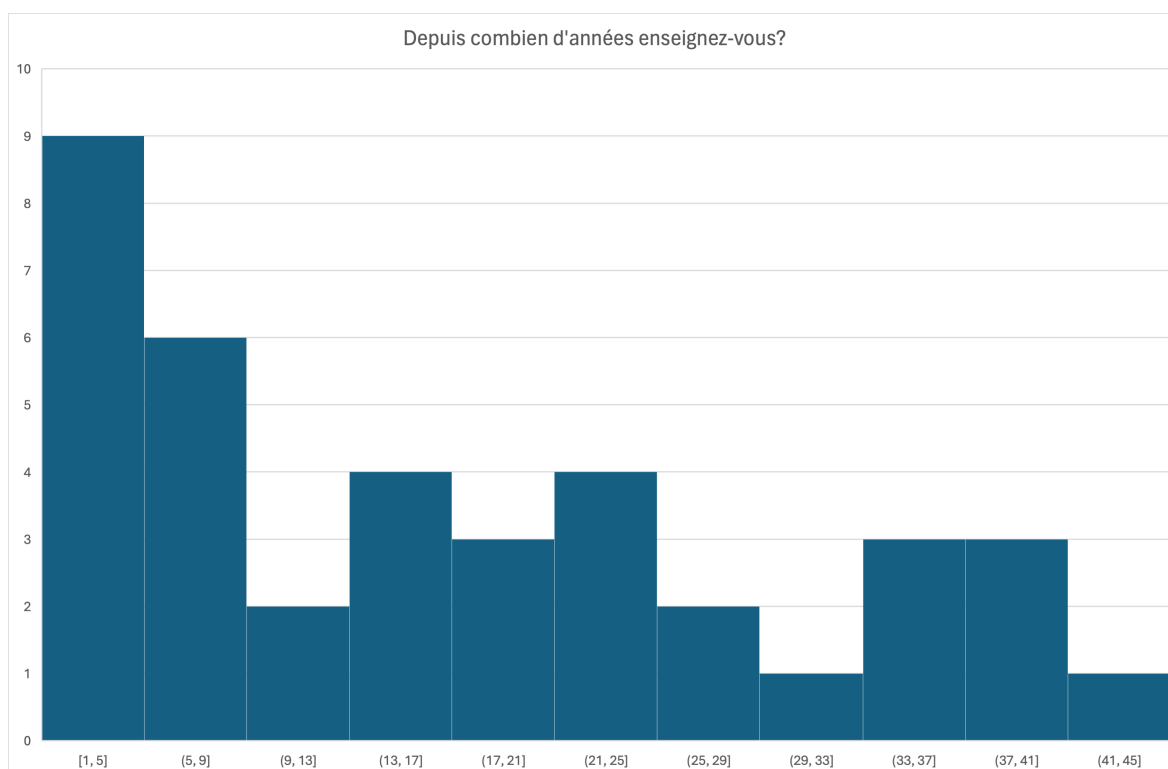


FIGURE 2.5 – Années d’enseignement des professeurs ayant répondu au questionnaire

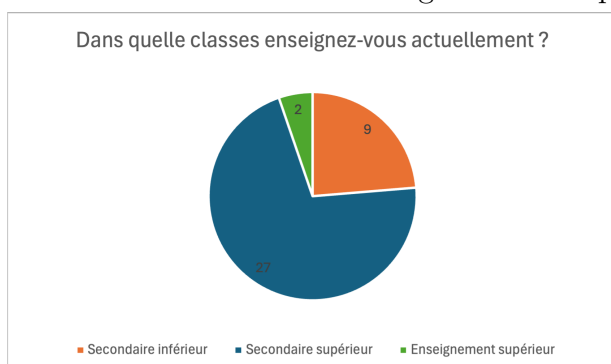


FIGURE 2.6 – Classes dans lesquelles les professeurs ayant répondu au questionnaire enseignent

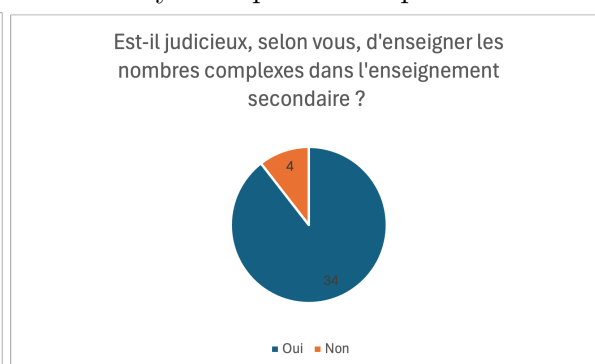


FIGURE 2.7 – Avis des professeurs ayant répondu au questionnaire sur l’enseignement des nombres complexe dans l’enseignement secondaire

A partir des réponses à la question « Selon vous, pourquoi enseigner les nombres complexes dans l’enseignement secondaire ? », j’ai pu identifier six natures d’arguments qui justifient d’enseigner les nombres complexes dans le secondaire : l’utilité pratique, la transversalité, le développement cognitif, la vision dynamique et évolutive des mathématiques, l’histoire et la préparation académique.

Néanmoins, la Figure 2.7 révèle que sur les 38 professeurs ayant répondu au questionnaire, 4 estiment qu'il n'est pas pertinent d'enseigner les nombres complexes dans le secondaire. Trois d'entre eux offrent des justifications succinctes, tandis que le quatrième avis est plus détaillé, bien qu'il ne soit pas à jour sur le programme de l'examen d'entrée pour les ingénieurs. Il aurait été judicieux de préciser dans ma question que je me concentrais uniquement sur l'enseignement des mathématiques pour scientifiques.

J'explicite ci-dessous ce que j'entends pour chaque argument justifiant l'enseignement des nombres complexes dans le secondaire et j'illustre avec les réponses des professeurs.

2.6.1 L'utilité pratique

Les nombres complexes sont largement utilisés en physique, en ingénierie et dans d'autres domaines scientifiques pour représenter des phénomènes oscillatoires, des systèmes dynamiques et des circuits électriques, entre autres (Section 1.2). En enseignant les nombres complexes, on prépare les élèves à comprendre ces applications et à résoudre des problèmes du monde réel.

Voici les réponses mettant en avant l'argument de l'utilité pratique :

« ces nombres permettent d'étudier les ondes. »
 « il est possible de les utiliser dans les séries de Fourier. »
 « Ils sont importants pour aborder certaines notions de physique. »
 « pour faciliter par exemple les cours d'électricité en physique »
 « en électronique »
 « Les profs de physique pourront également appliquer tous ces calculs à l'électricité. »
 « ils sont utiles dès que l'on veut travailler des maths ou de la physique »
 « parce qu'il y a beaucoup d'applications dans d'autres domaines que les math »
 « aborder d'autres applications des maths »
 « pour pouvoir avoir les outils mathématiques afin d'aborder la physique »
 « extra-mathématiques (en physique p.ex.) »
 « Utile pour les électriciens entre autres »

2.6.2 La transversalité

Les différentes représentations des nombres complexes mobilisent l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie de manière complémentaire et interdépendante (Section 1.1). En effet, un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + bi$ permet d'associer un nombre complexe z à un point du plan (a, b) . Les opérations sur les nombres complexes se traduisent alors par des transformations géométriques telles que des translations, des rotations et

des homothéties. Ensuite, en mobilisant les acquis de trigonométrie, les nombres complexes dans le plan peuvent être exprimés en coordonnées polaires, ce qui offre une autre perspective sur leur représentation et permet d'obtenir la forme $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Cette représentation trigonométrique offre une interprétation géométrique alternative des nombres complexes, mettant en évidence leur relation avec le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques. Ainsi, la transition entre les différentes représentations des nombres complexes illustre la richesse des liens entre l'algèbre, la trigonométrie et la géométrie, et offre aux élèves une perspective plus complète et profonde de la transversalité des mathématiques.

