

Faculté des sciences

Modélisation actuarielle d'une police d'assurance IARD avec participation bénéficiaire

Auteur: **Sittah TRAORÉ**

Promoteur: **Michel DENUIT**

Lectrice: **Cindy COURTOIS**

Année académique 2023–2024

Master [120] en sciences actuarielles, à finalité spécialisée

Résumé

L'assurance pair-à-pair (P2P) permet à un groupe de mutualiser les risques et de réduire les charges financières imprévues, tout en se distinguant des assurances traditionnelles par sa gestion collaborative facilitée par les technologies numériques et la blockchain. Cette nouvelle forme d'assurance présente plusieurs avantages, notamment la transparence vis-à-vis des participants et l'adaptabilité aux différents besoins de ceux-ci. Ce modèle est mis en avant par des entreprises telles que Luko et Lemonade qui utilisent des technologies modernes et mettent l'accent sur les mécanismes de responsabilisation. Ce travail a pour but la modélisation d'une police d'assurance IARD incluant une participation aux bénéfices pour les assurés sur la base des exemples de Luko et Lemonade. Cette proposition a pour objectif d'offrir une alternative plus transparente, adaptable et socialement responsable aux modèles traditionnels tout en alignant davantage les intérêts des assureurs et des assurés. Le modèle actuariel de la police participative permettra de partager les coûts et les pertes entre l'assureur et les assurés selon la règle de partage de risque "Conditional Mean Risk Sharing". Dans ce modèle, les risques sont mutualisés jusqu'à un certain seuil, au-delà duquel l'assureur intervient. Il assure également une répartition équitable des pertes et à la fin de la période de couverture, une participation bénéficiaire peut être redistribuée aux assurés en cas de sinistralité favorable. Ce modèle vise à offrir une couverture optimale et équitable en combinant la mutualisation des risques et le transfert de risque entre les assurés et la compagnie d'assurance.

Abstract

Peer-to-peer (P2P) insurance enables a group to pool risks and reduce unforeseen financial costs, while distinguishing itself from traditional insurance by its collaborative management facilitated by digital technologies and blockchain. This new form of insurance offers a number of advantages, including transparency to participants and adaptability to their different needs. This model is being promoted by companies such as Luko and Lemonade, which use modern technologies and focus on accountability mechanisms. The aim of this work is to model a P&C insurance policy including profit sharing for policyholders based on the examples of Luko and Lemonade. The aim of this model is to offer a more transparent, adaptable and socially responsible alternative to traditional models, while better aligning the interests of insurers and policyholders. The actuarial model of the profit sharing policy will enable costs and losses to be shared between the insurer and the policyholders according to the ‘Conditional Mean Risk Sharing’ rule. In this model, risks are mutualised up to a certain threshold, above which the insurer intervenes. It also ensures a fair distribution of losses, and at the end of the cover period, a profit share can be redistributed to policyholders in the event of a favourable loss experience. This model aims to offer optimum and fair cover by combining risk pooling and risk transfer between policyholders and the insurance company.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers M. DENUIT, pour son encadrement et ses précieux conseils tout au long de la rédaction de ce mémoire. Sa patience et sa disponibilité ont été essentielles pour mener à bien ce projet.

Mes sincères remerciements vont également au corps enseignant et au personnel de la LSBA pour avoir mis à ma disposition les ressources nécessaires à la réalisation de cette recherche.

Enfin, je suis reconnaissant envers ma famille et mes amis pour leur soutien indéfectible et leur encouragement tout au long de ce parcours académique.

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide et le soutien de chacun d'entre vous. Merci du fond du cœur.

Table des figures

3.1	Distribution du nombre de sinistres N_j pour certaines classes	34
3.2	Distribution des sévérités exactes et discrétisées $C_{j,k}$ pour certaines classes	34
3.3	Distribution de $\bar{C}_{j,k}$, $Y_{i,j}$ et $X_{i,j}$ pour un assuré de la classe 1	36
3.4	Distribution de S_i des groupes étudiés	37
3.5	Masse de probabilité et fonction de répartition de S	38
3.6	Contributions des trois groupes avec un nombre de 10 assurés par classe de risque	39
3.7	Contribution calculée avec la CMRS et la règle de régression linéaire dans le cas de franchise individuelle	40
3.8	Contribution calculée avec la CMRS et la règle de régression linéaire dans le cas de franchise globale	40
3.9	Évolution des contributions avec un nombre de participants dans le cas de franchise globale	41
3.10	Évolution des contributions avec un nombre de participants dans le cas de franchise individuelle	42
3.11	Évolution des participations bénéficiaires en fonction du nombre de parti- cipants au pool	44
3.12	Évolution des participations bénéficiaires en fonction de la rétention annuelle	45
3.13	Évolution des participations bénéficiaires en fonction de la taille du groupe 2	46

Liste des tableaux

3.2.1 Paramètres du portefeuille	30
3.2.2 Composition de groupes dans le portefeuille	31
3.4.1 Contributions des groupes étudiés aux différentes tranches du coût total . .	43
3.4.2 Contributions individuelles des membres aux différentes tranches du coût total	43

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Introduction	1
1 Modèle de l'assurance P2P	3
1.1 Introduction	3
1.2 Les types d'assurance P2P	4
1.2.1 Modèle auto-gouverné	4
1.2.2 Modèle de distribution	5
1.2.3 Modèle assureur	5
1.3 Le modèle de Luko et Lemonade	6
1.3.1 Les frais de gestion fixes	6
1.3.2 La franchise	7
1.3.3 La gestion des sinistres	7
1.3.4 Le Give-back	7
1.4 Développement d'une police participative	8
1.4.1 La définition du groupe	9
1.4.2 La franchise	9
1.4.3 La rétention annuelle	9
1.4.4 La participation bénéficiaire / Cash back	10
1.5 Conclusion	10
2 Modélisation actuarielle de la police participative	11
2.1 Introduction	11
2.2 Conditional Mean Risk sharing	12
2.2.1 Règles de partage de risque	12
2.2.2 Propriétés de la Conditional Mean Risk Sharing	13
2.2.3 Approximation de la conditional mean risk sharing	16
2.3 Police participative	16
2.3.1 Décomposition du risque	16
2.3.2 Couverture des différentes tranches du coût total	17

2.3.3	Principe de tarification du coût du capital	18
2.3.4	Détermination de la rétention	21
2.3.5	La participation bénéficiaire du groupe	22
2.4	Le risque au sein du groupe	22
2.5	Conclusion	26
3	Illustration numérique	28
3.1	Introduction	28
3.2	Paramètres et hypothèses	28
3.2.1	Les paramètres du portefeuille	28
3.2.2	Hypothèses	30
3.3	Distribution des coûts	32
3.3.1	Distribution des $Y_{i,j}$	32
3.3.2	Discrétisation des sévérités $C_{j,k}$	33
3.3.3	Distribution des $X_{i,j}$	35
3.3.4	Distribution des S_i	36
3.3.5	Distribution de S et $S - S_i$	37
3.4	Calcul des contributions	39
3.4.1	Implémentation de la CMRS	39
3.4.2	Approximation par la règle de régression linéaire	39
3.4.2.1	Influence de la taille du portefeuille	41
3.4.3	Calcul des contributions par couche	42
3.4.3.1	Décomposition de la contribution du groupe	42
3.4.3.2	Contributions individuelles	43
3.5	Étude de la sensibilité des participations bénéficiaires	43
3.5.1	Influence du nombre d'assurés dans le portefeuille	44
3.5.2	Influence de la rétention annuelle	44
3.5.3	Influence de la taille du groupe	45
3.6	Conclusion	46
	Conclusion générale	47
	Bibliographie	49
A	Code R	i
A.1	Distribution des Coûts	i
A.1.1	Chargement des packages	i
A.1.2	Table des paramètres des lois de probabilités	i
A.1.3	Discrétisation des sévérités	ii
A.1.4	Représentation de la distribution des fréquences et la fonction de répartition des sévérités de quelques classes de risques	iv
A.1.5	Distribution de $\bar{C}_{j,k}$, Y_{ij} et X_{ij}	iv
A.1.6	Représentation des distributions de $\bar{C}_{j,k}$, Y_{ij} et X_{ij}	vi
A.1.7	Distribution de S_i	vi
A.1.8	Représentation de la distribution de S_i	viii

A.1.9	Détermination des paramètres de la loi de S et $S - S_i$	ix
A.1.10	Distribution de S et représentation de la distribution	x
A.1.11	Distribution de $S - S_i$	xii
A.2	Calcul des contributions	xii
A.2.1	Implémentation de la CMRS	xii
A.2.2	Approximation de la CMRS par la règle de régression linéaire . . .	xiii
A.2.3	Calcul de contributions avec la CMRS	xiii
A.2.4	Comparaison des résultats entre le CMRS et la règle de régression linéaire	xiv
A.2.5	Test du nombre d'assurés sur la CMRS	xvi
A.2.5.1	Calcul des distributions de S et $S - S_i$ en fonction du nombre d'assurés	xvi
A.2.5.2	Évaluation de la loi de probabilité des contributions cal- culées avec la CMRS	xvii
A.2.5.3	Représentation de la distribution des contributions calcu- lées avec la CMRS	xviii
A.2.6	Calcul des contributions des groupes	xx
A.2.7	Calcul des contributions individuelles	xxi
A.2.7.1	Détermination de $S - X_{i,j}$	xxii
A.2.7.2	Calcul de la contribution individuelle	xxiii
A.3	Impact sur les participations bénéficiaires	xxiv
A.3.1	Impact du nombre d'assurés sur les participations bénéficiaires . .	xxiv
A.3.2	Impact de la rétention sur les participations bénéficiaires	xxvii
A.3.3	Impact de la taille du groupe sur les participations bénéficiaires . .	xxix

Introduction

Le paysage assurantiel est en pleine mutation, marqué par l'émergence de l'assurance collaborative. Cette dernière représente un tournant significatif, illustrant la volonté de partager les risques et les responsabilités entre les parties prenantes. Ce nouveau modèle est alimenté par l'avènement des technologies de l'information, facilitant une connexion directe entre les individus et favorisant une plus grande transparence ainsi qu'une coopération accrue dans les activités d'assurance.

Dans ce contexte dynamique, où les modèles d'assurance traditionnels sont remis en question et où l'attrait de l'assurance classique est altéré, principalement en raison de la démutualisation progressive du secteur, il devient impératif d'explorer de nouvelles approches pour répondre aux besoins changeants des consommateurs. Cette démutualisation rompt avec le mécanisme ancestral d'entraide, où les contributions de nombreux individus compensaient les pertes de quelques-uns. Face à cette évolution, l'émergence de l'assurance collaborative offre une nouvelle perspective en réintroduisant le concept de mutualité, mais sous une forme moderne et numérique, éliminant l'intermédiation caractéristique de l'assurance traditionnelle.

Le coût élevé des primes dans l'assurance traditionnelle, attribué aux exigences de solvabilité réglementaires, aux marges bénéficiaires et aux frais associés, crée des barrières pour certaines personnes à haut risque, qui ne parviennent pas à trouver une couverture adaptée à leurs besoins. Cela soulève une question à la fois financière et sociale, mettant en avant le besoin d'une assurance plus inclusive. La tarification opaque et le mécanisme d'indemnisation peu clair contribuent à un climat de méfiance envers l'assurance traditionnelle. En contraste, l'assurance collaborative met en avant la clarté de ses règles de coopération pour regagner la confiance des consommateurs, rétablissant ainsi le principe fondamental de mutualité à l'origine de l'assurance.

Reconnaissant la nécessité de réinventer ce système pour replacer les assurés au cœur des activités d'assurance, une proposition de modélisation d'une nouvelle offre d'assurance hybride émerge comme une alternative, combinant habilement les principes de mutualisation et ceux du transfert de risque. Ce modèle d'assurance vise à rétablir le principe de mutualisation des risques au sein de l'industrie de l'assurance, qui repose actuellement principalement sur le transfert du risque des individus vers les compagnies d'assurance. Toutefois, la mise en place d'un tel modèle soulève des questions actuarielles complexes et nécessite le développement d'un modèle actuariel adapté à cette alternative ainsi que la

définition des mécanismes pouvant être utilisés pour estimer de manière fiable les aspects économiques de ce système.

Face à ces défis, l'objectif de ce texte est de fournir un modèle mathématique rigoureux afin d'évaluer les contributions des assurés dans ce nouveau système. Pour ce faire, plusieurs concepts seront abordés tout au long de ce mémoire. Dans un premier chapitre, une présentation des modèles d'assurances collaboratives déjà existants sera effectuée, suivie d'une analyse de la police participative basée sur les modèles de deux assurances collaboratives, Luko et Lemonade. Dans le second chapitre, la méthode permettant de déterminer les contributions des assurés dans un tel système ainsi que les règles de partage des risques qui seront la base de cette méthode seront examinées. Enfin, le dernier chapitre sera consacré à une illustration numérique de la méthode présentée dans ce texte.

Chapitre 1

Modèle de l'assurance P2P

1.1 Introduction

L'assurance pair-à-pair, ou P2P (Peer-to-Peer en anglais), est un modèle d'assurance où un groupe de personnes s'associent pour partager leurs risques, afin d'alléger le fardeau financier en cas d'événements imprévus et dommageables. Contrairement aux assurances traditionnelles, où une compagnie d'assurance centralisée prend en charge les risques, l'assurance P2P repose sur la mutualisation des risques entre les membres du groupe, un principe qui remonte à des centaines d'années.