Voici les réponses des professeurs présentant cet argument de transversalité :

« Les nombres complexes permettent d'effectuer un lien entre les opérations algébriques et la représentation dans le plan, donc un lien entre la géométrie et les opérations algébriques. »

« Les nombres complexes permettent de modéliser les rotations »

« Cela permet de relier la géométrie plane à un calcul algébrique »

« manipulation de plusieurs concepts »

« Cela peut aussi être un bon entraînement pour passer du côté algébrique au côté géométrique : les nombres complexes peuvent traduire des situations géométriques et réciproquement le côté géométrique facilite la compréhension de propriétés algébriques »

« Un autre encodage des translations et des rotations vu la suppression des matrices »

« de mobiliser les techniques de résolutions algébriques »

« C'est l'occasion de revenir sur le sens de l'inverse, de l'opposé, des définitions des opérations de $\mathbf{R}$ qui s'étendent naturellement sur $\mathbf{C}$ »

« application intra-mathématiques »

« Cette matière fait un lien entre algèbre, trigonométrie et exponentielle »

« thème très intéressant aussi pour créer des liens entre les différentes écritures de ces nombres »

2.6.3 Le développement cognitif

Les nombres complexes offrent une opportunité précieuse pour le développement cognitif des élèves. La nature transversale des nombres complexes exige des élèves qu'ils fassent des liens entre les différentes représentations de ces nombres. Cette capacité à passer d'une représentation à une autre nécessite une pensée flexible et la capacité à conceptualiser les mêmes objets mathématiques sous des angles différents. En développant la capacité à naviguer entre ces différentes représentations et à comprendre les liens entre elles, les élèves renforcent leur pensée analytique et leur flexibilité mentale. Cette flexibilité est une compétence cognitive précieuse qui peut être appliquée dans de nombreux domaines au-delà des mathématiques, favorisant ainsi un développement global des capacités cognitives des élèves. En ce sens, l'étude des nombres complexes ne se limite pas

à une simple acquisition de connaissances mathématiques, mais elle stimule également le développement de compétences cognitives essentielles pour la résolution de problèmes dans divers contextes.

Voici les réponses des professeurs où l'argument du développement cognitif est mis en avant :

« il est intéressant d'enseigner les nombres complexes afin de travailler l'esprit mathématiques des élèves »
« Cela peut aider les élèves à faire preuve de plus d'abstraction »
« Ils ont donc un rôle important dans la construction d'une pensée mathématique avancée chez les élèves de secondaire. »
« être critique sur un raisonnement »
« de développer leur esprit critique »
« Aller plus loin dans l'abstraction »
« Approche abstractive des math »

2.6.4 Vision dynamique et évolutive des mathématiques

Les nombres complexes ont été introduits pour résoudre des équations sans solution dans les réels, élargissant ainsi le champ des mathématiques, ce qui a permis de résoudre de nombreux problèmes qui semblaient insolubles auparavant. Ainsi, l'introduction des nombres complexes a montré que les concepts mathématiques ne sont pas figés à jamais et que de nouvelles idées et méthodes peuvent être développées pour comprendre et modéliser le monde qui nous entoure. Les nombres complexes illustrent donc la nature dynamique et évolutive des mathématiques, où de nouvelles découvertes sont toujours possibles. Par ailleurs, ils ouvrent de nouvelles portes vers la recherche, stimulant l'innovation et incitant à repousser les frontières de la connaissance. Ainsi, les nombres complexes ne sont pas simplement des outils mathématiques, mais également des portes vers de nouvelles perspectives pour comprendre le monde qui nous entoure.

L'argument selon lequel les nombres complexes permettent une vision dynamique et évolutive des mathématiques est présent dans les réponses suivantes :

« Les nombres complexes éveillent la curiosité et montrent que l'envie d'aller plus loin permet de découvrir des choses qui auront un lien avec d'autres domaines. »
« Pour voir jusqu'où les raisonnements et les maths peuvent aller. »
« j'ai remarqué que c'est une question de curiosité qui revient fréquemment chez les élèves de 15-16 ans »
« ces nombres suscitent la curiosité des élèves »
« Ouverture d'esprit »
« Afin d'amener l'idée aux élèves qu'il y a quelque chose d'autre au delà de leur connaissance sur les nombres. Cela permet d'ouvrir un autre monde »

« culture mathématique pertinente »
« C'est aussi une introduction à un outil de recherche toujours très actif en math »
« les maths peuvent évoluer »
« Montrer l'évolution des maths »
« des enfants plus jeunes sont impatients d'en apprendre plus à ce sujet, ça ouvre de nouveaux horizons »

2.6.5 L'histoire

L'historique des nombres complexes offre aux élèves une opportunité de plonger dans l'évolution des mathématiques. Comprendre le contexte et l'origine de certains concepts mathématiques leur permet parfois de mieux apprécier le contenu mathématique et de saisir que ces idées ont émergé pour résoudre des problèmes concrets de l'époque. De plus, la découverte des nombres complexes étant un événement relativement récent dans l'histoire des mathématiques, elle met en lumière le fait que les mathématiques ne se limitent pas à l'époque de Pythagore, que les mathématiques ne sont pas figées, mais qu'elles évoluent continuellement grâce à la créativité et à l'ingéniosité de chercheurs. Par ailleurs, en intégrant une perspective culturelle et historique, les élèves peuvent mieux saisir les influences diverses qui ont façonné le développement du monde et plus particulièrement celui des mathématiques. Ils apprennent à reconnaître et à apprécier les contributions de différentes cultures, ce qui enrichit leur compréhension globale. En fin de compte, l'étude des nombres complexes avec un regard historique élargit la perspective des élèves sur les mathématiques, les encourageant à développer une curiosité intellectuelle.

Voici les réponses dans lesquelles l'argument historique est présent :

« l'aspect historique est intéressant pour introduire la matière »
« Parler de l'histoire des nombres, regarder les nombres d'un autre point de vue »
« l'évolution des nombres »
« L'aspect historique de l'extension de la notion de nombres en relation avec la recherche des racines des équations polynomiales, notamment du 3ème degré »
« l'aspect historique avec la triangulation pour cartographier le duché d'Oldenburg et ensuite le Schleswig-Holstein par Caspar Wessel »
« Montrer l'évolution des math »

2.6.6 La préparation académique

L'étude des nombres complexes est importante pour la préparation aux études supérieures scientifiques, en raison de leur capacité à modéliser et à résoudre une multitude de problèmes dans divers domaines scientifiques. En effet, ces nombres sont présents

dans la modélisation de phénomènes physiques tels que les oscillations, les ondes électromagnétiques, les circuits électriques et les mouvements vibratoires. Dans le domaine de l'ingénierie, les nombres complexes sont utilisés pour résoudre des problèmes en mécanique des fluides, en électromagnétisme, en théorie du signal et en contrôle des systèmes dynamiques. Les nombres complexes jouent également un rôle important en théorie des nombres, notamment dans l'étude des congruences quadratiques et des formes quadratiques. En mathématiques pures, les nombres complexes fournissent un cadre puissant pour l'analyse complexe, qui étudie les fonctions holomorphes et les intégrales complexes. En résumé, l'étude des nombres complexes offre aux étudiants une base solide pour aborder des concepts scientifiques avancés dans des domaines tels que la physique, l'ingénierie ou les mathématiques. Leur utilisation permet une modélisation de nombreux phénomènes, ce qui en fait un outil indispensable pour les futurs professionnels dans ces domaines.

Voici les réponses qui incluent l'argument de la préparation académique :

« afin que les élèves soient bien préparés pour leurs études supérieures (scientifique) »
« C'est utile pour ceux et celles qui suivront une formation scientifique »
« Chapitre très utile pour des élèves s'orientant vers des études scientifiques »
« Pré requis pour certaines études »
« L'utilisation dans le supérieur »
« à préparer aux études universitaires »
« pour certains élèves qui continueront des études scientifiques »
« vite introduit en supérieur avec moins de pédagogie (fac des sciences ou ingénieur) »

Chapitre 3

Réflexion personnelle

Dans cette section, j'exposerai mes choix pédagogiques concernant l'enseignement du chapitre sur les nombres complexes. Je détaillerai les approches que je prévois d'adopter en classe ainsi que les raisons qui motivent ces choix.

Je débiterai le chapitre des nombres soit par l'introduction par la démarche de Cardan (Section 2.4.2) soit par l'approche vectorielle (Section 2.4.4). En effet, ces deux approches offrent des avantages. La première est pertinente car elle reflète fidèlement la problématique historique qui a conduit à la découverte des nombres complexes. Quant à la seconde, elle offre une perspective géométrique et visuelle des nombres complexes, une approche souvent sous-estimée mais qui peut apporter une compréhension plus profonde.

Ensuite, j'introduirai la définition de l'ensemble des nombres complexes et celle d'un nombre complexe. Selon l'introduction choisie, je définirai un nombre complexe soit sous sa forme algébrique, soit comme un couple de coordonnées dans le plan complexe pour mettre en évidence le lien avec la géométrie.

Dans mon approche pédagogique, j'estime essentiel de présenter le plan de Gauss avant d'aborder le calcul algébrique des nombres complexes. Je suis en effet convaincue que la visualisation géométrique est une base indispensable pour comprendre les concepts mathématiques abstraits. En exposant les élèves à cette représentation visuelle dès le départ, j'espère leur offrir un cadre solide pour appréhender la structure des nombres complexes. Cette approche les prépare ainsi à assimiler plus aisément les opérations algébriques, tout en développant une intuition géométrique précieuse pour résoudre des problèmes de type « Transférer » (Section 2.3). Ensuite, dans la partie consacrée aux opérations algébriques sur les nombres complexes, je veillerai à inclure les caractéristiques spécifiques de la puissance de i .

Après avoir exposé le plan de Gauss ainsi que les opérations fondamentales sur la forme algébrique des nombres complexes, accompagnées de leur interprétation géométrique sur le plan de Gauss, j'aborderai la représentation trigonométrique. Cette approche inclura une explication graphique de la signification de l'argument d'un nombre complexe ainsi que du module. En parallèle, je présenterai également la forme exponentielle. À mes

yeux, cette dernière offre un avantage en simplifiant la manipulation des nombres complexes.

Concernant l'interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes, je commencerai par aborder l'addition, la multiplication par un scalaire, le conjugué et l'inverse, permettant aux élèves de comprendre les transformations associées sur le plan de Gauss. Ensuite, après avoir introduit la représentation trigonométrique/exponentielle, j'aborderai la multiplication de deux nombres complexes et les puissances des nombres complexes.

Avant d'aborder les exercices de type « Transférer » (Section 2.3), il est crucial d'expliquer que chaque point du plan peut être représenté dans un plan complexe, de sorte que chaque point correspond à un nombre complexe.

Mes choix pédagogiques pour l'enseignement du chapitre sur les nombres complexes visent à offrir aux élèves une approche équilibrée et complète. En débutant par l'introduction historique par la démarche de Cardan ou l'approche vectorielle, je souhaite éveiller leur intérêt ou souligner l'importance de la géométrie dans ce domaine. En exposant le plan de Gauss dès le début du chapitre, je leur fournis la possibilité de comprendre les opérations algébriques géométriquement.

Plan de cours

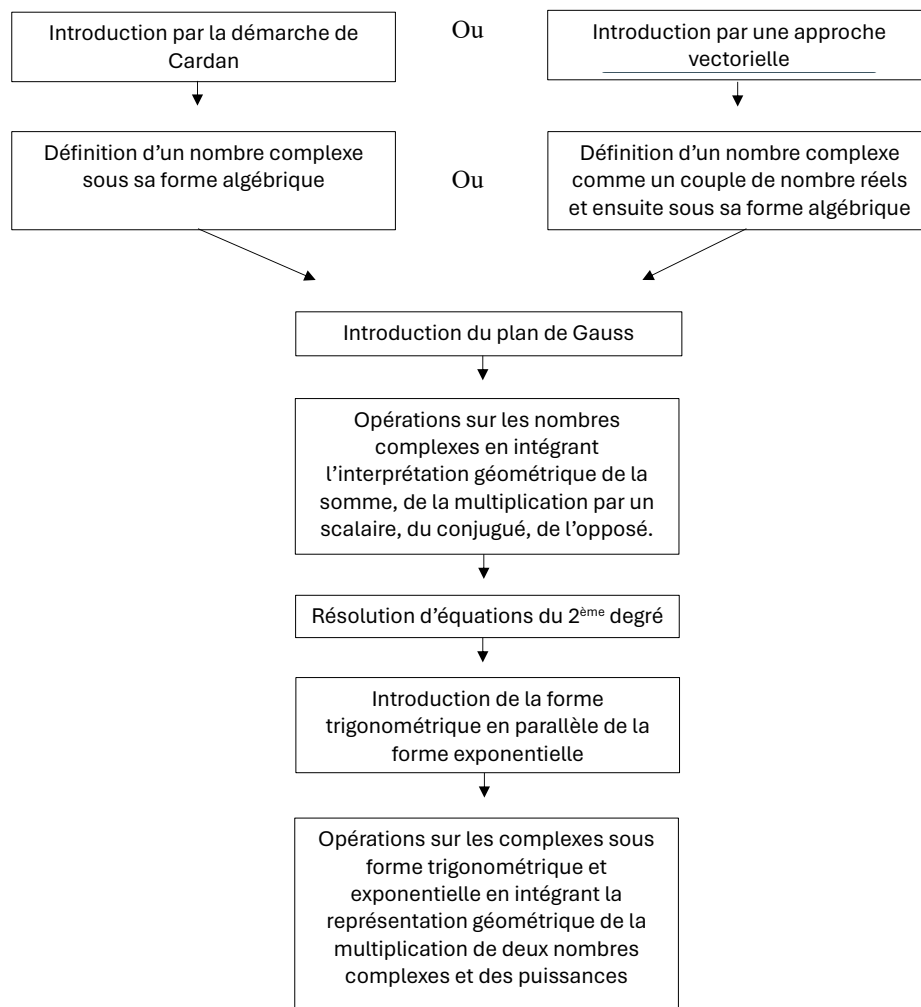


FIGURE 3.1 – Plan du cours que je prévois de donner dans mes classes

Conclusion

A travers ce travail nous avons exploré différents aspects des nombres complexes, en abordant tant leur théorie que leur enseignement au niveau secondaire. Nous avons détaillé les différentes représentations des nombres complexes, en soulignant les avantages de chacune. Nous avons vu que chaque type de représentation offre une perspective unique, en simplifiant les calculs ou en permettant une interprétation plus intuitive.

Nous avons également mis en lumière des applications concrètes des nombres complexes, illustrant leur importance dans le domaine de la physique. Ces exemples montrent que la maîtrise des nombres complexes est avantageuse pour résoudre des problèmes pratiques, tels que les équations différentielles ou les séries de Fourier.

Sur le plan pédagogique, nous avons analysé l'enseignement des nombres complexes dans les filières scientifiques. Après avoir analysé et comparé les différents programmes de l'enseignement des nombres complexes, j'ai observé l'introduction de ce chapitre dans six établissements du secondaire. Ceci m'a permis d'analyser la structure et les méthodes pédagogiques des enseignants. J'ai identifié que certains concepts, comme la représentation géométrique ou la compétence de Transfert, sont souvent négligés.

Ensuite, j'ai proposé des outils pédagogiques pour introduire l'enseignement des nombres complexes. Ces outils, basés sur une analyse des pratiques observées, visent à faciliter l'apprentissage et à susciter l'intérêt des élèves.

En somme, l'observation des réactions d'élèves et de leurs erreurs les plus fréquentes m'a montré que ce chapitre leur pose parfois de réels défis en termes d'abstraction et de motivation.

Malgré ces difficultés, l'enseignement des nombres complexes reste indispensable dans les filières scientifiques aux yeux de la plupart des professeurs de mathématiques.

En conclusion, ce travail m'a permis d'obtenir une vision globale et intégrée du chapitre des nombres complexes. Les connaissances et l'expérience que j'ai acquises me permettront d'adapter ma façon d'enseigner durant ma future carrière professionnelle. En particulier, je souhaiterai insister sur la représentation géométrique, souvent négligée, afin de permettre aux élèves d'acquérir une compréhension transversale de ces nombres.