Le modèle contemporain d'assurance P2P, tel que connu aujourd'hui, a émergé principalement au début des années 2010 avec l'avènement des technologies numériques et des plateformes en ligne. Des entreprises et des startups ont commencé à expérimenter ce concept, cherchant à exploiter les capacités de connectivité offertes par Internet pour créer des réseaux d'individus partageant des risques. L'évolution continue des technologies numériques, telles que la blockchain, a également ouvert de nouvelles perspectives pour l'assurance P2P. La blockchain permet une gestion sécurisée et transparente des transactions et des contrats, offrant ainsi des possibilités accrues en termes de sécurité et de confiance pour les membres d'une communauté d'assurance P2P.

L'assurance P2P repose souvent sur la transparence et l'autonomie des membres. Dans ce modèle, les individus ou les communautés se regroupent via une plateforme en ligne dédiée, où ils contribuent financièrement à un fonds commun. L'argent collecté est utilisé pour couvrir les sinistres et les frais administratifs, selon les règles préétablies par le groupe.

Ce modèle présente plusieurs avantages potentiels :

- La transparence : les membres ont souvent un accès direct aux informations sur les fonds et les décisions prises par le groupe.
- La réduction des coûts : en éliminant les intermédiaires et en mutualisant les risques, cela peut potentiellement réduire les coûts pour les participants.

- La responsabilisation : les membres ont un rôle actif dans la gestion de leur assurance, ce qui peut favoriser une plus grande responsabilisation et implication.
- L'adaptabilité : les règles et les politiques peuvent être ajustées plus facilement pour répondre aux besoins changeants du groupe.

Cependant, ce modèle présente également des défis :

- La stabilité financière : la capacité du fonds à couvrir tous les sinistres peut être mise à l'épreuve en cas de multiples réclamations simultanées ou de sinistres majeurs.
- La confiance et la participation : la confiance et l'engagement des membres sont essentiels pour assurer le bon fonctionnement du système. Si la participation est faible, cela peut compromettre la viabilité de ce système.
- La complexité opérationnelle : la gestion collective peut parfois être plus complexe que les modèles traditionnels d'assurance.

L'assurance P2P est encore émergente et peut varier considérablement en fonction des plateformes, des réglementations locales et de la façon dont ces modèles parviendront à gagner la confiance des consommateurs. Avant d'adopter un tel modèle, il est crucial de comprendre en détail les règles, les risques et les avantages spécifiques à chaque plateforme ou groupe P2P.

Depuis son avènement, ce système a évolué de telle sorte à intégrer dans le processus de gestion des risques des acteurs plus traditionnels de l'industrie de l'assurance tels que les courtiers, les assureurs et les ré-assureurs. Ainsi, il est possible de distinguer plusieurs types d'assurance P2P selon les acteurs qui y sont inclus. Selon l'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (EIOPA), il existe trois grands modèles d'assurance P2P :

- le modèle auto-gouverné
- Le modèle de distribution
- le modèle assureur

1.2 Les types d'assurance P2P

1.2.1 Modèle auto-gouverné

Le modèle auto-gouverné dans le domaine de l'assurance collaborative repose principalement sur la mutualisation des risques, l'auto-organisation et l'auto-administration des participants, sans recourir à des compagnies d'assurance existantes ou à des courtiers.

Ce modèle, souvent opéré via des plateformes en ligne, utilise les avancées technologiques pour appliquer des mécanismes traditionnels de l'assurance tout en évitant les conflits d'intérêts et en réduisant les risques moraux et les fraudes grâce à un fort sentiment de communauté entre les participants. Contrairement aux assureurs ou aux intermédiaires, le modèle auto-gouverné n'a pas de personnalité juridique distincte et organise uniquement des accords d'indemnisation entre les participants.

Dans ce système, les membres paient généralement leur contribution en fonction des pertes qui ont eu lieu au cours de la période de couverture selon des règles transparentes. Cependant, la capacité des groupes reste limitée pour traiter des sommes assurées élevées.

1.2.2 Modèle de distribution

Dans le modèle de distribution d'assurance P2P, l'organisateur agit en tant qu'intermédiaire, achetant une protection pour les participants dont la responsabilité se limite à une franchise partagée. Ce système flexible remplace les contributions aléatoires par des paiements fixes préalables, avec un mécanisme de remboursement et une protection auprès d'une compagnie d'assurance ou de réassurance.

Contrairement au modèle auto-gouverné sans garantie, le modèle de distribution combine partage de risques et transfert de risques entre les membres et la (ré)assurance. Bien que moins attrayant en raison des coûts supplémentaires, tels que des commissions et des primes excédentaires, le modèle de courtier offre une probabilité plus élevée d'indemnisation en cas de sinistre grâce à l'expertise de règlement de sinistres des compagnies partenaires.

1.2.3 Modèle assureur

Le modèle auto-gouverné implique que les participants mutualisent leurs risques uniquement entre eux. Cependant, ce modèle a des limitations pour les couvertures impliquant des sommes importantes ou des processus de règlement de sinistres complexes. Le modèle de distribution résout ces problèmes en collaborant avec une compagnie d'assurance traditionnelle, permettant aux participants d'accéder à des montants plus élevés de rétention grâce à la mutualisation des risques. Ce dernier modèle se résume alors à une franchise partagée entre la communauté et l'assureur.

Le modèle assureur lui intègre cette approche dans une police d'assurance régulière avec participation aux excédents. Cependant, cette activité est confrontée à une réglementation stricte et à des procédures prolongées typiques de l'assurance traditionnelle, notamment des litiges avec les clients, des évaluations complexes des sinistres et des désaccords concernant les refus de couverture. Ces procédures peuvent entraîner des retards dans le règlement des réclamations et des implications financières importantes pour les assurés et les compagnies d'assurance. Malgré cela, les compagnies d'assurance tradi-

tionnelles conservent un avantage dans l'offre P2P. La police participative du modèle de l'assureur combine assurance et principe d'entraide, partageant les risques entre les assurés et bénéficiant de l'expertise de l'assureur. Il présente l'avantage de s'inscrire dans la réglementation existante.

1.3 Le modèle de Luko et Lemonade

Luko et Lemonade sont des "insurtechs" qui ont révolutionné le secteur de l'assurance grâce à des approches novatrices et technologiques avancées. Les deux sociétés mettent l'accent sur la transparence et l'engagement auprès des clients. Elles fournissent souvent des informations détaillées sur la manière dont les primes sont utilisées, comment les décisions sont prises et encouragent la participation des clients dans le processus d'assurance. Tant Luko que Lemonade tirent parti des technologies modernes pour simplifier et améliorer l'expérience d'assurance. Ils utilisent l'intelligence artificielle, les chatbots, et d'autres outils pour automatiser les processus de souscription, de gestion des sinistres et de service client.

Luko est un intermédiaire d'assurance, fondé en 2018 en France avec l'objectif de rendre plus transparente l'opération d'assurance et de dépasser le conflit d'intérêt qui existe entre les compagnies d'assurance et les assurés. Il se distingue par son approche innovante de l'assurance habitation. Lemonade, quant à elle, est une entreprise d'assurance fondée en 2015 aux États-Unis. Comme Luko, la compagnie met également l'accent sur la transparence et son offre habitation innovante. Les clients peuvent voir comment leurs primes sont utilisées et quelle part est allouée aux sinistres.

Les offres d'assurance de ces deux entités sont assez similaires en ce sens qu'elles mettent en avant un même système d'allocation des primes reçues de leurs assurés.

1.3.1 Les frais de gestion fixes

Luko et Lemonade s'efforcent de rendre la répartition des primes aussi transparente que possible pour les assurés et fournissent des informations détaillées sur l'utilisation des primes, notamment en ce qui concerne les frais d'administration, les réclamations, les coûts opérationnels. . .

Dans le modèle de ces deux structures, une partie des primes est prélevée pour la rémunération et le financement des frais opérationnels de l'entreprise, y compris les coûts liés à la gestion des sinistres, les salaires des employés, les dépenses administratives, les investissements dans la technologie ainsi que les différents frais intervenant dans son activité. Cette portion de la prime qui est prélevée est souvent un pourcentage fixe de la prime.

Pour ses frais de gestion et depuis sa création, Luko prélève un pourcentage de la prime à hauteur de **30 %**. Chez Lemonade, ce pourcentage s'élève maintenant à **25 %** de la prime (autrefois 20 %).

1.3.2 La franchise

La franchise représente un élément essentiel dans les contrats proposés par Luko et Lemonade qui offrent une variété de choix, comprenant la franchise relative, la franchise fixe, la franchise proportionnelle et la franchise absolue. Le choix entre ces différentes options dépend du type de contrat et des garanties choisies par l'assuré. Les montants de franchise sont laissés à la discrétion des assurés, à l'exception des garanties telles que les catastrophes naturelles et les mouvements de terrain, pour lesquelles les montants de franchise sont prédéfinis.

Cependant, il est important de noter que les assurés ont la possibilité de souscrire un contrat sans franchise. Dans ce cas, les primes associées à de tels contrats peuvent être considérablement plus élevées.

1.3.3 La gestion des sinistres

Après la déduction des frais de gestion, une portion supplémentaire de la prime est allouée à l'utilisation de la réassurance chez Lemonade et à la souscription de contrats d'assurance BtoB chez Luko. Cette démarche vise à protéger les assurés contre d'éventuelles pertes considérables qui pourraient dépasser leurs capacités.

La partie restante des primes est consacrée à la constitution d'un pot commun destiné à couvrir les sinistres survenant au cours de la période de couverture. Ces pots communs sont structurés en groupes de pairs, créés par la compagnie. Ainsi, chaque groupe de pairs dispose d'un fonds commun alimenté par les primes, à partir duquel toutes les réclamations des membres du groupe seront soustraites. Chez Luko et Lemonade, la formation de ces groupes se fait en fonction des causes caritatives auxquelles les assurés choisissent d'adhérer, renforçant ainsi l'aspect communautaire de leur engagement.

1.3.4 Le Give-back

Le "Give-back" représente la politique distinctive de Luko et Lemonade. Cette approche vise à récompenser les comportements exemplaires des assurés tout en encourageant la prudence et la responsabilité. Les groupes d'assurés qui ont des pertes assez faibles par rapport aux primes dans leur pot commun ont la possibilité de recevoir une partie de leur prime et de la reverser à l'association de leur choix. Concrètement, ce "Give-back" est déterminé par groupes de pairs.

Cette approche offre aux clients l'opportunité de contribuer indirectement à des initiatives sociales ou environnementales, renforçant ainsi l'aspect solidaire de l'assurance. Elle incite les assurés à jouer un rôle actif dans la promotion de comportements responsables et à participer à des actions philanthropiques, créant ainsi une dynamique positive au sein de la communauté assurée.

Depuis leur création, ces deux entités au business model pratiquement identique connaissent

un parcours différent. Lemonade s'est étendue en Europe (Allemagne, Pays bas, France et Royaume-Uni) avec des offres d'assurances pour l'habitation, l'automobile, les animaux. . .

Luko, quant à elle, a récemment connu des difficultés financières conduisant à son placement en redressement judiciaire. L'échec de la levée de fonds fin 2022, suite à l'acquisition d'Unkle, a entraîné une obligation de paiement de 11 millions d'euros. Malgré une tentative de rachat par le groupe britannique Admiral, des problèmes financiers majeurs ont été révélés, notamment un redressement fiscal potentiel et des incohérences dans la comptabilité des primes d'assurance. Admiral a finalement renoncé au rachat, et c'est Allianz qui a acquis Luko pour environ 4,3 millions d'euros. Cette acquisition est perçue comme une bonne nouvelle pour les assurés de Luko, car elle éloigne les risques de faillite.

1.4 Développement d'une police participative

L'idée ici est de partir du fonctionnement du modèle de Luko et de Lemonade afin de suggérer une modélisation pour une police d'assurance qui proposerait une option de participation bénéficiaire aux assurés. Cette modélisation impliquera des calculs actuariels pour déterminer la prime nécessaire afin de répondre aux exigences des différents aspects d'un tel modèle de gestion de risque. Certaines caractéristiques des modèles de Luko et Lemonade seront prises en compte dans ce modèle.

La police d'assurance avec participation bénéficiaire se basera sur le mécanisme de gestion des assurances P2P, qui pour fonctionner a besoin de mettre en commun les risques de différents individus qui formeront un groupe autour de cette police. La police d'assurance doit alors s'articuler autour d'un groupe ou d'une communauté qui est définie ici comme un ensemble d'individus qui souhaitent se protéger contre des risques de même nature. Une condition à respecter pour la construction du groupe est qu'il existe un lien (social, économique, etc.) entre les individus de cette communauté afin de bénéficier du sentiment d'appartenance et de responsabilisation auprès des assurés ou encore un mécanisme de contrôle des uns envers les autres.

La conception et la gestion de polices d'assurance dites participatives demande certaines conditions autres que la définition du groupe d'assurés. La prime totale qui sera réclamée par l'assureur en début de période doit être suffisante pour couvrir le risque total du groupe. Pour la mise en place d'une telle assurance, le risque total sera sectionné en tranche. La première consiste en une tranche inférieure du risque qui sera mutualisée entre les membres du groupe et la seconde est supportée par l'assureur, voire réassurée par ce dernier.