Annexe A

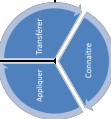
Résumé des opérations dans les différentes représentations des nombres complexes

Opérations	Représentation algébrique	Représentation géométrique	Représentation trigonométrique	Représentation exponentielle	Représentation matricielle
Égalité	$a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$	$a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$	$ z_1 = z_2 $ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$	$ z_1 = z_2 $ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$	
Somme	$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$	Correspond à effectuer une translation de vecteur $\vec{Oz_2}$ à z_1	$(\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)) + i(\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2))$	$\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2}$	$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$
Produit	$(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$		$ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $ et $\arg(z_{12}) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$	$\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$	$\begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}$
Puissance	$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p (bi)^{(n-p)}$	Correspond à effectuer n rotations de la valeur de son argument dans le plan complexe et à élever sa distance à l'origine à la puissance n	$ z_1^n = z_1 ^n$ et $\arg(z_1^n) = n \cdot \arg(z_1) + 2k\pi$	$e^{i\theta n}$	$P \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}^n P^{-1}$
Quotient	$\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$		$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$	$\frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$	$\frac{1}{a_2^2 + b_2^2} \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ b_1 a_2 - a_1 b_2 & b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}$
Conjugué	$a_1 - b_1 i$	Correspond à la symétrie par rapport à l'axe x de z_1	$ \bar{z} = z $ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$	$\rho_1 e^{-i\theta_1}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$
Opposé	$-a_1 - b_1 i$	Correspond à la symétrie centrale de centre $(0, 0)$ de z_1	$ -z = z $ et $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$	$\rho_1 e^{i(\pi + \theta_1)}$	$\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$
Inverse	$\frac{(a_1 - b_1 i)}{(a_1^2 + b_1^2)}$		$\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$	$\frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$	$\frac{1}{a_1^2 + b_1^2} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$

Annexe B

Référentiel et programmes d'enseignement

B.1 Les nombres complexes dans le référentiels de la FWB pour les 6ème GT-TT

Mathématiques pour scientifiques: 3 ^e degré de transition (6 ^e année)			Nombres complexes
65 UAA7	Unité d'acquis d'apprentissage		
Compétences à développer UTILISER LES NOMBRES COMPLEXES POUR DÉMONTRER OU OBTENIR DES RÉSULTATS			
Processus			Ressources
Appliquer - Calculer dans $\mathbb{C}$. Convertir la représentation trigonométrique d'un nombre complexe en sa représentation algébrique et réciproquement - Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$. - Rechercher les racines nièmes d'un nombre complexe et les représenter dans le plan de Gauss	Transférer Démontrer une propriété géométrique à l'aide des nombres complexes		Représentations algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe Conjugué, module et argument d'un nombre complexe Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes Plan de Gauss Formule de De Moivre
Connaître - Interpréter géométriquement les opérations dans $\mathbb{C}$. - Mettre en relation les deux représentations d'un nombre complexe - Illustrer graphiquement les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument, le conjugué d'un nombre complexe	Stratégies transversales Utiliser l'outil informatique Rédiger, argumenter, structurer, démontrer Mobiliser l'outil algébrique Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés		

B.2 Les nombres complexes : programme du Segec pour les 6ème GT-TT

Nombres complexes

COMPÉTENCE À DÉVELOPPER

UTILISER LES NOMBRES COMPLEXES POUR DÉMONTRER OU OBTENIR DES RÉSULTATS.

STRATÉGIES TRANSVERSALES

- Utiliser l'outil informatique.
- Rédiger, argumenter, structurer, démontrer.
- Mobiliser l'outil algébrique.
- Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés.

D'OÙ VIENT-ON ?

En algèbre, la notion de nombre s'enrichit et se précise tout au long de la scolarité : nombres naturels, entiers, décimaux, rationnels et réels.

En géométrie, dans le cadre du calcul vectoriel, les élèves ont appris à déterminer les composantes d'un vecteur, la somme de vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel, la norme d'un vecteur.

En trigonométrie, on introduit les formules d'addition qui seront nécessaires pour définir la forme trigonométrique de la multiplication de nombres complexes.

OÙ VA-T-ON ?

Ce chapitre mobilise les acquis de domaines différents : nombres, algèbre, géométrie et trigonométrie se croisent ; conférant ainsi à plusieurs concepts, un statut nouveau dans la construction mathématique.

RESSOURCES	DIRECTIVES ET COMMENTAIRES
Représentations algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Conjugué, module et argument d'un nombre complexe. Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Plan de Gauss. Formule de De Moivre.	Les nombres complexes et les opérations sur ceux-ci sont interprétés de manière algébrique et géométrique. On résout dans $\mathbb{C}$ les équations du type $az + b = c$; $az^2 + bz + c = 0$ et $z^n = k$ où $a, b, c, k \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On associe la somme de deux complexes à une translation, le produit d'un complexe par un réel à une homothétie, le produit d'un complexe par un complexe de module 1 à une rotation et le produit de deux complexes à la composée d'une rotation et d'une homothétie. L'approche historique de ces nombres ne peut être négligée.
PROCESSUS	
CONNAÎTRE • Interpréter géométriquement les opérations dans $\mathbb{C}$. • Mettre en relation les deux représentations d'un nombre complexe. • Illustrer graphiquement les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument, le conjugué d'un nombre complexe. APPLIQUER • Calculer dans $\mathbb{C}$. • Convertir la représentation trigonométrique d'un nombre complexe en sa représentation algébrique et réciproquement. • Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$. • Rechercher les racines nièmes d'un nombre complexe et les représenter dans le plan de Gauss. TRANSFÉRER • Démontrer une propriété géométrique à l'aide des nombres complexes.	

B.3 Les nombres complexes : programme de la WBE pour les mathématiques pour scientifiques

6SUAA7 - Nombres complexes

Compétences à développer

UTILISER LES NOMBRES COMPLEXES POUR DÉMONTRER OU OBTENIR DES RÉSULTATS

1. Objectifs et balises

1.1 Objectifs

Le but de cette UAA est d'introduire une nouvelle notion mathématique qui élargit le champ de réels : les nombres complexes. La forme algébrique d'un nombre complexe permet de résoudre des équations non résolues jusqu'alors. La forme trigonométrique d'un nombre complexe est un atout pour effectuer certaines opérations algébriques et est efficace pour définir les transformations du plan.

1.2 Balises

La technicité nécessaire à la résolution d'équations plus difficiles les unes que les autres n'est pas le but de cette UAA.

Lors de la résolution de problèmes, les calculs peuvent être effectués à l'aide du calcul symbolique d'un logiciel ou d'une calculatrice.

2. Contexte

Prérequis

3UAA5 - Outils algébriques

4UAA3 - Trigonométrie

4UAA5 - Deuxième degré

5SUAA5 - Fonctions
trigonométriques



6SUAA7 - Nombres complexes

3. Situation d'apprentissage

3.1 Cadre formel

Cette UAA est prévue pour 15 à 17 périodes de cours. Il n'est pas nécessaire de la diviser en plusieurs séquences pédagogiques. Une évaluation sommative sera envisagée en fin d'UAA.

L'évaluation formative doit prendre place tout au long de l'apprentissage. Elles doivent interroger sur les ressources et les différents processus ainsi que sur l'aptitude de l'élève à tenir un discours justifiant sa réflexion et sa démarche.

3.2 Points d'ancrage

- a) Les nombres complexes peuvent être introduits en esquisant l'histoire de la résolution des équations dans l'ensemble des naturels, puis des entiers ...On évoquera la résolution d'une équation du troisième degré par Cardan, faisant appel à la racine carrée d'un nombre négatif – quantité impossible mais manipulable.
- b) Les nombres complexes peuvent également être introduits comme codage des similitudes directes.

3.3 Stratégies pédagogiques

Pour atteindre les objectifs de cette UAA, l'enseignant habituera les élèves à :

- transformer la forme algébrique d'un nombre complexe en forme trigonométrique et vice versa ;
- adopter la forme (algébrique ou trigonométrique) qui semble la plus adéquate pour la résolution du problème posé.

Il insistera sur :

- le lien entre le signe des parties réelle et imaginaire d'un complexe et la valeur de son argument, lors du passage de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique ;

Il pourra introduire et justifier la notation exponentielle d'un nombre complexe et, par analogie avec les propriétés des exponentielles réelles, retrouver les propriétés déjà rencontrées.

4. Orientations méthodologiques

4.1 Ressources

La colonne « ressources » liste les nouveaux savoirs et parfois les savoir-faire à installer et à entraîner chez les élèves. Les ressources des années antérieures et des UAA précédentes ne sont pas rappelées ici.

Ressources	Commentaires, précisions et conseils méthodologiques
Représentations algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe Plan de Gauss	La forme trigonométrique d'un nombre complexe se déduira de la forme algébrique ou inversement. Les relations entre partie réelle, partie imaginaire, module et argument seront écrites à partir de la représentation d'un nombre complexe dans le plan de Gauss.
Conjugué, module et argument d'un nombre complexe	La propriété de symétrie des images d'un nombre complexe et de son conjugué sera illustrée.
Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et leur interprétation géométrique	Les opérations de base seront établies sous leur forme algébrique et trigonométrique. L'addition, les multiplications par un réel et par un complexe seront interprétées géométriquement. Les racines carrées d'un nombre complexe seront calculées algébriquement. La résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ fera appel à ces opérations.