La détermination d'une éventuelle participation aux bénéfices se porte sur l'évolution du risque dans la tranche inférieure. Notez que la clause de participation bénéficiaire est courante en assurance sur la vie, où elle porte essentiellement sur les performances financières réelles par rapport au taux garanti. Ici, elle portera sur la sinistralité constatée dans la tranche basse, sous la franchise partagée.

1.4.1 La définition du groupe

Un groupe adossé à une police d'assurance avec participation bénéficiaire doit être composé d'un nombre suffisant d'individus afin de garantir une mutualisation efficace de tous les risques au sein du groupe soumis à cette mutualisation. Cependant, si la taille du groupe est trop grande, cela serait susceptible de compromettre l'efficacité des mécanismes de contrôle.

En conséquence, les groupes peuvent être constitués en fonction du type de risque, regroupant des membres de la même famille, des amis, des personnes exerçant la même activité économique, des membres d'associations, des travailleurs indépendants d'une même zone géographique, ou alors selon les recommandations spécifiques de la compagnie d'assurance. Il est ainsi crucial de maintenir un équilibre entre la taille du groupe, la nature des risques partagés et la cohésion des membres afin d'optimiser les avantages de la participation bénéficiaire.

1.4.2 La franchise

La franchise est un élément clé dans un contrat d'assurance. Elle permet de responsabiliser les assurés et de les intéresser à la gestion de leur risque. La franchise peut être annuelle et fait référence à la somme qu'un assuré doit payer chaque année avant que l'assureur ne commence à couvrir les coûts des réclamations. La franchise peut aussi être fixée par sinistre et décrit le montant spécifique que l'assuré doit payer de sa poche avant que l'assurance ne commence à couvrir les coûts associés à un sinistre particulier. Contrairement à la franchise annuelle, qui est un montant fixe payé une fois par an, la franchise par sinistre est applicable à chaque sinistre couvert par la police d'assurance.

Il est important de souligner que l'introduction d'une franchise permet de réduire la prime totale à verser dans ce système, offrant ainsi une flexibilité accrue pour adapter la couverture en fonction des besoins spécifiques des assurés et des groupes auxquels ils appartiennent. Cependant, l'application d'une franchise n'est pas nécessairement obligatoire, et les assurés ont la possibilité de choisir les montants de leur propre franchise.

1.4.3 La rétention annuelle

Dans ce modèle, le risque global de l'assureur est réparti entre les groupes d'assurés qui constituent son portefeuille et ce dernier. Le pool de groupe assume la charge totale des pertes jusqu'à une limite définie par la rétention annuelle du pool. L'assureur intervient dès que la somme des pertes dépasse cette limite annuelle. En fin de compte, la perte totale est répartie parmi tous les assurés du portefeuille et ceux-ci contribuent en fonction des groupes auxquels ils appartiennent.

La prime d'assurance totale fixée par l'assureur reflète cette segmentation de la perte totale du portefeuille et dont résultent deux contributions distinctes. La première est

calculée en représentation de la tranche inférieure du risque, tandis que la seconde est déterminée pour faire face à la tranche supérieure.

1.4.4 La participation bénéficiaire / Cash back

La participation bénéficiaire d'un contrat appartenant à un groupe est évaluée en fonction de la sinistralité associée à la tranche inférieure du risque. En cas de résultats favorables en matière de sinistralité, l'assureur a la possibilité de restituer une partie des primes non utilisées affectées à cette tranche sous la forme d'un remboursement aux groupes d'assurés. Une autre option envisageable serait de mettre en œuvre une réduction de prime en faveur des individus.

Ce mécanisme de remboursement, également appelé "cash back", agit comme un levier visant à améliorer les relations entre les assurés et leur assureur. De plus, il cherche à induire un changement positif dans le comportement des assurés en matière de gestion de leurs risques. En encourageant la prudence et la prévention des sinistres, cette initiative vise à créer une dynamique positive au sein de la relation assuré-assureur, favorisant ainsi un engagement mutuel vers des pratiques plus responsables.

1.5 Conclusion

En conclusion, l'assurance pair-à-pair (P2P) émerge comme un modèle novateur, basé sur la mutualisation des risques entre les membres d'un groupe. Les entreprises telles que Luko et Lemonade transforment l'industrie avec leurs modèles basés sur la transparence, l'incitation au comportement responsable et un mécanisme de "Give-back". En envisageant une police d'assurance participative inspirée de ces modèles, l'idée est de créer un système qui repose sur la mutualisation des risques où les assurés participent aux bénéfices. La viabilité de ce modèle dépend de la définition efficace des groupes, d'une répartition équilibrée et équitable des risques, et de la promotion d'un comportement responsable.

La suite de ce texte sera organisée comme suit, le deuxième chapitre présente la modélisation actuarielle de la police participative, mettant en avant une définition précise de la répartition des coûts et des pertes. Puis, le troisième chapitre propose une étude de cas illustrant numériquement l'approche suggérée. Et enfin, une brève conclusion clôturera ce travail.

Chapitre 2

Modélisation actuarielle de la police participative

2.1 Introduction

La structure du modèle proposé implique une définition rigoureuse de la manière dont les coûts et les pertes du portefeuille seront répartis entre l'assureur, les groupes d'assurés et leurs membres. Pour cela, le modèle s'appuiera sur le principe fondamental de la mutualisation des risques propre à l'assurance collaborative : le partage de risque. Plusieurs méthodes peuvent être employées pour effectuer ce partage au sein d'un pool de risques, et le choix de la règle de partage dépend des objectifs spécifiques de l'assureur et des assurés. Dans cette section, il sera question de présenter une règle de partage de risque appelée "Conditional Mean Risk Sharing" proposée par DENUIT et DHAENE (2012), dont les caractéristiques et les propriétés sont particulièrement adaptées à ce modèle.

Ensuite, une décomposition du risque total du portefeuille sera effectuée entre les différents acteurs du modèle, à savoir l'assureur et les groupes d'assurés. Cette décomposition nécessite une gestion conjointe des différents segments de risque entre les groupes et la compagnie d'assurance. Initialement, le groupe défini assume une partie du risque de ses membres via la franchise. Puis le pool de groupe supporte les pertes au-delà de la responsabilité des groupes, impliquant la mutualisation de cette tranche du risque et l'application d'une règle de partage de risque préétablie. Enfin, l'assureur prend en charge la tranche supérieure du risque global, suivant ainsi un modèle classique de transfert de risque.

Ce découpage entraîne une prime totale payée par chaque assuré, résultant de la combinaison d'une contribution à la tranche inférieure du risque, prise en charge par le pool, et d'une contribution pour la gestion de la tranche supérieure par la compagnie d'assurance.

2.2 Conditional Mean Risk sharing

2.2.1 Règles de partage de risque

Le partage de risque tel que définit par DENUIT, DHAENE et ROBERT [3] a pour objectif de répartir le coût total entre les participants d'un pool.

Définition 2.2.1. (*Partage du risque*)

Le partage de risque dans un pool $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un processus en 2 étapes. En début de période, les pertes du pool sont réallouées en transformant \mathbf{X} en un autre vecteur aléatoire $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ de même dimension :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = (H_1(\mathbf{X}), H_2(\mathbf{X}), \dots, H_n(\mathbf{X})) \quad (2.2.1)$$

où tous les $H_i(\mathbf{X}) \geq 0$ et tels que la somme des pertes réallouées soit égale à la somme des pertes observées :

$$\sum_{i=1}^n H_i(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.2.2)$$

En fin de période, les réalisations $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ du pool sont observées et chaque participant i reçoit la réalisation x_i de son risque X_i . En contrepartie, chaque participant contribue au pool à hauteur de la réalisation $H_i(\mathbf{x})$ de son risque réalloué $H_i(\mathbf{X})$.

Définition 2.2.2. (*Règle de partage du risque*)

Une règle de partage de risque H est une fonction qui transforme un pool (\mathbf{X}) en un vecteur $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ de même dimension où $H_i(\mathbf{X}) \geq 0$ pour tout i et tel que la condition d'allocation complète (2.2.2) soit satisfaite.

Dans la suite, les règles de partage "agrégées" sont définies comme $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \mathbf{H}(S)$ et ne dépendent que de la somme $S = \sum_{i=1}^n X_i$ des risques soumis au partage et non des risques individuels X_i .

Théoriquement, il existe une infinité de règles de partage de risque et trois règles sont présentés à titre d'illustration dont la conditional mean risk sharing.

Exemple 2.2.3. (*stand alone risk sharing rule*)

La situation dans laquelle chaque participant dans le groupe supporte son propre risque peut être décrite par la règle de partage de risque directe.

$$H^{sa}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \quad (2.2.3)$$

Il s'agit simplement de la situation autonome où chaque individu conserve sa perte initiale. Le groupe agit alors simplement comme un registre pour recueillir des données sur les pertes individuelles, sans les réallouer entre les participants.

Exemple 2.2.4. (*Règle uniforme*)

La règle de partage uniforme des risques (H^{uni}) est une règle de partage de risque agrégée définie comme suit :

$$H_i^{uni}(\mathbf{X}) = H_i^{uni}(S) = \frac{S}{n}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.4)$$

Les contributions individuelles sont ainsi égales pour tous les participants. La règle proportionnelle a largement été utilisée dans un contexte de partage de risque en pratique. Les participants adoptant une telle règle acceptent de prendre le même pourcentage fixe de la perte totale S sans tenir compte de leur profil de risque.

Exemple 2.2.5. (*Conditional Mean risk sharing*)

Une règle de partage de risque H^{cm} est une conditional mean risk sharing dans le cas où, pour tout pool X_n , la contribution pour un individu i est donnée par :

$$H_i^{cm}(\mathbf{X}) = H_i^{cm}(S) = \mathbb{E}[X_i|S], \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.5)$$

Avec cette règle, chaque participant i doit contribuer à hauteur de la valeur attendue de la perte X_i apportée au groupe, et en fonction de la perte totale S subie par le pool.

2.2.2 Propriétés de la Conditional Mean Risk Sharing

La Conditional Mean Risk Sharing garantit que chaque individu paye en moyenne la part de la perte totale qui lui est attribuable lorsqu'il apporte son risque au sein du pool. Cette règle est adaptée aux risques hétérogènes et est assimilable à la règle uniforme lorsque les risques du pool sont indépendants et identiquement distribués.

La Conditional Mean Risk Sharing est la règle qui minimise le plus l'écart quadratique moyen entre les coûts individuels et les contributions de chaque participant i lorsque $Var[S] < \infty$

$$\mathbb{E}[(X_i - H_i^{cm}(S))^2] = \min_f \mathbb{E}[(X_i - f(S))^2]$$

où le minimum est pris sur toutes les fonctions mesurables f tel que $Var[f(S)] < \infty$.

En clair, la contribution versée par le participant i sous la règle de la Conditional Mean Risk Sharing est la plus proche du risque qu'il apporte au groupe, au sens où elle minimise la différence quadratique moyenne entre le risque et toute fonction mesurable $f(S)$ de la perte totale.

Cette règle permet une répartition complète du coût total entre tous les participants

$$\sum_i^n H_i^{\text{cm}}(S) = \sum_i^n \mathbb{E}[X_i|S] = S \quad (2.2.6)$$

et pour une période donnée, le risque apporté par le participant i peut être décomposé comme suit :

$$X_i = \mathbb{E}[X_i|S] + X_i - \mathbb{E}[X_i|S] \quad (2.2.7)$$

où $\mathbb{E}[X_i|S]$ est la partie structurelle du risque X_i , qui est supportée uniquement par le participant i et $X_i - \mathbb{E}[X_i|S]$ la partie résiduelle du risque qui sera supportée par le pool et éventuellement la compagnie d'assurance.

Comme toute règle de partage de risque, la Conditional Mean Risk Sharing possède des propriétés dont les plus intéressantes dans le cadre de ce travail sont présentées ci-après.

- **l'équité actuarielle** implique qu'en moyenne, les participants ne réalisent pas de perte ou de gain de ce partage de risque dans le sens où leurs contributions moyennes au pool correspondent à leurs pertes moyennes. Une règle de partage de risque H respecte cette propriété si :

$$\mathbb{E}[H_i(S)] = \mathbb{E}[X_i] \quad (2.2.8)$$

Dans le cas de la Conditional Mean Risk Sharing, on obtient :

$$\mathbb{E}[H_i^{\text{cm}}(S)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i|S]] = \mathbb{E}[X_i]$$

- **l'attractivité** exprime la préférence qu'un participant i a pour remplacer son risque de départ par une contribution moins variable en rejoignant le pool. Cela doit être le cas pour tous les participants souhaitant intégrer le pool. Cette propriété se traduit par la comparaison dans le sens de l'ordre convexe du risque et de la contribution qui y est associée.

$$H_i(S) \underset{cx}{\preceq} X_i \quad (2.2.9)$$

où \preceq_{cx} désigne l'ordre convexe traduisant les préférences communes de tous les décideurs risco-phobes. Pour toute fonction convexe g telle que les espérances qui suivent existent. Notons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(H_i^{\text{cm}}(S))] &= \mathbb{E}[g(\mathbb{E}[X_i|S])] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_i)|S]] = \mathbb{E}[g(X_i)]\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[H_i^{\text{cm}}(S)] = \mathbb{E}[X_i]$ et $\mathbb{E}[g(H_i^{\text{cm}}(S))] \leq \mathbb{E}[g(X_i)]$, par conséquent $H_i^{\text{cm}}(S) \preceq_{cx} X_i$

- **Pareto optimal** : Un partage de risque H est Pareto optimal s'il n'existe aucun partage de risque alternatif qui améliore la situation de l'un des participants tout en conservant celle des autres. Dans le cas particulier où les contributions calculées selon la règle de partage H au sein du pool sont comonotones, alors le partage de risque H est Pareto optimal. Cependant, la Conditional Mean Risk Sharing ne remplit pas toujours la condition de la comonotonie.

Définition 2.2.6. (*Comonotonie*)

Une règle de partage de risque H est dite comonotone si, pour un pool \mathbf{X} , on obtient que $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ est un vecteur aléatoire comonotone.

Une règle de partage H est comonotone si, et seulement si, il existe des fonctions croissantes g_i telles que $H_i(\mathbf{X}) = H_i(S) = g_i(S)$.

La comonotonie est une condition qui permet d'éviter le sabotage dans un pool. Ainsi, elle garantit qu'aucune contribution individuelle $H_i^{\text{cm}}(S)$ ne baissera lorsque la perte totale augmente. Pour s'assurer néanmoins que cette propriété soit remplie par la Conditional Mean Risk Sharing, il est nécessaire de supposer que la contribution $H_i^{\text{cm}}(S)$ est une fonction croissante. Ce qui reste une exigence raisonnable dans le sens qu'elle garantit qu'aucun participant n'a intérêt à ce que les pertes agrégées n'augmentent. Cette condition doit être vérifiée au préalable et guider l'acceptation des membres au sein du groupe.

Dans le cas discret et en supposant que tous les risques du pool sont indépendants, la contribution d'un participant i , calculée selon la Conditional Mean risk Sharing en cas de réalisation de la perte totale s , est définie comme suit :

$$H_i^{\text{cm}}(s) = \mathbb{E}[X_i|S = s]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i|S = s] &= \sum_{k=1}^s kP[X_i = k|S = s] \\
&= \sum_{k=1}^s k \frac{P[X_i = k]P[S - X_i = s - k]}{P[S = s]} \\
&= \sum_{k=1}^s k \frac{P[X_i = k]P[\sum_{j \neq i} X_j = s - k]}{P[S = s]}
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

2.2.3 Approximation de la conditional mean risk sharing

Un théorème centrale limite a été établi pour les contributions des participants afin d'étudier le comportement de la contribution individuelle autour de la moyenne du risque lorsque la taille du groupe est suffisamment grande. Une approximation linéaire de la Conditional Mean Risk Sharing dans les grands groupes en a été déduite. DENUIT et ROBERT [4] montrent que dans le cas où les risques X_i sont indépendants et que n tend vers l'infini, la Conditional Mean Risk Sharing est équivalente asymptotiquement à la règle de régression linéaire définie comme suit :

$$H_i^{\text{reg}}(S) = \mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} (S - \mathbb{E}[S]) \tag{2.2.11}$$

Sous cette règle, les participants acceptent de payer la moyenne de leur risque et de répartir les écarts de S par rapport à sa valeur attendue en fonction de la volatilité des risques apportés au pool.

Dans un modèle hybride qui combine le partage du risque et l'intervention de l'assureur à partir d'un certain montant du coût total, le pool ici regroupe les risques qui n'atteindront pas la tranche de risque de l'assureur.

2.3 Police participative

2.3.1 Décomposition du risque

Définissons par S_i , le coût apporté par un groupe i au pool de risque et n le nombre de groupes à l'intérieur du pool. Le modèle de cette police requiert le découpage de la perte totale $S = \sum_{i=1}^n S_i$ entre l'assureur et les différents groupes qui constituent le pool risque dans ce cas.

Dans ce cas, l'assureur ne paie des sinistres qu'à partir d'un certain niveau w qui constitue la capacité de rétention de risque de tout son portefeuille. Par conséquent, il n'intervient que sur la partie du risque total de son portefeuille définie par :

$$\max\{S - w, 0\} = (S - w)_+ \tag{2.3.1}$$

La perte restante à la charge de l'ensemble des groupes ou des assurés de son portefeuille est :

$$\min\{S, w\} = w - (w - S)_+ \quad (2.3.2)$$

La prime totale de chaque groupe π_i est par conséquent une combinaison de contributions. La première partie vient en représentation de la tranche basse de la perte totale supportée par le pool et la seconde en représentation de la tranche supérieure de la perte transférée à l'assureur.

La tranche basse est mutualisée au sein du pool et est soumise à une règle de partage de risque qui ici est la Conditional Mean Risk Sharing. Cette méthode est assimilable à la gestion du risque qui est faite dans un pool soumis à l'assurance P2P. Les groupes participent à la tranche basse du risque et la contribution de leurs membres peut alors être déduite de cette participation.

Les assurés ainsi que les groupes auxquels ils appartiennent ne peuvent pas supporter de graves sinistres en raison d'une capacité d'absorption limitée et parfois réduite. Dans ce cas, il convient de limiter la rétention des groupes à un certain montant w_i afin de les rendre solvables. Pour la couverture de la tranche supérieure, l'assureur intervient qu'à partir d'un certain montant de perte et sera donc tarifiée par une prime stop loss en considérant le principe de tarification du coût du capital. Sur la base de cette décomposition, la prime totale π_i que le groupe i devra verser pour bénéficier d'une telle police est :

$$\pi_i = \pi_i^{P2P} + \pi_i^{SL} \quad (2.3.3)$$

π_i^{P2P} est la contribution du groupe i à la couverture du risque de la tranche basse du coût total, et π_i^{SL} sa prime pour la couverture de la tranche supérieure du risque total du pool.

2.3.2 Couverture des différentes tranches du coût total

En appliquant la Conditional Mean Risk Sharing, la contribution maximale d'un groupe à la rétention du portefeuille est définie par $w_i = \mathbb{E}[S_i | S = w]$. Selon la propriété de l'allocation complète des règle de partage (2.2.2), il en résulte :

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i | S = w] = w \quad (2.3.4)$$

Les espérances conditionnelles sont supposées croissantes et continues, alors

$$\begin{aligned} S \geq w &\iff \mathbb{E}[S_i | S] \geq \mathbb{E}[S_i | S = w] \\ &\mathbb{E}[S_i | S] \geq w_i \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

La décomposition du risque de la tranche supérieure $(S - w)_+$ selon les groupes du pool est réalisée comme suit :

$$\begin{aligned}
(S - w)_+ &= \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S] - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S = w] \right)_+ \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}[S_i|S] - \mathbb{E}[S_i|S = w] \right) \right)_+ \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}[S_i|S] - \mathbb{E}[S_i|S = w] \right)_+ \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i \right)_+
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

En appliquant le même raisonnement à l'expression $(w - S)_+$, il est alors possible de déterminer le surplus et la contribution des groupes à la tranche inférieure comme suit :

$$\begin{aligned}
(w - S)_+ &= \sum_{i=1}^n (w_i - \mathbb{E}[S_i|S])_+ \quad \text{et} \\
\min(S, w) &= w - (w - S)_+ \\
&= \sum_{i=1}^n \left(w_i - (w_i - \mathbb{E}[S_i|S])_+ \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \min\{\mathbb{E}[S_i|S], w_i\}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Il en résulte que tous les groupes participent à la tranche inférieure de la perte à hauteur d'un montant égal à $\min\{w_i, \mathbb{E}[S_i|S]\}$. Cependant, pour s'assurer que les contributions π_i^{P2P} soient suffisantes pour couvrir cette tranche du risque, il faudrait que :

$$\sum_{i=1}^n \pi_i^{P2P} = w \tag{2.3.8}$$

En conséquence, $\pi_i^{P2P} = w_i$ car w_i est la contribution maximale d'un groupe i à la tranche inférieure donnée par l'expression (2.3.2).

La contribution pour la tranche basse du risque ainsi déterminée, il faut maintenant établir la prime que chaque groupe versera pour la couverture du risque de la tranche supérieure. Étant donné que l'un des objectifs de ce modèle est d'avoir un système équitable, la prime stop loss de chaque groupe est calculée selon la perte ou le risque apporté par ce dernier. Le calcul de la prime est effectué selon le principe de tarification du coût du capital.

2.3.3 Principe de tarification du coût du capital

Une compagnie d'assurance doit détenir un certain capital dans le but de faire face à des pertes inattendues. La détermination de ce capital est souvent basée sur le concept

de capital économique (EC) définit comme suit :

$$EC[S] = R[S] - \mathbb{E}[S] \quad (2.3.9)$$

où R représente une mesure de risque et S la perte totale pour la compagnie.

En échange du capital mis à disposition par les investisseurs à la compagnie d'assurance, ces derniers demandent en retour un rendement moyen au taux r_{coc} . Par conséquent, pour couvrir le risque S , la compagnie doit collecter auprès de ses assurés un montant total égal à :

$$\mathbb{E}[S] + r_{coc}(R[S] - \mathbb{E}[S]) \quad (2.3.10)$$

Il s'agit du principe de tarification du coût du capital.

En utilisant la Value_at_Risk(VaR) qui est la mesure de risque la plus commune, ce principe basé sur la VaR devient :

$$\mathbb{E}[S] + r_{coc}(VaR_p[S] - \mathbb{E}[S]) \quad (2.3.11)$$

En supposant que les espérances conditionnelles sont croissantes et continues, alors $S = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S]$ est une somme comonotonique. La Value_at_Risk est une mesure de risque comonotonique additive et sur cette base, la prime individuelle de chaque groupe du portefeuille peut être déduite de ce principe de tarification.

$$\begin{aligned} VaR_p[S] &= VaR_p \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n VaR_p \left[\mathbb{E}[S_i|S] \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S = VaR_p[S]] \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Dans une assurance classique et en considérant une Value_at_Risk à 99,5 %, la prime d'un groupe i calculé avec le principe de tarification du coût du capital serait :

$$\pi_i^{CoC} = \mathbb{E}[S_i] + r_{coc} \left(\mathbb{E} \left[S_i | S = VaR_{99,5\%}[S] \right] - \mathbb{E}[S_i] \right) \quad (2.3.13)$$

Si le portefeuille tend vers l'infini et que les pertes individuelles sont indépendantes, la Conditional Mean Risk Sharing peut être approximée par la règle de régression linéaire de telle manière à obtenir :

$$\pi_i^{CoC} = \mathbb{E}[S_i] + r_{coc} \left[\frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} \left(VaR_{99,5\%}[S] - \mathbb{E}[S] \right) - \mathbb{E}[S_i] \right] \quad (2.3.14)$$

La prime stop loss totale que l'assureur devra réclamer pour couvrir le risque de la tranche supérieure calculée selon le principe du coût du capital est :

$$\begin{aligned}
\pi^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(S - w)_+ \mid S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] - \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] \right) \\
\pi^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(\text{VaR}_{99,5\%}[S] - w)_+ \right] - \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] \right) \\
\pi^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left((\text{VaR}_{99,5\%}[S] - w)_+ - \mathbb{E} \left[(S - w)_+ \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Grâce aux résultats obtenus à l'équation 2.3.6, il est possible de réécrire la prime stop loss totale de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\pi^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S] - \sum_{i=1}^n w_i \right)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S] - \sum_{i=1}^n w_i \right)_+ \mid S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[S_i|S] - \sum_{i=1}^n w_i \right)_+ \right] \right) \\
\pi^{\text{SL}} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \mid S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] \right) \\
\pi^{\text{SL}} &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S = \text{VaR}_{99,5\%}[S]] - w_i)_+ \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] \right) \\
\pi^{\text{SL}} &= \sum_{i=1}^n \pi_i^{\text{SL}}
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

La prime stop loss totale est scindée selon les groupes et la prime que le groupe i devra verser pour la part du risque total transféré à l'assureur est π_i^{SL} .

$$\begin{aligned}
\pi_i^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|\text{VaR}_{99,5\%}[S]] - w_i)_+ \right] - \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] \right) \\
\pi_i^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left((\mathbb{E}[S_i|\text{VaR}_{99,5\%}[S]] - w_i)_+ - \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Les contributions des groupes aux différentes tranches de risque ont été déterminées. Les membres des groupes devront participer au montant de la prime globale que les groupes auront à verser dans ce système. Un peu plus tard dans ce travail, la manière dont les membres devront participer à la contribution de leur groupe sera analysée selon la façon dont le risque au sein du groupe sera structuré.

Les différents groupes auront leur pot dans lequel sera reversée la prime π_i^{P2P} . Le montant de la participation bénéficiaire accordée aux assurés d'un groupe sera déterminé à la suite des fonds disponibles dans ce pot à la fin de la période de couverture. Néanmoins, les sinistres à la charge du pool seront réglés avec l'ensemble des primes π_i^{P2P} . Puis l'assureur prendra le relais, à partir du moment où ces primes seront complètement épuisées.

2.3.4 Détermination de la rétention

La rétention du pool est un élément essentiel à la mise en place d'un tel système. Plusieurs considérations financières peuvent entrer en ligne de compte pour déterminer la capacité du pool. Ces choix doivent être opérés afin de trouver un équilibre entre le transfert de risque et la responsabilité des groupes.