Formule de « De Moivre »	La formule de Moivre sera établie (par récurrence) ; elle pourra être exploitée pour retrouver des formules de trigonométrie déjà connues (angles doubles, triples). Les racines $n^{\text{èmes}}$ (dont les racines carrées) seront calculées sous la forme trigonométrique (en faisant appel à la formule de Moivre). On fera remarquer que leurs points-images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.
--------------------------	--

4.2 Processus

Les processus définis par le référentiel sont ici précisés lorsque cela s'avère nécessaire. Ils permettent de mettre en œuvre les ressources listées plus haut et seront la base des évaluations.

Connaître	Commentaires
Illustrer graphiquement les parties réelle et imaginaire, le module, l'argument, le conjugué d'un nombre complexe	
Mettre en relation les deux représentations d'un nombre complexe	L'élève doit faire appel à la trigonométrie pour déduire module et argument d'un complexe de ses parties réelle et imaginaire, et vice versa.
Interpréter géométriquement les opérations dans $\mathbb{C}$	L'élève doit identifier la transformation géométrique correspondant à l'addition de deux nombres complexes, la multiplication d'un nombre complexe par un réel et par un nombre complexe.
Appliquer	
Calculer dans $\mathbb{C}$	L'élève doit exécuter les opérations de base et utiliser leurs propriétés pour rechercher une somme, un produit, un quotient, une puissance, des racines $n^{\text{èmes}}$, un module ou un argument de nombres complexes.
Convertir la représentation trigonométrique d'un nombre complexe en sa représentation algébrique et réciproquement	
Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$	L'élève doit résoudre une équation du premier degré, du deuxième degré... en faisant appel aux propriétés des opérations, aux racines carrées complexes...

Rechercher les racines nièmes d'un nombre complexe et les représenter dans le plan de Gauss	L'élève recherchera les racines nièmes d'un nombre complexe et en représentera les points-images dans le plan de Gauss.
Transférer	
Démontrer une propriété géométrique à l'aide des nombres complexes	L'élève doit utiliser les nombres complexes pour démontrer une propriété ou résoudre un problème de géométrie plane.

4.3 Stratégies transversales

Les stratégies transversales seront pratiquées tout au long de l'UAA.

Utiliser l'outil informatique : l'emploi de logiciels ou de calculatrices graphiques permet d'illustrer géométriquement les opérations sur les nombres complexes.

Rédiger, argumenter, structurer, démontrer : la transformation de la forme algébrique d'un nombre complexe vers sa forme trigonométrique nécessite des justifications clairement rédigées.

Mobiliser l'outil algébrique : les propriétés des nombres réels se prolongent dans l'ensemble des complexes.

Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés : les nombres complexes dans le cadre du cours de physique (courant alternatif, impédance ...).

4.4 Pondération des processus

Pour la pondération de l'évaluation sommative de cette UAA, la répartition suivante est proposée :

Processus	Connaitre	Appliquer	Transférer
Pourcentage	20 %	60 %	20 %

B.4 Les nombres complexes : programme du SeGEC pour les 6ème TQ - 4 périodes

UAA 15. Nombres complexes

COMPÉTENCE À DÉVELOPPER

UTILISER L'OUTIL « NOMBRE COMPLEXE » DANS LE CADRE D'UN COURS D'ÉLECTRICITÉ.

STRATÉGIES TRANSVERSALES

- Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés.
- Confronter les notations mathématiques aux notations de l'OBG.

D'OÙ VIENT-ON ?

Au 1^{er} degré, l'élève utilise les nombres naturels pour compter, les nombres entiers pour se repérer et les nombres rationnels pour mesurer.

Au 2^e degré, il découvre les nombres irrationnels en résolvant des problèmes de géométrie à l'aide du théorème de Pythagore.

OÙ VA-T-ON ?

Découvert au XVII^e siècle comme curiosité mathématique, le nombre complexe s'est avéré un outil incontournable pour expliquer certains phénomènes de l'électricité.

Il s'agit d'introduire les notions et les procédures utiles pour ce cours sans dépasser ce cadre.

RESSOURCES	DIRECTIVES ET COMMENTAIRES
Formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Point image d'un nombre complexe. Affixe d'un point du plan de Gauss.	En mathématique, les nombres complexes s'écrivent sous la forme algébrique en utilisant la lettre i, mais pour éviter toute confusion avec l'intensité électrique, l'utilisation de la lettre j est recommandée. La notation de la forme trigonométrique d'un nombre complexe est adaptée aux notations des cours d'électricité. Le module et l'argument principal du nombre complexe sont définis.
Somme de deux nombres complexes. Produit de deux nombres complexes. Inverse d'un nombre complexe.	Les problèmes abordés sont autant que possible issus des cours d'option des élèves. Les procédures de calcul ne doivent pas nécessairement être justifiées ; par contre, elles seront illustrées par des constructions géométriques.

PROCESSUS
CONNAÎTRE • Illustrer graphiquement les formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. APPLIQUER • Convertir un nombre complexe d'une forme à l'autre. • Effectuer un calcul en utilisant la forme la plus adéquate d'un nombre complexe. TRANSFÉRER • Utiliser la forme adéquate d'un nombre complexe pour résoudre un problème lié à l'OBG.

B.5 Les nombres complexes : programme de la WBE pour les mathématiques liées aux spécificités des options du troisième degré technique et artistique de qualification 4 périodes/semaine

MQ34 UAA15 - Nombres complexes

Compétences à développer

UTILISER L'OUTIL « NOMBRE COMPLEXE » DANS LE CADRE D'UN COURS D'ÉLECTRICITÉ

1. Objectifs et balises

1.1 Objectifs

La représentation de Fresnel, permettant d'ajouter, de soustraire...des fonctions sinusoïdales est remplacée par la notation complexe pour la réalisation de calculs. Le but de cette UAA est donc de développer le calcul tant sur la forme algébrique que sur la forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un nombre complexe afin d'appréhender les notions d'électricité et de modéliser des phénomènes ondulatoires.

1.2 Balises

Le but de cette UAA n'est pas de développer la technicité nécessaire à la résolution d'équations mais de fournir les outils indispensables au cours d'électricité.

2. Contexte

Prérequis

MQ34 UAA7 - Trigonométrie



MQ34 UAA15 - Nombres complexes

3. Situation d'apprentissage

3.1 Cadre formel

Cette UAA ne nécessite pas d'être divisée en plusieurs séquences pédagogiques. Une évaluation sommative sera envisagée en fin d'UAA.

Plusieurs évaluations formatives doivent prendre place tout au long de l'apprentissage.

3.2 Points d'ancrage

Dans l'analyse des circuits à courant continu, les élèves ont appris à faire la somme algébrique de tensions et de courants. En courant alternatif, vu que ces grandeurs varient constamment en sinusoides, faire la somme des valeurs instantanées (c'est-à-dire point par point) est une méthode laborieuse. C'est pourquoi on utilise des nombres complexes. Ceux-ci se prêtent à des opérations mathématiques qui permettent d'en combiner les caractéristiques de façon rapide directe et exacte.

3.3 Stratégies pédagogiques

Pour atteindre les objectifs de cette UAA, l'enseignant habituera les élèves à :

- transformer la forme algébrique d'un nombre complexe en forme trigonométrique et vice versa;
- vérifier le mode dans lequel la calculatrice est réglée (degré, radian, grade) et à utiliser correctement les touches des fonctions réciproques;
- appliquer les règles du calcul algébrique (distributivité, identités remarquables...) en n'oubliant pas que $i^2 = -1$;

- vérifier la concordance entre le signe des parties réelle et imaginaire de la forme algébrique d'un complexe et la valeur de l'argument de sa forme trigonométrique.

Il fera remarquer que :

- il n'y a pas de relation d'ordre au sein des nombres complexes;
- la notation du nombre imaginaire est i en mathématiques et j en électricité.

Il pourra introduire et justifier la forme exponentielle d'un nombre complexe et, par analogie avec les propriétés des exponentielles réelles, retrouver les propriétés déjà rencontrées dans la MQ34 UAA1; cette écriture étant utilisée en électronique et en électricité.