Les assurés peuvent décider de la rétention w_i de leurs groupes. Dans ce cas de figure, les autres composantes du système tel que la prime et la rétention totale w seront déduites de ce choix. Une autre option serait de déterminer la rétention totale du portefeuille selon une probabilité qu'un surplus soit versé en fin de période aux groupes. Soit β , la probabilité pour laquelle une participation sera reversée au groupe. La rétention w du pool est donnée par

$$P(S \leq w) = \beta \iff w = F_S^{-1}(\beta)$$

Une troisième approche permettrait aux assureurs de continuer à offrir des produits avec des tarifs alignés à ceux du marché et de proposer des produits qui présentent plus d'avantages aux yeux des assurés qu'un produit classique. Il s'agit de déterminer la rétention de telle sorte que la contribution totale dans ce système reste similaire à la prime totale versée par les individus dans une assurance traditionnelle. Notons π_i , la prime fixée en référence à un objectif spécifique. La rétention d'un groupe i peut être déduite du calcul de la rétention totale obtenue comme suit :

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{i=1}^n \pi_i^{\text{SL}}$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = w + \pi^{\text{SL}}$$

$$w = \sum_{i=1}^n \pi_i - \pi^{\text{SL}}$$

La rétention du portefeuille est déterminée et sachant que la prime par participant pour la tranche inférieure est limitée à w_i , alors :

$$\begin{aligned} w_i &= \mathbb{E}[S_i|S = w] \\ &\approx \mathbb{E}[S_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} \left(w - \mathbb{E}[S] \right) \end{aligned}$$

2.3.5 La participation bénéficiaire du groupe

En fin de période de couverture, lorsqu'un surplus subsiste dans le pot commun du pool, l'assureur décide de partager l'excédent en fonction du montant restant. En clair, si $S \leq w$, l'excédent $(w - S)_+$ peut être distribué entre les groupes et ces derniers décideront de l'utilisation ou de la répartition de cette participation entre leurs membres.

Le groupe i recevra dans ce cas une participation $B_i = (w_i - \mathbb{E}[S_i|S])_+$ de telle sorte que la somme des participations de tous les groupes soit :

$$(w - S)_+ = \sum_{i=1}^n (w_i - \mathbb{E}[S_i|S])_+ \quad (2.3.18)$$

Avec les propriétés de la Conditional Mean Risk Sharing et pour $S \leq w$, la contribution $\mathbb{E}[S_i|S]$ d'un groupe i sera toujours inférieure à $\pi_i^{\text{P2P}} = \mathbb{E}[S_i|S = w]$. Ainsi, aucune contribution supplémentaire n'est réclamée au groupe ex-post. Chaque participant doit donc payer ex-ante le montant maximal de sa contribution à la tranche basse, w_i , et le mécanisme de remboursement opère ex-post pour distribuer l'excédent parmi les groupes du pool, attribuant B_i à chacun d'eux individuellement.

2.4 Le risque au sein du groupe

Les contributions des groupes déterminées préalablement peuvent être scindées entre leurs membres. Mais cette répartition dépendra fortement de la structure du risque au sein du groupe. Deux méthodes pour structurer le risque apporté par le groupe i au pool sont envisagées :

- Les membres du groupe i assument individuellement leur propre franchise. En cas de sinistre, chaque membre paie sa propre franchise pour le sinistre qu'il a occasionné.
- Tous les sinistres survenant au sein du groupe sont soumis à une franchise globale. Cette franchise globale du groupe est calculée en additionnant les franchises individuelles de ses membres. Par conséquent, tous les membres paieront de leurs poches pour couvrir une partie du sinistre, même s'ils ne l'ont pas occasionné.

Le choix de la structure du groupe aura un impact indéniable sur sa contribution, la participation bénéficiaire qui lui sera attribuée ainsi que la contribution de chacun des membres du groupe.

En supposant que le risque supporté par les assurés suit une loi Poisson composé avec des sévérités distribuées selon la fonction de répartition $F_{C_{j,k}}(x) = P[C_{j,k} \leq x]$, on obtient :

$$Y_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} C_{j,k} \quad \text{avec } N_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$$

et la franchise d'un assuré j du groupe i est notée $d_{i,j}$

Dans le premier cas de figure, considérons deux types de franchise populaire en assurance : la franchise par sinistre et la franchise annuelle. Supposons aussi que le groupe i comprend n_i assurés.

- Dans le cas où $d_{i,j}$ est une franchise par sinistre :

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \quad \text{avec } X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\{C_{j,k} - d_{i,j}, 0\}$$

- Dans le cas où $d_{i,j}$ est une franchise annuelle ;

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \quad \text{avec } X_{i,j} = \max\left\{\sum_{k=1}^{N_j} C_{j,k} - d_{i,j}, 0\right\}$$

$X_{i,j}$ est le risque apporté par l'assuré j à son groupe après déduction de sa franchise. Les fonctions $\mathbb{E}[X_{i,j}|S]$ sont supposées continues et strictement croissantes et $\mathbb{E}[S_i|S] = \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|S]$

Suivant les relations (2.3.6) et (2.3.7), le risque supporté par le groupe dans le portefeuille devient $\mathbb{E}[S_i|S]$. Au niveau individuel, chaque assuré doit alors contribuer au risque $\mathbb{E}[S_i|S]$ du groupe auquel il appartient. Suivant la même règle de partage défini pour répartir le risque dans le pool (CMRS). La part du risque supportée par un assuré par rapport à son groupe s'écrit $\mathbb{E}[X_{i,j}|S_i] = \mathbb{E}[S_i|S]$.

Avec l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}[S_i|S] = \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|S]$ est une fonction bijective de S et

$$\mathbb{E}[X_{i,j}|\mathbb{E}[S_i|S]] = \mathbb{E}[X_{i,j}|S] \quad (2.4.1)$$

Le but ici est d'abord de réallouer S au différent groupe du pool, et ensuite déterminer la contribution d'un assuré avec une perte $X_{i,j}$ selon la contribution $\mathbb{E}[S_i|S]$ de

son groupe. Toutefois, cela est équivalent, dans cet agencement, à déterminer $\mathbb{E}[X_{i,j}|S]$ comme la contribution de l'assuré.

La participation du groupe peut alors être scindée entre ses membres en utilisant les relations suivantes :

$$(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ = \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbb{E}[X_{i,j}|\mathbb{E}[S_i|S]] - w_{i,j})_+ = \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbb{E}[X_{i,j}|S] - w_{i,j})_+ \quad (2.4.2)$$

et

$$(w_i - \mathbb{E}[S_i|S])_+ = \sum_{j=1}^{n_i} (w_{i,j} - \mathbb{E}[X_{i,j}|\mathbb{E}[S_i|S]])_+ = \sum_{j=1}^{n_i} (w_{i,j} - \mathbb{E}[X_{i,j}|S])_+ \quad (2.4.3)$$

L'assuré participera à la tranche inférieure du risque de son groupe avec une contribution maximale notée $w_{i,j}$ de tel sorte que

$$\sum_{j=1}^{n_i} w_{i,j} = \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|\mathbb{E}[S_i|S] = w_i] = w_i \quad (2.4.4)$$

Quant à la prime stop loss, elle est répartie sur les mêmes principes de transparence et d'équité, et elle est restructurée comme suit

$$\begin{aligned} \pi_i^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ | S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[S_i|S] - w_i)_+ \right] \right) \\ \pi_i^{\text{SL}} &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|S] - \sum_{i=1}^{n_i} w_{i,j} \right)_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|S] - \sum_{i=1}^{n_i} w_{i,j} \right)_+ | S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{n_i} \mathbb{E}[X_{i,j}|S] - \sum_{i=1}^{n_i} w_{i,j} \right)_+ \right] \right) \\ \pi_i^{\text{SL}} &= \sum_{i=1}^{n_i} \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[X_{i,j}|S] - w_{i,j})_+ \right] + r_{\text{coc}} \left(\mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[X_{i,j}|S] - w_{i,j})_+ | S = \text{VaR}_{99,5\%}[S] \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[X_{i,j}|S] - w_{i,j})_+ \right] \right) \\ \pi_i^{\text{SL}} &= \sum_{i=1}^{n_i} \pi_{i,j}^{\text{SL}} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

La prime stop loss totale que le groupe devra verser est une addition des primes de ses membres dépendamment des risques que chacun d'eux représentent.

La prime totale d'un assuré j du groupe i a la même structure que 2.3.3

$$\pi_{i,j} = \pi_{i,j}^{P2P} + \pi_{i,j}^{SL} \quad (2.4.6)$$

Dans la seconde configuration, la composition du risque au sein du groupe peut varier considérablement, en fonction du type de franchise choisi. Toutefois, quelle que soit la franchise utilisée, il est essentiel de déterminer la distribution réelle du risque que le groupe apporte au pool après l'application de sa franchise globale. Une fois cette répartition établie, la contribution du groupe au pool peut être calculée en suivant la méthode présentée de la section 2.3.2 à la section 2.3.4.

Après avoir évalué la contribution globale du groupe i , il est alors possible de répartir cette contribution entre ses membres selon une règle de partage des risques définie. Pour garantir l'équité, la Conditional Mean Risk Sharing sera utilisée pour redistribuer la prime du groupe en fonction du risque que ses membres représentent. Néanmoins, il est possible d'effectuer cette répartition selon une autre règle de partage telle que la règle uniforme qui assure à tous les membres d'un groupe de verser des primes équivalentes.

Les effets du choix de deux types de franchise commune sur la structure et la distribution seront présentés à titre d'illustration.

- Si le groupe opte pour l'application d'une franchise par sinistre, chacun de ses membres choisit le montant de la franchise qu'il veut bien supporter en cas de sinistre dans le groupe. La franchise globale D_i est déterminée en fonction du choix de chaque membre et est définie par $D_i = \sum_{j=1}^{n_i} d_{i,j}$. Cette franchise sera appliquée à tous les sinistres qui surviendront dans le groupe, quel que soit l'individu responsable. Le risque au sein du groupe devient alors :

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \quad \text{où} \quad X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\{C_{j,k} - D_i, 0\}$$

- Supposons à présent que le groupe choisisse une franchise globale annuelle, les $d_{i,j}$ sont les franchises annuelles choisies par chaque membre du groupe et $D = \sum_{j=1}^{n_i} d_{i,j}$ est la franchise annuelle globale du groupe. Le risque S_i devient alors :

$$S_i = \max\left\{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} - D_i, 0\right\}$$

$$S_i = \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} - D_i\right)_+$$

Les espérances conditionnelles sont supposées croissantes et continues de sorte à respecter la propriété de comonotonicité qui garanti que la franchise qu'un membre d'un groupe ne diminuera pas si le coût total $\sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}$ est croissant. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} - D_i\right)_+ &= \left(\sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}\right] - \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} = D_i\right]\right)_+ \\
S_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(\mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}\right] - \mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j} = D_i\right]\right)_+ \\
S_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(\mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}\right] - d_{i,j}\right)_+ \\
S_i &= \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \\
S_i &= \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \quad \text{où } X_{i,j} = \left(\mathbb{E}\left[Y_{i,j} \mid \sum_{j=1}^{n_i} Y_{i,j}\right] - d_{i,j}\right)_+
\end{aligned}$$

Dans cette seconde configuration, le risque du groupe pour le pool est la somme agrégée des pertes de ses membres représentées par $X_{i,j}$. Cependant, il faut déterminer la distribution de ce risque en fonction du type de franchise choisi par le groupe. Suite à cela, il sera alors possible de répartir les contributions, les participations ainsi que la prime stop loss en suivant la même méthode présentée dans la première configuration. Le groupe prend une responsabilité accrue par rapport au premier cas, ce qui pourrait se traduire par une réduction du risque qu'il transfère au pool, et donc par une contribution plus faible.

Dans les différents cas présentés, il apparaît que la contribution calculée est transparente et équitable dans le sens où il est possible d'expliquer les différences de primes en fonction du profil de chaque assuré et du groupe auquel ils appartiennent. Le profil de risque d'un assuré dépend de la distribution de son risque de base et de la franchise qu'il est prêt à supporter.

2.5 Conclusion

En conclusion, la mise en place d'une police participative offre une approche novatrice dans la gestion des risques assurantiels. En divisant le risque entre l'assureur et les différents groupes d'assurés, cette approche favorise une mutualisation efficace en limitant l'impact financier des sinistres pour chaque partie prenante. La Conditional Mean Risk Sharing assure une répartition équitable des charges, tandis que le transfert de risque

garantit une gestion financière prudente et durable. De plus, le mécanisme de la participation bénéficiaire encourage l'engagement des assurés en redistribuant les excédents en fin de période. Cependant, la structure du risque au sein des groupes nécessite une analyse approfondie pour déterminer la meilleure stratégie de gestion. Ce modèle aborde la couverture du risque selon des étapes ; d'abord vient la détermination du risque au niveau du pool, puis le calcul des contributions au niveau des groupes et enfin le calcul de la contribution des assurés. Dans l'ensemble, la police participative représente une évolution prometteuse dans le secteur de l'assurance, offrant à la fois protection et engagement communautaire. La suite de ce travail sera axée sur l'illustration par une étude de cas du modèle proposé.

Chapitre 3

Illustration numérique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'objectif est d'appliquer la méthodologie de calcul des contributions exposée au chapitre précédent. Afin d'illustrer cette approche de façon concrète, un exemple sera mis en œuvre : un portefeuille de risques en assurance responsabilité automobile composé de 16 classes de risques distinctes. L'analyse de ce portefeuille permettra de démontrer comment cette méthode de calcul s'applique de manière pratique, ce qui permettra d'apprécier la pertinence de l'approche présentée dans le contexte spécifique de l'assurance responsabilité automobile.

3.2 Paramètres et hypothèses

3.2.1 Les paramètres du portefeuille

Le portefeuille en responsabilité civile automobile est constitué d'assurés exposés à des sinistres attritionnels et des sinistres graves pouvant dépasser un seuil déterminé. Le montant total du sinistre généré par l'assuré d'un groupe i et de la classe de risque j est représenté comme suit :

$$Y_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} C_{j,k} + \sum_{k=1}^{M_j} L_{j,k} \quad (3.2.1)$$

où

N_j est le nombre de sinistres attritionnels générés par l'assuré j , avec $N_j \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$.

$C_{j,k}$ est le coût du k ème sinistre attritionnel généré par l'assuré j , avec $C_{j,k} \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta_j)$.

M_j est le nombre de sinistres graves générés par l'assuré j , avec $M_j \sim \text{Poisson}(0.0001)$.

$L_{j,k}$ est le coût du k ème sinistre grave généré par l'assuré j et suit une distribution de Pareto Généralisée.

Toutes ces variables aléatoires sont supposées indépendantes entre elles. Les paramètres de Poisson λ_j sont donnés par :

$$\lambda_j = 0.06 \times \begin{cases} 0,75 & \text{si l'assuré } j \text{ vit en zone rurale,} \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases} \times \begin{cases} 1,9 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 18-24} \\ 1,4 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 25-30} \\ 1 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 31-60} \\ 0,8 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 61-70} \end{cases} \times \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré } j \text{ conduit un véhicule de petite cylindrée} \\ 1,3 & \text{si l'assuré } j \text{ conduit un véhicule puissant.} \end{cases}$$

Les paramètres de la loi gamma sont $\alpha = 0,55$ et

$$\beta_j = 7,87 \times 10^{-4} \times \begin{cases} 0,9 & \text{si l'assuré } j \text{ vit en zone rurale,} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases} \times \begin{cases} 0,8 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 18-24} \\ 0,87 & \text{si l'assuré } j \text{ appartient à la classe d'âge 25-30} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le modèle de Pareto généralisé pour les sinistres larges est :

$$P[L_{j,k} \leq t] = 1 - \left(1 + \xi \frac{t - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

avec $u = 100\,000$, $\xi = 0,4152$ et $\sigma = 156\,737,4$.

Remarque 3.2.1. Le groupe i auquel un assuré appartient n'a pas d'impact réel sur les paramètres des différentes lois de probabilités, seul la classe de risque j a un impact. Par conséquent, les paramètres seront identifiés grâce à l'indice j uniquement.

Supposons que les classes de risque j sont également peuplées, en considérant un nombre de 10 jusqu'à 1500 assurés dans chaque classe, cela permettra d'évaluer l'impact de la taille du portefeuille.

Les paramètres détaillés de chaque classe de risque du portefeuille sont représentés dans la table 3.2.1 ci-après pour les différentes lois de probabilités. Cette table comprend également les niveaux de franchises pour chaque classe de risque.

Classe j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\lambda_j(10^{-2})$	8,55	11,115	63	8,19	4,5	5,85	3,6	4,68	11,4	14,82	8,4	10,92	6	7,8	04,8	6,24
α	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
$\beta_j(10^{-4})$	5,66	5,66	6,16	6,16	7,08	7,08	7,08	7,08	6,29	6,29	6,84	6,84	7,87	7,87	7,87	7,87
d_j	150	150	250	250	200	200	200	200	300	300	300	300	100	100	100	100

TABLE 3.2.1 – Paramètres du portefeuille

Remarque 3.2.2. Dans un modèle d'assurance P2P, les membres du groupe sont généralement intéressés par la couverture des sinistres de petite à moyenne taille, qui peuvent avoir un impact financier significatif, mais qui restent en deçà du seuil de rétention des individus. Ces seuils représentent généralement le montant que les individus sont prêts à supporter par leurs propres moyens avant de faire appel à leur assurance. Dans ce contexte, la composante de Pareto qui ne commence qu'à 100 000 est peu pertinente, car elle dépasse probablement les seuils de rétention des individus et des groupes. De plus, les sinistres d'une telle envergure sont transférés directement à l'assureur et n'entrent pas dans le pool. Elle n'est également pas représentative des risques courants auxquels les membres du groupe sont exposés. Par conséquent, celle-ci ne sera pas prise en compte tout le long de cette illustration.

3.2.2 Hypothèses

En assurance de dommages, la franchise la plus courante est celle appliquée par sinistre. Bien que les franchises soient moins fréquentes dans le domaine de la responsabilité civile automobile, les jeunes conducteurs peuvent se voir appliquer une franchise. Dans cette étude de cas, tous les assurés ont une franchise par sinistre et cette dernière permettra de déterminer la franchise globale du groupe auquel ils appartiennent.

d_j est la franchise d'un assuré de classe j , et après application de sa franchise l'assuré apporte un risque au groupe i :

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\{C_{j,k} - d_j, 0\}$$

Dans le cas de figure où les assurés décident d'avoir une franchise globale au sein de leur groupe $X_{i,j}$ devient

$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\left\{C_{j,k} - \sum_{j=1}^{n_i} d_j, 0\right\}$$

Dans les deux de cas de figure, le risque total S_i d'un groupe i composée de n_i assuré est

$$S_i = \sum_{l=1}^{n_i} X_{i,j=\text{Classe } l} \quad (3.2.2)$$

où j correspond à la classe de risque du $l^{\text{ème}}$ membre du groupe i .

Le groupe i peut représenter une famille, des amis ou encore un groupe de professionnels, et est constitué d'assurés avec différentes classes de risque. L'illustration sera réalisée avec des exemples de groupe composé à partir de différentes classes de risques du portefeuille. Les groupes constitués et étudiés sont au nombre de 3. Leur description se trouve dans la table 3.2.2.

Groupe	Représentation	Classe des assurés	Nombre d'individus
Groupe 1	Famille	Classe 9	2
		Classe 13	1
		Classe 14	1
Groupe 2	Collègues	Classe 1	1
		Classe 3	1
		Classe 4	1
		Classe 5	1
Groupe 3	Groupe d'amis	Classe 7	1
		Classe 15	1
		Classe 8	1

TABLE 3.2.2 – Composition de groupes dans le portefeuille

- Classe 9 représente un assuré de la classe d'âge [18-24], qui vit en zone urbaine et qui conduit une voiture de type petite cylindrée. Il représente les enfants dans le groupe 1.
- Classe 13 représente un assuré de la classe d'âge [31-60], qui vit en zone urbaine et qui conduit une voiture de type petite cylindrée. Il représente un parent.
- Classe 14 représente un assuré de la classe d'âge [31-60], qui vit en zone urbaine et qui conduit une voiture de type petite cylindrée. Il représente aussi un parents.
- Classe 1 représente un assuré de la classe d'âge [18-24], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type petite cylindrée.
- Classe 3 représente un assuré de la classe d'âge [25-30], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type petite cylindrée.

- Classe 4 représente un assuré de la classe d'âge [25-30], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type grosse cylindrée.
- Classe 5 représente un assuré de la classe d'âge [31-60], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type petite cylindrée.
- Classe 7 représente un assuré de la classe d'âge [61-70], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type petite cylindrée.
- Classe 8 représente un assuré de la classe d'âge [61-70], qui vit en zone rurale et qui conduit une voiture de type grosse cylindrée.
- Classe 15 représente un assuré de la classe d'âge [61-70], qui vit en zone urbaine et qui conduit une voiture de type petite cylindrée.

3.3 Distribution des coûts

Le calcul des contributions nécessite de déterminer la distribution des variables aléatoires qui entre en ligne de compte.

3.3.1 Distribution des $Y_{i,j}$

Sans la composante Pareto, le risque $Y_{i,j}$ devient :

$$Y_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} C_{j,k} \quad (3.3.1)$$

La distribution du coût pour un individu de la classe j est définie par $F_{Y_{i,j}}(x) = P[Y_{i,j} \leq x]$ et notons par $F_{C_{j,k}}(x) = P[C_{j,k} \leq x]$, la fonction de répartition des sévérités pour les risques attritionnels.

$Y_{i,j}$ est une variable aléatoire de loi de Poisson composé. Sa distribution peut être obtenue en appliquant la méthode de l'algorithme de Panjer. Cependant, cet algorithme requiert des sévérités de valeurs discrètes. Il faut alors avant tout discrétiser les distributions des sévérités $C_{j,k}$ de loi Gamma.

$$Y_{i,j} \sim \text{CP}(\lambda_j, F_{C_{j,k}})$$

Après cette discrétisation, les variables aléatoires $C_{j,k}$ prendront des valeurs discrètes. La fonction de répartition de $Y_{i,j}$ sera alors obtenu comme suit :

$$F_{Y_{i,j}}(x) = P[Y_{i,j} \leq x] = \sum_{y=0}^x g_{j,y}, \quad x \geq 0$$

Où les $g_{j,y} = P[Y_{i,j} = y]$ sont calculés de façon récursive grâce à l'algorithme de Panjer.

Avec $f_y = P[C_{j,k} = y]$, l'algorithme s'écrit

$$g_{j,y} = \begin{cases} \exp(-\lambda_j) & \text{si } y = 0 \\ \frac{\lambda_j}{y} \sum_{k=0}^{y-1} k f_k g_{j,y-k} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

3.3.2 Discrétisation des sévérités $C_{j,k}$

La discrétisation de la loi des sévérités peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes. Cela implique de définir la distribution des sévérités sur un intervalle $[a, b]$ et pour des valeurs discrètes telles que $a, a + h, a + 2h, \dots$ avec un pas déterminé h .

Notons par $F(x)$, la fonction de répartition à discrétiser sur cet intervalle $[a, b]$ et $f(x)$ la masse de probabilité en x . La discrétisation de cette fonction de répartition peut alors se faire selon différentes méthodes :

1. La méthode "Upper" qui est une différence progressive de la fonction de répartition

$$f(x) = F(x + h) - F(x)$$

Pour $x = a, a + h, a + 2h, \dots, b - h$. La fonction de répartition discrétisée est toujours au-dessus de la fonction réelle

2. La méthode "Lower" qui est une différence régressive de la fonction de répartition

$$f(x) = F(x) - F(x - h)$$

Pour $x = a + h, a + 2h, \dots, b$ et $f(a) = F(a)$. La fonction de répartition discrétisée est toujours en dessous de la fonction réelle

3. La méthode "Rounding"

$$f(x) = F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

Pour $x = a + h, a + 2h, \dots, b - h$ et $f(a) = F\left(a + \frac{h}{2}\right)$. La fonction de répartition réelle passe à mi-chemin des intervalles $\left[x + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{2}\right]$.

4. La méthode "Unbiased" permet de conserver l'égalité entre le moment de premier ordre de la fonction de réelle et celui de la fonction discrétisée.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}[\min(X,a)] - \mathbb{E}[\min(X,a+h)]}{h} + 1 - F(a) & , x = a \\ \frac{2\mathbb{E}[\min(X,x)] - \mathbb{E}[\min(X,x-h)] - \mathbb{E}[\min(X,x+h)]}{h} & , a < x < b \\ \frac{\mathbb{E}[\min(X,b)] - \mathbb{E}[\min(X,b-h)]}{h} - 1 + F(b) & , x = b \end{cases}$$

La fonction discrétisée et la fonction réelle ont la même probabilité et la même espérance sur l'intervalle considérée.

Afin de conserver une moyenne inchangée lorsque la fonction de répartition est discrétisée, c'est cette dernière méthode qui sera appliquée. Dans la suite du travail, le pas de discrétisation considéré est $h = 100$ justifié par les valeurs des coûts de sinistres qui sont relativement élevées.

La distribution de probabilités des composantes fréquences et sévérités des sinistres de quelques classes sont représentées respectivement sur les figures 3.1 et 3.2.

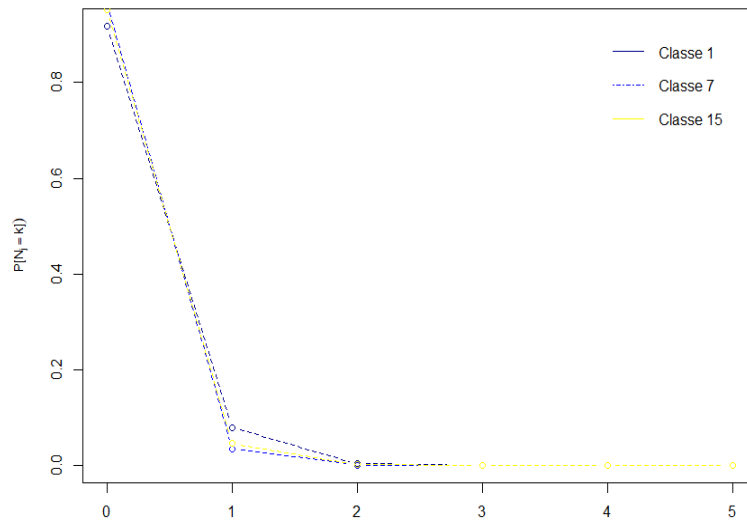


FIGURE 3.1 – Distribution du nombre de sinistres N_j pour certaines classes

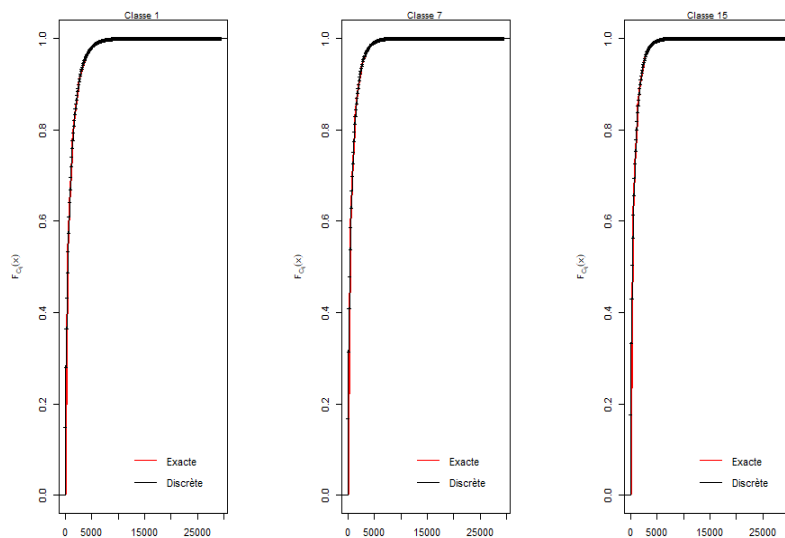


FIGURE 3.2 – Distribution des sévérités exactes et discrétisées $C_{j,k}$ pour certaines classes

Elles ont été déterminées à partir des paramètres énoncés dans la section précédente. Sur la figure 3.2, la courbe en rouge représente la fonction de répartition exacte de la loi Gamma, tandis que les points noirs représentent la fonction de répartition en x obtenue après discrétisation. En général, les fonctions de répartition discrétisées des sévérités concordent avec les fonctions exactes.