4. Orientations méthodologiques

4.1 Ressources

La colonne « Ressources » liste les nouveaux savoirs et parfois les savoir-faire à installer et à entraîner chez les élèves. Les ressources des années antérieures et des UAA précédentes ne sont pas rappelées ici.

Ressources	Commentaires, précisions et conseils méthodologiques
Formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe Point image d'un nombre complexe Affixe d'un point du plan de Gauss	La forme trigonométrique d'un nombre complexe se déduira de la forme algébrique ou inversement. Les relations entre partie réelle, partie imaginaire, module et argument seront écrites à partir de la représentation d'un nombre complexe dans le plan de Gauss. <i>Remarque</i> : on peut également introduire la forme exponentielle d'un nombre complexe.
Somme de deux nombres complexes Produit de deux nombres complexes Inverse d'un nombre complexe	Les opérations de base seront établies sous leur forme algébrique et trigonométrique. L'addition, les multiplications par un réel et par un complexe seront interprétées géométriquement.

4.2 Processus

Les processus définis par le référentiel sont ici précisés lorsque cela s'avère nécessaire. Ils permettent de mettre en œuvre les ressources listées plus haut et seront source d'inspiration pour les évaluations.

Processus	Commentaires
Connaître	
Illustrer graphiquement les formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe	L'élève doit placer un point dans le plan de Gauss connaissant son affixe ou y repérer l'argument et le module d'un nombre complexe.
Appliquer	
Convertir un nombre complexe d'une forme à l'autre	L'élève doit déterminer le quadrant auquel doit appartenir l'argument et justifier son choix.
Effectuer un calcul en utilisant la forme la plus adéquate d'un nombre complexe	L'élève doit exécuter les opérations de base comme le calcul d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une puissance de nombres complexes.
Transférer	
Utiliser la forme adéquate d'un nombre complexe pour résoudre un problème lié à l'OBG	Par exemple, pour déterminer le courant résultant de deux courants sinusoïdaux, l'élève doit transformer la forme trigonométrique des nombres complexes associés en leur forme algébrique.

4.3 Stratégies transversales

Les stratégies transversales seront pratiquées tout au long de l'UAA.

Mobiliser dans d'autres disciplines les concepts installés

Les nombres complexes sont indispensables dans les cours d'électricité et d'électronique (courant alternatif, impédance...).

Confronter les notations mathématiques aux notations de l'OBG

La notation du nombre imaginaire est i en mathématiques et j en électricité.

4.4 Pondération des processus

Pour la pondération de l'évaluation sommative de cette UAA, la répartition suivante est proposée :

Processus	Connaître	Appliquer	Transférer
Contenus			
Nombres complexes	20 %	40 %	40 %

Annexe C

Tables des matières des écoles observées

<u>Table des matières</u>	
I. Note historique	pg 3
II. Introduction	pg 5
III. Définitions	pg 5
IV. Opérations sur les nombres complexes (<i>point de vue algébrique</i>)	pg 9
1. Somme de deux nombres complexes	pg 9
2. Différence de deux nombres complexes	pg 9
3. Produit de deux nombres complexes	pg 10
4. Division de deux nombres complexes	pg 10
5. Exercices	pg 11
V. Equations du 2 ^{ème} degré	pg 14
1. Racines carrées d'un nombre négatif	pg 14
2. Racines carrées d'un nombre complexe	pg 14
3. Résolution d'équations du 2 ^{ème} degré	pg 17
A) Equations à coefficients réels et réalisant négatif	pg 17
B) Equations à coefficients complexes	pg 17
C) Conséquences	pg 18
D) Exercices	pg 19
VI. Forme trigonométrique	pg 21
1. Définitions	pg 21
2. Propriétés	pg 27
A) Egalité de deux nombres complexes	pg 27
B) Nombres complexes conjugués	pg 27
C) Produit de nombres complexes	pg 27
D) Quotient de nombres complexes	pg 27
E) Nombres complexes inverses	pg 28
F) Puissance d'un nombre complexe	pg 28
G) Formule de De Moivre	pg 29
3. Racines n ^{èmes} d'un nombre complexe	pg 30
VII. Opérations sur les nombres complexes (<i>point de vue géométrique</i>)	pg 34
1. Addition de complexes	pg 34
2. Multiplication d'un complexe par un réel	pg 35
3. Multiplication de complexes	pg 36

2

Nombres complexes – 6K

ICM Waterloo – 2023/2024 – Evrard P.

pauline, evrard

Table des matières

1. Introduction
2. Diagramme de Venn
3. Ensemble des complexes
 - 3.1 Définition
 - 3.2 Conjugué d'un nombre complexe
 - 3.3 Propriétés
4. Opérations dans les complexes
 - 4.1 Addition et multiplication
 - 4.1.1 Définition
 - 4.1.2 Propriétés
5. Équations dans les complexes
 - 5.1 Équations binômes
 - 5.2 Équations complètes
6. Représentation géométrique des complexes
7. Forme trigonométrique d'un nombre complexe
 - 7.1 Définition
 - 7.2 Opérations sur les nombres complexes
 - 7.2.1 Propriété
 - 7.2.2 Propriété
 - 7.2.3 Propriété
 - 7.2.4 Formule de Moivre
 - 7.2.5 Corollaire
 - 7.3 Racines n ième d'un nombre complexe
 - 7.3.1 Définition
 - 7.3.2 Proposition
 - 7.3.3 Remarque

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Les nombres réels	1
1.2	Les équations dans $\mathbb{R}$	3
2	Généralités sur les complexes	5
2.1	Définition	5
2.2	Egalité de deux nombres complexes	5
2.3	$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ou $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un champ	5
2.4	Immersion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$	8
2.5	Calcul dans $\mathbb{C}$	8
2.6	Représentation géométrique - Plan de GAUSS	9
3	Racines carrées d'un nombre complexe	10
3.1	Définition :	10
3.2	Recherche	10
3.3	Conclusion :	11
4	Résolution d'équations du 1^{er} et 2^e degré à inconnue et coefficients complexes	12
5	Forme trigonométrique d'un nombre complexe	14
5.1	Repérage d'un point dans le plan	14
5.2	Formules de passage	14
5.3	Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe	14
5.4	Egalité de deux nombres complexes	14
5.5	Opérations sur les nombres complexes	15
5.5.1	Addition et soustraction de deux nombres complexes	15
5.5.2	Produit de deux nombres complexes	15
5.5.3	Puissance entière non nulle d'un nombre complexe	16
5.5.4	Quotient de deux nombres complexes	17
6	Racines n^e d'un nombre complexe ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$)	18
6.1	Définition	18
6.2	Détermination des racines n^e d'un nombre complexe z	18
7	Polynômes dans $\mathbb{C}$	20
7.1	Formes générales	20
7.2	Théorème de d'Alembert Th.1	20
7.3	Théorème 2	20
7.4	Théorème 3	21
7.5	Théorème 4	21
8	Nombres complexes et transformations du plan	22
8.1	Addition de deux complexes	22
8.2	Multiplication d'un complexe par un réel	22
8.3	Multiplication d'un complexe par un complexe de module 1	23
8.4	Généralisation	23
9	Notation exponentielle d'un nombre complexe (+ 1h)	25
10	Exercices supplémentaires (+ 1h)	26

Table des matières

Chapitre 1 : Introduction

Chapitre 2 : Définitions

Chapitre 3 : Opérations sur les nombres complexes

1. Égalité
2. Nombre complexe conjugué
3. Module d'un nombre complexe
4. Addition de deux nombres complexes
5. Multiplication scalaire
6. Produit de deux nombres complexes
7. Quotient de deux nombres complexes
 - 7.1 Inverse d'un nombre complexe
 - 7.2 Quotient de deux nombres complexes

Chapitre 4 : Équations dans $\mathbb{C}$

1. Équations du premier degré dans $\mathbb{C}$
2. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$
 - 2.1 Racines carrées d'un nombre complexe
 - 2.2 Équations du second de degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$

Chapitre 5 : Représentation d'un nombre complexe

Chapitre 6 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
2. Propriétés du module
3. Égalité de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique
4. Nombres complexes conjugués
5. Nombres complexes inverses
6. Produit de deux nombres complexes
7. Quotient de deux nombres complexes
8. Formule de Moivre et puissance d'un nombre complexe
 - 8.1 Formule de Moivre
 - 8.2 Puissance n ième d'un nombre complexe
9. Racine n ième d'un nombre complexe

Chapitre 7 : Nombres complexes et transformations du plan

1. Nombres complexes et transformations du plan
2. Nombres complexes et géométrie du plan

Annexe D

Réponses au questionnaire partagé aux professeurs de mathématiques

Q2 : Est-il judicieux, selon vous, d'enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire ?