3.3.3 Distribution des $X_{i,j}$

Après application de la franchise, les membres apportent le risque $X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\{C_{j,k} - d_j, 0\}$ ou $X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \max\{C_{j,k} - \sum_{l=1}^{n_i} d_{j=\text{Classe } l}, 0\}$ selon la configuration du groupe. La distribution des sévérités d'un sinistre pour un assuré du groupe i et de classe j est ainsi modifiée :

$$\bar{C}_{j,k} = \begin{cases} C_{j,k} - d_j & \text{si } C_{j,k} > d_j \\ 0 & \text{si } C_{j,k} \leq d_j \end{cases}$$

ou

$$\bar{C}_{j,k} = \begin{cases} C_{j,k} - \sum_{l=1}^{n_i} d_{j=\text{Classe } l} & \text{si } C_{j,k} > \sum_{l=1}^{n_i} d_{j=\text{Classe } l} \\ 0 & \text{si } C_{j,k} \leq \sum_{l=1}^{n_i} d_{j=\text{Classe } l} \end{cases}$$

En connaissant la loi de $C_{j,k}$, la fonction de répartition de $\bar{C}_{j,k}$ devient alors

$$F_{\bar{C}_{j,k}}(x) = F_{C_{j,k}}(x + d_j) \quad (3.3.2)$$

ou

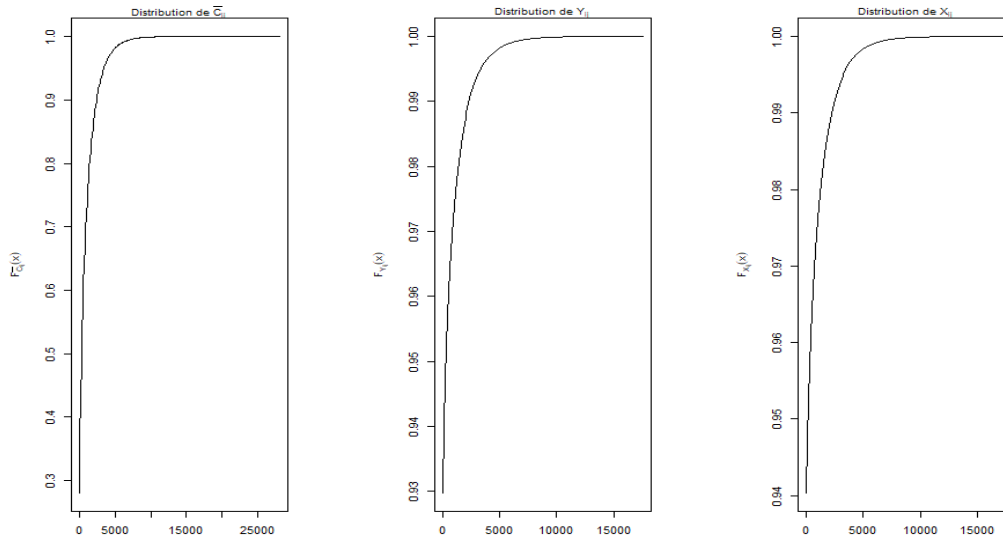
$$F_{\bar{C}_{j,k}}(x) = F_{C_{j,k}}\left(x + \sum_{l=1}^{n_i} d_{j=\text{Classe } l}\right) \quad (3.3.3)$$

La fonction de répartition des sévérités va être modifiée en prenant en compte un peu plus de masse de probabilité en zéro.

$X_{i,j}$ reste une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson composée et sa distribution complète peut être aisément obtenue à l'aide de l'algorithme de Panjer.

$$X_{i,j} \sim \text{CP}(\lambda_j, F_{\bar{C}_{j,k}})$$

Les distributions des variables aléatoires $\bar{C}_{j,k}$, $Y_{i,j}$ et $X_{i,j}$ pour un individu de la classe 1 sont respectivement représentées sur la figure 3.3. Ces distributions prennent en compte le cas où la franchise est individuelle. La masse de probabilité en zéro est plus importante dans la distribution de $X_{i,j}$ que celle de $Y_{i,j}$, dû l'effet de la franchise. Cela correspond à la probabilité qu'un assuré de la classe 1 n'ait aucun sinistre qui doit être pris en compte dans le groupe.

FIGURE 3.3 – Distribution de $\bar{C}_{j,k}$, $Y_{i,j}$ et $X_{i,j}$ pour un assuré de la classe 1

3.3.4 Distribution des S_i

Après l'application de la franchise individuelle ou globale, le risque S_i reste la somme des risques $X_{i,j}$ qui sont de loi de Poisson composé.

Propriété 3.3.1. *Si les $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson composé avec comme paramètre de poisson λ_j et une distribution de sévérité $F_{\bar{C}_{j,k}}$ tel que*

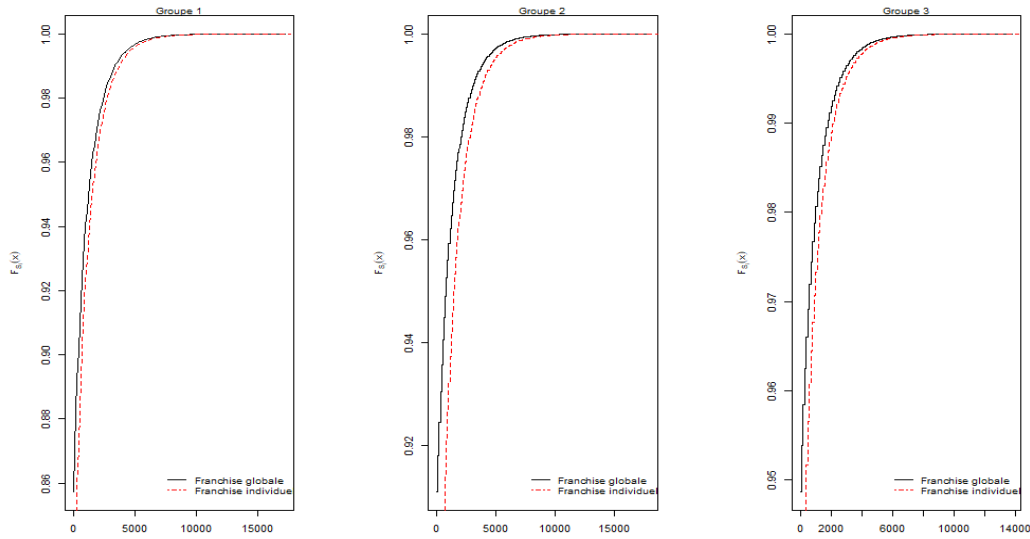
$$X_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_j} \bar{C}_{j,k} \quad \text{avec } N_j \sim \text{Poisson}(\lambda_j) \text{ et } F_{\bar{C}_{j,k}}(x) = P[\bar{C}_{j,k} \leq x]$$

alors $S_i = \sum_{l=1}^{n_i} X_{i,j=\text{Classe } l}$ suit une loi de Poisson composé avec

$$\lambda_i = \sum_{l=1}^{n_i} \lambda_{j=\text{Classe } l} \quad \text{et } F_{C_i}(x) = \sum_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda_{j=\text{Classe } l}}{\lambda_i} F_{\bar{C}_{j=\text{Classe } l,k}}(x)$$

En utilisant toujours l'algorithme de Panjer, la distribution de S_i est déterminée pour les trois groupes présentés en exemple.

Les distributions des risques S_i pour les trois groupes considérés sont représentées sur la figure 3.4. La fonction de répartition lorsque les groupes optent pour une franchise globale est bien supérieure à celle avec des franchises individuelles. C'est une conséquence du fait que dans ce scénario, les individus assument un risque plus élevé et donc le risque que leur groupe apporte au pool est moins élevé que dans le cas avec une franchise individuelle. Cette différence peut entraîner des primes plus basses pour les membres dans le cas où ils optent pour l'application d'une franchise globale. Parmi les groupes, le groupe 3 semble

FIGURE 3.4 – Distribution de S_i des groupes étudiés

être le moins risqué pour le pool, comme le suggère la distribution de son risque S_i . Les assurés qui composent ce groupe font partie des classes qui ont les fréquences de sinistres les plus basses et les distributions de sévérité les moins risquées. Par conséquent, leur prime pourrait également être moins élevée que celle des deux autres groupes.

3.3.5 Distribution de S et $S - S_i$

Dans cette section, il s'agit de déterminer la distribution du coût total S pour un pool composé de n groupes. Si l'on suppose que le portefeuille est entièrement structuré en différents groupes, alors le coût total S est défini comme suit :

$$S = \sum_{i=1}^n S_i \quad (3.3.4)$$

Dans cette illustration numérique, tout le portefeuille ne sera pas structuré en différents petits groupes. Le portefeuille est supposé être constitué de trois groupes en plus des autres assurés. Cependant, pour faciliter la présentation, un assuré ne faisant pas partie de l'un de ces groupes est considéré comme un groupe à lui seul. Cela n'a pas une grande incidence sur la loi suivie par S mais seulement sur les paramètres de la distribution de S .

Après l'application de la franchise par sinistre, le coût total devient le cumul des risques des participants au pool dont les risques sont indépendants et de loi de Poisson composé. Par conséquent, S suit également une loi de Poisson composé dont les paramètres sont à définir.

$$S \sim \text{CP}(\lambda, F_C)$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad F_C(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} F_{C_i}(x)$$

où pour les assurés considérés comme un groupe $F_{C_i}(x) = F_{\bar{C}_{j,k}}(x)$

De la même manière, la variable $S - S_i$ est aussi de loi de Poisson composé dont les paramètres sont déterminés comme suit :

$$S - S_i \sim \text{CP}(\lambda_{S-S_i}, F_{C-C_i})$$

$$\lambda_{S-S_i} = \lambda - \lambda_i \quad \text{et} \quad F_{C-C_i}(x) = \frac{\lambda}{\lambda_{S-S_i}} F(x) - \frac{\lambda_i}{\lambda_{S-S_i}} F_{C_i}(x)$$

Après application de l'algorithme de Panjer, toutes les fonctions de répartition des variables aléatoires nécessaires au calcul des cotisations des différents groupes peuvent être obtenues.

La masse de probabilité ainsi que la fonction de répartition de S sont représentées sur le graphique 3.5. Pour cette fonction, le nombre d'assurés considéré par classe de risque est de 10.

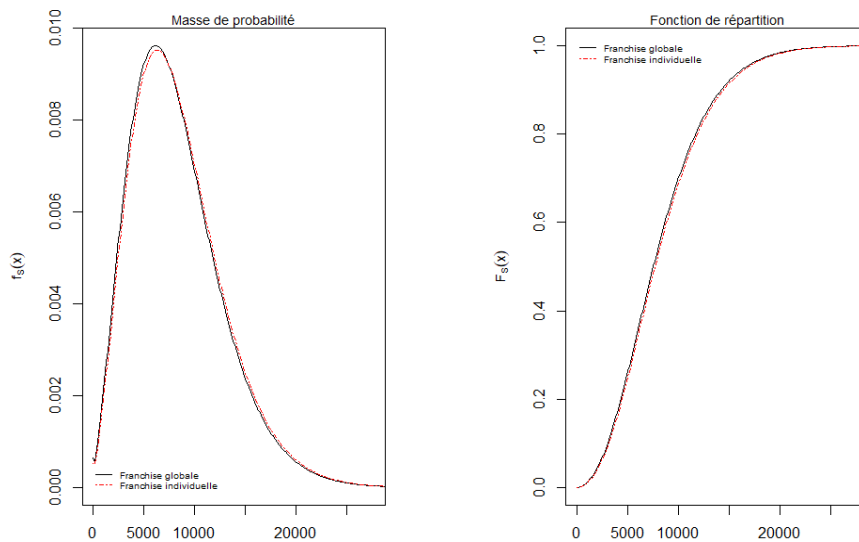


FIGURE 3.5 – Masse de probabilité et fonction de répartition de S

Sur le graphe de la masse de probabilité, il y a un décalage entre la masse de probabilité de S avec l'application de la franchise individuelle et celle après application de la franchise globale. Avec cette dernière, il y a plus de masse de probabilité pour les valeurs dans la queue de distribution gauche de S tandis qu'avec la franchise individuelle, c'est plutôt dans la queue de distribution droite que la masse est plus élevée.