Q4 : Selon vous, pourquoi enseigner les nombres complexes dans l'enseignement

Horodateur	Quelle est votre profession actuelle ?	Q2	Dans quelles classes enseignez-vous actuellement?	Q4	Selon vous, pourquoi enseigner les nombres complexes dans l'enseignement secondaire ?
2024/02/28 3:59:12 PM	Professeur de Mathématiques	2	Secondaire inférieur	Oui	Pour voir jusqu'où les raisonnements et les maths peuvent aller. C'est pas le chapitre le plus dur et ça varie un peu
2024/02/28 3:59:21 PM	Professeur de Mathématiques	1	Secondaire supérieur	Oui	Etant prof en 4ème, j'ai remarqué que c'est une question de curiosité qui revient fréquemment chez les élèves de 15-16 ans. Ceux-ci entendent de leurs grands-frères / grandes sœurs que les racines de nombre négatives existent. Chacune de mes 4 classes de 4ème, j'ai eu la question de la part de quelqu'un. Sans cette expérience néanmoins, je ne pense pas que les imaginaires auraient été vraiment pertinents. Peut-être en renforcement quand même.
2024/02/28 4:24:58 PM	Professeur de Mathématiques	2	Secondaire inférieur	Oui	Dans l'option math fort, je pense qu'il est intéressant d'enseigner les nombres complexes afin de travailler l'esprit mathématiques des élèves. De plus, parfois très vite introduit en supérieur avec moins de pédagogie (fac des sciences ou ingénieur)
2024/02/28 4:31:35 PM	Professeur de Mathématiques	16	Secondaire supérieur	Oui	J'ai longuement hésité entre le oui et le non. Je dirais oui pour certains élèves qui continueraient des études scientifiques et les utilisent en physique. De plus, ça permettrait de travailler l'esprit mathématiques des élèves. Ça me paraît intéressant pour introduire la matière. Je dirais non pour d'autres qui ont plus de difficultés à assimiler les concepts mathématiques et que ces nombres peuvent perturber. Cela ne me choquerait pas de voir cette matière passer au programme du cours d'activité math et de faire revenir les matrices au programme du cours de math 6. Mais c'est un autre débat...
2024/02/28 4:44:40 PM	Pensionné	38	Secondaire inférieur	Oui	Ils sont importants pour aborder certaines notions de physique.
2024/02/28 8:05:07 PM	Professeur de Mathématiques	2	Secondaire inférieur	Oui	Ouverture d'esprit, première approche de ce qu'il n'est pas concret
2024/02/28 8:06:53 PM	Professeur de Mathématiques	17	Secondaire supérieur	Oui	Pour faciliter par exemple les cours d'électricité en physique
2024/02/28 8:10:45 PM	Professeur de Mathématiques	25	Secondaire inférieur	Oui	Pour leur application en géométrie et en électronique
2024/02/28 8:20:01 PM	Professeur de Mathématiques	18	Secondaire supérieur	Oui	Parce que ça permet aux élèves d'aller plus loin en apprenant qu'une équation différentielle ou un calcul différentiel. Les profs de physique pourront également appliquer tous ces calculs à l'électricité.
2024/02/28 8:39:14 PM	Professeur de Mathématiques	8	Secondaire inférieur	Oui	Car ils sont utiles pour la résolution de certains problèmes qui est impossible seulement avec l'ensemble des nombres réels. Ils sont utiles dès que l'on veut travailler des maths ou de la physique
2024/02/29 10:43:53 AM	Professeur de Mathématiques	24	Secondaire supérieur	Oui	Cela peut aider les élèves à faire preuve de plus d'abstraction, à les préparer pour des études supérieures. Ça leur permet de mieux comprendre certains concepts et idées abstraites. Ça peut aussi être un bon entraînement pour passer du côté algébrique au côté géométrique: les nombres complexes peuvent traduire des situations géométriques et réciproquement le côté géométrique facilite la compréhension de propriétés algébriques. Ils ont donc un rôle important dans la construction d'une pensée mathématique avancée chez les élèves de secondaire.
2024/02/29 11:44:32 AM	Pensionné	41	Secondaire supérieur	Oui	Extension des nombres : des naturels aux complexes. Pour ces derniers leur utilité arrivant bien après leur invention.
2024/02/29 1:54:14 PM	Professeur de Mathématiques	1	Secondaire supérieur	Oui	L'utilisation dans le supérieur et la connaissance des résolutions d'équations possibles
2024/02/29 6:24:06 PM	Professeur de Mathématiques	25	Secondaire supérieur	Oui	parce qu'il y a beaucoup d'applications dans d'autres domaines que les math
2024/03/01 2:59:47 PM U	Professeur de Mathématiques	20	Secondaire supérieur	Oui	Parler de l'histoire des nombres, regarder les nombres d'un autre point de vue, montrer comment les mathématiques ont évolué et comment on passe par des raisonnements avec les nombres complexes, être critique sur l'enseignement, aborder d'autres applications des maths (géométrie, électronique,...)

2024/03/01 5:29:45 PM U	Professeur math + accompagnant pédagogique UCLouvain	6	Secondaire supérieur	Oui	Pré requis de certaines études. On pourrait plus les aborder en petit chapitre plutôt que ce qui est fait actuellement.
2024/03/04 10:37:23 AM I	Professeur de Mathématiques	11	Secondaire supérieur	Oui	Afin d'amener l'idée aux élèves qu'il y a quelque chose d'autre au delà de leur connaissance sur les nombres. Cela permet d'ouvrir un autre monde, de développer leur esprit critique et de répondre à certaines questions dont les réponses étaient assez arbitraires jusque là (pas de racine carrée d'un nombre négatif, pas de solutions dans une équation du 2ème degré lorsque delta vaut 0,...)
2024/03/04 10:47:24 AM I	Professeur de Mathématiques	1	Secondaire supérieur	Oui	Ça permet aux étudiants d'avoir une plan grande connaissance et, pour ceux qui auront des maths plus tard, d'y avoir déjà touché
2024/03/04 3:34:40 PM U	Professeur de Mathématiques	35	Secondaire supérieur	Oui	Un autre encodage des translations et des rotations vu la suppression des matrices. Une vision de nombres dans une structure différente de celle des réels.
2024/03/04 5:23:31 PM U	Professeur de Mathématiques	5	Secondaire supérieur	Oui	Permet de travailler sur les ensembles, de mobiliser les techniques de résolutions algébriques, de compléter l'évolution des nombres depuis le primaire vers la clôture algébrique au sens de Galois. Il y a donc un sentiment d'aboutissement (théorème C est algébriquement clos).
2024/03/04 9:09:28 PM U	Professeur de Mathématiques	6	Enseignement supérieur	Oui	C'est l'occasion de revenir sur le sens de l'inverse, de l'opposé, des définitions des opérations de R qui s'étendent naturellement sur C.
2024/03/05 8:52:11 PM U	Professeur de Mathématiques	6	Secondaire supérieur	Oui	Aller plus loin dans l'abstraction (algèbre), s'intéresser à des théories fondamentales en math, culture mathématique pertinente
2024/04/02 12:06:15 PM I	Professeur de Mathématiques	42	Enseignement supérieur	Oui	pour pouvoir avoir les outils mathématiques afin d'aborder la physique
2024/04/02 4:08:17 PM U	Professeur de Mathématiques	37	Secondaire supérieur	Oui	L'aspect historique de l'extension de la notion de nombres en relation avec la recherche des racines des équations polynomiales, notamment l'équation du 3ème degré, les liens avec la géométrie, les rotations et autres transformations du plan (et de nouveau l'aspect historique avec la triangulation pour cartographier le duché d'Odenburg et ensuite le Schleswig-Holstein par Caspar Wessel). C'est aussi une introduction à un outil de recherche toujours très actif en math, comme son utilisation pour énoncer des théorèmes sur les nombres premiers.
2024/04/02 4:32:34 PM U	Professeur de Mathématiques	30	Secondaire inférieur	Oui	Culture générale, applications intra-mathématiques (en géométrie plane p.ex) et extra-mathématiques (en physique p.ex.)
2024/04/02 4:50:22 PM U	Professeur de Mathématiques	8	Secondaire inférieur	Oui	1) son utilité : il y a autant de solution dans une équation que le degré du polynôme 2) c est le seul nombre qui « n existe pas vraiment » : une fraction ou un irrationnel peut être approché par une valeur « concrète » 3) c est un beau pied de nez : la racine carrée d un nombre négatif n existe pas (dixit les profs de 3e) et là on « crée » une solution ... donc les maths peuvent évoluer
2024/04/02 5:02:09 PM U	Professeur de Mathématiques	4	Secondaire supérieur	Oui	Parce que ce sont les bases de la géométrie analytique et que le début (coordonnées des points) sont faciles à intégrer pour les élèves du secondaire. Il ne faut pas compliquer tout de suite mais c'est important de donner de bonnes bases.
2024/04/02 5:30:36 PM U	Professeur de Mathématiques	20	Secondaire supérieur	Oui	Pour donner à l'étudiant une vision de nombres où un carré peut-être négatif et ainsi repenser ses acquis
2024/04/02 5:35:41 PM U	Professeur de Mathématiques	26	Secondaire supérieur	Oui	Montrer l'évolution des maths
2024/04/02 6:16:52 PM U	Professeur de Mathématiques	39	Secondaire supérieur	Oui	Montrer autre chose que l'analyse et la géométrie Montrer que cette réflexion sur la racine carrée de -1, au départ théorique a eu des applications pratiques. Cette matière fait un lien entre algèbre, trigonométrie et exponentielle avec un niveau de difficulté abordable pour un rhétoricien.
2024/04/02 8:07:46 PM U	Professeur de Mathématiques	17	Secondaire supérieur	Oui	Cela permet aux élèves de découvrir un autre ensemble de nombres, d'étendre les propriétés des réels, thème très intéressant aussi pour créer des liens entre les différentes écritures de ces nombres. Chapitre très utile pour des élèves s'orientant vers des études scientifiques (math 6-8dnc)
2024/04/02 9:30:59 PM U	Professeur de Mathématiques	34	Secondaire supérieur	Oui	Utile pour les électriciens entre autre
2024/04/02 11:19:32 PM I	Professeur de Mathématiques	13	Secondaire supérieur	Oui	C'est utile pour ceux et celles qui suivront une formation scientifique régulièrement, des enfants plus jeunes sont impatientes d'en apprendre plus à ce sujet.
2024/04/03 1:16:42 PM U	Professeur de Mathématiques	14	Secondaire supérieur	Oui	Ça ouvre de nouveaux horizons. Approche abstractive des math

2024/02/28 10:02:13 PM	Professeur de Mathématiques	23	Secondaire supérieur	Non	Peu d'utilisation
2024/02/29 8:57:26 AM	Professeur de Mathématiques	9	Secondaire supérieur	Non	Parce que c'est trop abstrait et pour beaucoup, ne serait ce que des variables " $x_1, \dots, x_n$ ". C'est déjà très abstrait
2024/03/01 11:50:28 AM	Professeur de Mathématiques	26	Secondaire supérieur	Non	Tout dépend de quelle option on parle, si c'est pour l'enseignement des mathématiques 4h/sem, enseigner les complexes serait un luxe alors que des choses basiques comme la manipulation des fractions pose encore problème en 6ème. Pour des math 6 ou 8, cela pourrait être intéressant... encore que. Je précise qu'avant de donner cours dans l'ENS secondaire, j'ai donné cours durant 17 ans à l'ECAM, école d'ingénieurs industriels. Donc je peux parler pour les ingénieurs. Si on prend les ingénieurs civils, l'accès aux études est conditionné à la réussite d'un examen d'entrée et, sauf erreur de ma part, à ma connaissance, les nombres complexes ne sont pas une entrave à la réussite de cet examen d'entrée. Il faut maîtriser les dérivées, intégrales, trigonométrie, géométrie analytique. Si on prend les ingénieurs industriels, les complexes sont utilisés en électricité pour le calcul vectoriel et la modélisation des équations courant/tension. Et dans ce cadre-là, le calcul des nombres complexes se résume à un calcul vectoriel et des équations du genre courant = 3+2j. Une fois que l'étudiant a compris qu'on additionnait les termes en j ensemble et les autres ensemble, c'est assez facile. L'enseignement secondaire doit apprendre aux élèves à acquérir des méthodes de travail. Former le contenant plutôt que le contenu. Dans le cadre de mon enseignement chez les ingénieurs industriels, même les élèves qui n'avaient jamais entendu parler des nombres complexes n'étaient pas désavantagés.
2024/04/02 5:10:42 PM U	Professeur de Mathématiques	4	Secondaire inférieur	Non	Éventuellement en activité mathématiques mais en cours de mathématiques déjà difficile de finir le programme

Bibliographie

- [1] A. Adam and F. Lousberg, *Espace math 5e-6e : coffre à outils, activités-exercices : 6 périodes par semaine*, De Boeck, 2004. ↑50
- [2] M. Annoye, J.-L. Gilon, A. V. Eerdenbrugghe, and J. Willems, *Cqfd maths 6e : Manuel : 6e périodes - semaine*, De Boeck, 2014. ↑50, 52
- [3] ———, *Cqfd maths 6e : Manuel : 6e périodes - semaine*, De Boeck, 2018. ↑46, 47, 48
- [4] V Benjamin, *Histoire de la numération égyptienne*, 2020. <https://www.bijoux-egyptiens.fr/blogs/infos/histoire-de-la-numeration-egyptienne> Consulté le 21/02/2024. ↑35
- [5] A Berté et al., *L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques*, Petit x **93** (2013). ↑64
- [6] V. Brun, *Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications (1959), 19–24. ↑57
- [7] R. Carles, *Nombres : entre rationnel et irrationnel, réel et imaginaire*. <https://carles.perso.math.cnrs.fr/Cours/nombres.pdf> Consulté le 21/02/2024. ↑35
- [8] R. Charnay and M. Mante, *De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes*, Grand N **48** (1990). ↑63
- [9] J.-P. P. Cléro, *Images, imaginaires, imaginations. une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes.*, Ellipses, 1998. ↑12
- [10] Enseignement.be, *L'organisation générale de l'enseignement*. <http://www.enseignement.be/index.php?page=25568> Consulté le 23/03/2024. ↑39
- [11] Evulpo, *Nombres complexes - partie réelle, imaginaire et conjugué*. <https://evulpo.com/fr/ch/dashboard/lesson/r-maths-m-06nc-01-intro-01-introduction> Consulté le 29/04/2024. ↑33
- [12] I. Ghedamsi and R. Tanazefi, *Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de secondaire*, Petit x (2015). ↑67
- [13] Ministère de la communauté française, *Les nombres complexes*, Conquérir les mathématiques. ↑51
- [14] Mymaxicours, *Analyse spectrale*. <https://www.maxicours.com/se/cours/analyse-spectrale/> Consulté le 23/04/2024. ↑30, 31
- [15] G. Papy, *Mathématique moderne 6*, Didier, 1967. ↑44
- [16] H. Rosseel and M. Schneider-Gilot, *Ces nombres que l'on dit "imaginaires"*, Petit x **63** (2003). ↑66
- [17] ———, *Les nombres complexes comme modèles algébriques de similitudes directes : avec ou sans matrices ?*, Losanges **23** (2013). ↑23
- [18] E. M Smith, J. P Zwolak, and C. A Manogue, *Student difficulties with complex numbers*, Reference Frames **22** (2015), no. 23, 24. ↑67
- [19] G. Van Hout, *Et que le nombre soit !...*, De Boeck Supérieur, 1994. ↑33
- [20] A. Warin, *Vecteurs*, 1999. https://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy_ch03/co/apprendre_08_02.html Consulté le 23/03/2024. ↑42
- [21] Wikipédia, *Histoire des nombres complexes*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_nombres_complexes Consulté le 29/04/2024. ↑36
- [22] éducol, *L'oreille humaine et la perception des sons*. <https://eduscol.education.fr/document/25441/download> Consulté le 27/05/2024. ↑30