3.4 Calcul des contributions

Avant de pouvoir déterminer les contributions et les primes des différents groupes et leurs membres, il faut d'abord implémenter la règle de partage de risque utilisée dans la méthodologie et en analyser les résultats.

3.4.1 Implémentation de la CMRS

L'application de la conditional Mean Risk Sharing aux trois groupes est illustrée sur la figure 3.6, où l'évolution des contributions de chaque groupe est présentée en fonction du coût total s observé.

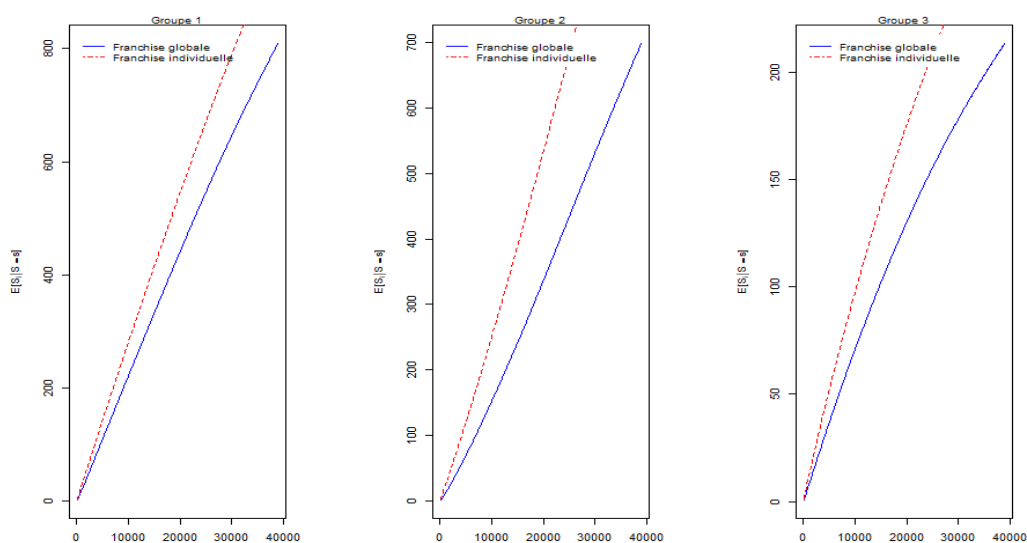


FIGURE 3.6 – Contributions des trois groupes avec un nombre de 10 assurés par classe de risque

Les contributions sont strictement croissantes, ce qui indique une augmentation des cotisations avec le coût total. Ainsi, il est déduit que la règle est Pareto optimale, car une augmentation du coût total entraîne nécessairement une augmentation de la valeur des cotisations pour tous les groupes considérés. Ceci permet de valider la propriété de non-sabotage et ainsi pousse les groupes à plus de vigilance envers leurs membres afin d'adopter des comportements responsables afin de réduire leurs coûts. De plus, les contributions des groupes 1 et 2 sont nettement plus élevées que celles du groupe 3 dont la fréquence de sinistre et la distribution des sévérités étaient les moins élevées. Les contributions calculées avec la CMRS prennent donc en compte le profil des participants et permettent d'obtenir des contributions les plus justes possibles en fonction du risque qu'un participant apporte à un pool.

3.4.2 Approximation par la règle de régression linéaire

Dans le but de calculer les cotisations avec la règle de régression linéaire, il faut déterminer l'espérance, la variance des S_i ainsi que la variance du coût total S . Les valeurs des

cotisations calculées avec la CMRS ainsi que celles obtenues grâce à la règle de régression linéaire sont présentées dans la figure 3.7 et 3.8 .

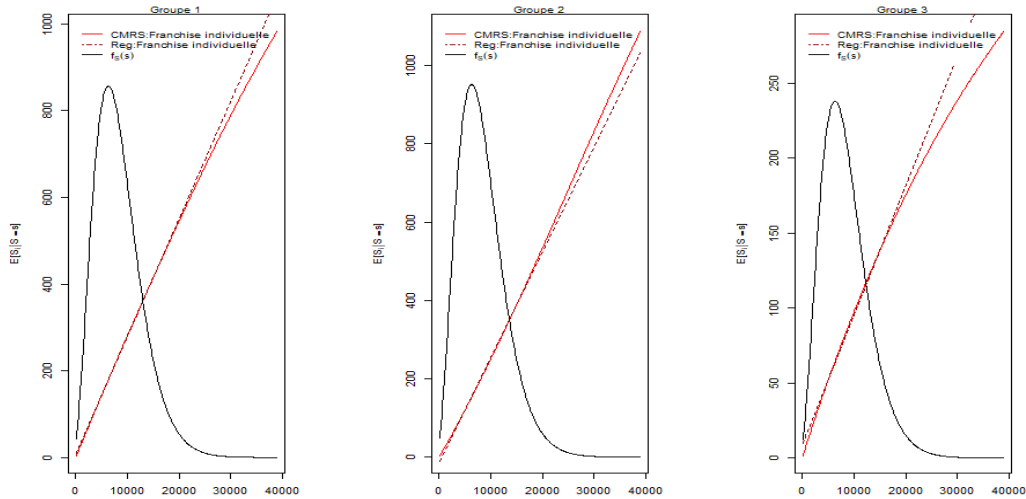


FIGURE 3.7 – Contribution calculée avec la CMRS et la règle de régression linéaire dans le cas de franchise individuelle

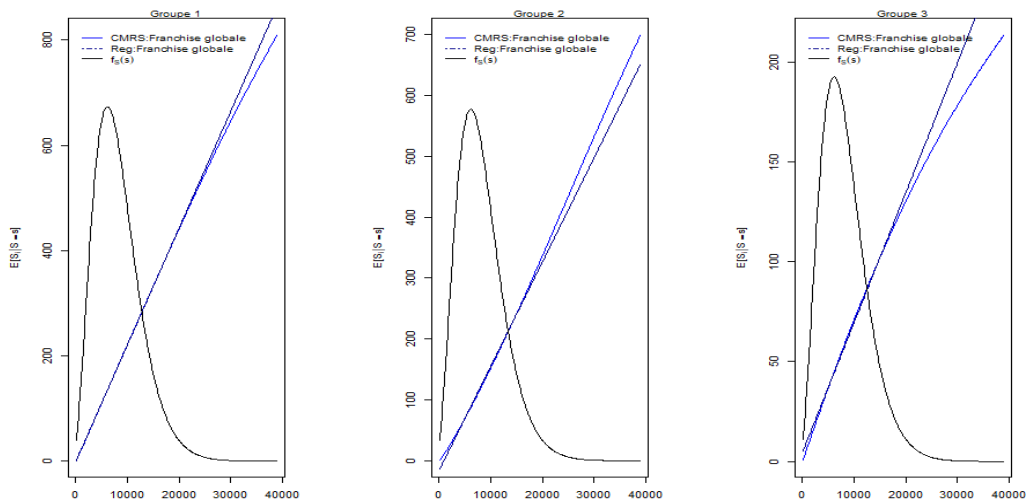


FIGURE 3.8 – Contribution calculée avec la CMRS et la règle de régression linéaire dans le cas de franchise globale

Les valeurs obtenues grâce à la règle de régression linéaire se rapprochent des valeurs calculées avec la CMRS. Cette approximation conserve la même tendance globale de l'évolution des contributions en fonction du coût total observé. De plus, l'approximation linéaire est beaucoup plus précise pour des coûts totaux plus probables. En effet, les contributions calculées par la règle de régression linéaire se rapprochent des contributions calculées par la CMRS pour des coûts totaux dont la fonction de probabilité est plus élevée. Toutefois, pour des valeurs peu probables, notamment dans les queues de distribution, la

règle de partage ne converge pas vers les calculs de la CMRS. Les écarts observés peuvent être dus au fait que, pour ces valeurs, les probabilités sont très faibles et proches de zéro, ce qui peut entraîner des instabilités dans les calculs numériques.

3.4.2.1 Influence de la taille du portefeuille

Les figures 3.9 et 3.10 illustrent l'évolution des contributions obtenues par la CMRS en fonction de l'augmentation du nombre d'assurés par classe de risque. Lorsque le nombre d'assurés par classe de risque augmente, le nombre d'assurés dans le portefeuille aussi augmente. En observant les figures 3.9 et 3.10, il est possible de constater que la contribution des différents groupes étudiés converge vers leurs moyennes au fur et à mesure que le portefeuille devient grand.

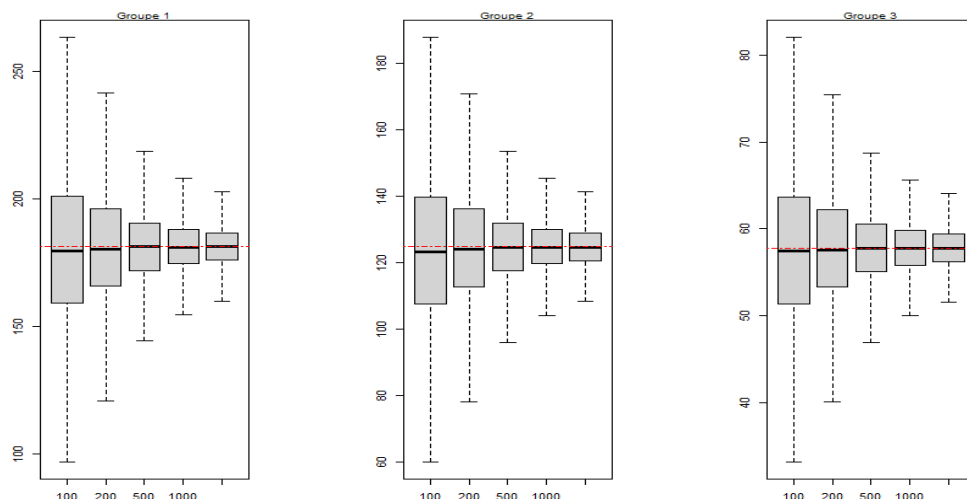


FIGURE 3.9 – Évolution des contributions avec un nombre de participants dans le cas de franchise globale

En effet, lorsque le nombre de participants est suffisamment élevé, les bénéfices du regroupement se manifestent de façon notable. Les pertes individuelles se neutralisent mutuellement à mesure que le nombre de participants croît, réduisant ainsi l'incertitude globale concernant les contributions. En conséquence, les contributions requises pour couvrir ces pertes deviennent plus prédictibles et tendent à se stabiliser autour de la prime pure. Ce constat suggère ainsi qu'avec un grand nombre de participants dans un système d'assurance collaborative, les cotisations peuvent être ajustées de manière plus précise en fonction des pertes encourues par les participants, ce qui contribue à rendre le système plus équitable d'un point de vue actuariel.

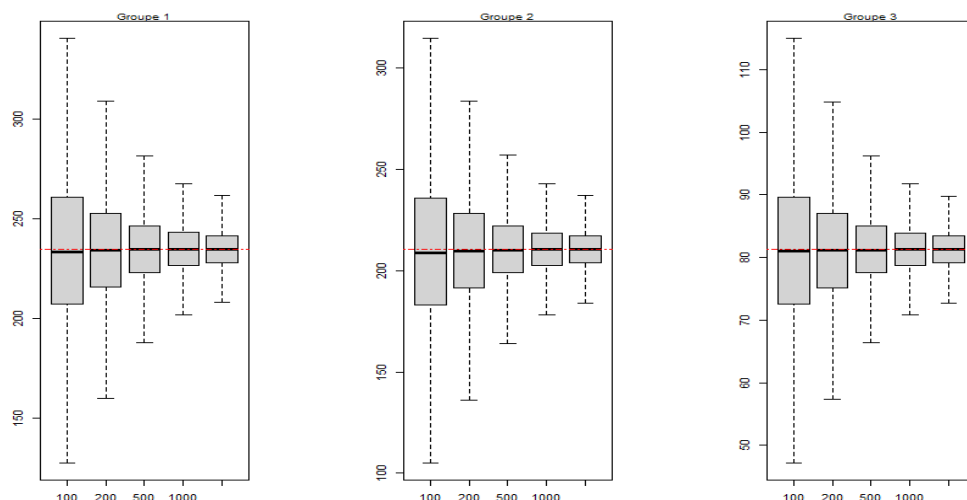


FIGURE 3.10 – Évolution des contributions avec un nombre de participants dans le cas de franchise individuelle

3.4.3 Calcul des contributions par couche

Afin de pouvoir illustrer les montants de primes en jeu dans un tel système, les paramètres et hypothèses considérés sont les suivants :

- Chaque classe de risque est constitué de 100 assurés.
- Les groupes étudiés optent pour une franchise individuelle (chaque membre du groupe paie une franchise s'il est à l'origine du sinistre).
- Le taux de coût du capital est de 6 %.
- La rétention est déterminée de telle sorte que la compagnie puisse verser un cash back 9 années sur 10, soit un $\beta = 0,9$.
- La composition des 3 groupes reste inchangée.

Dans un premier temps, la contribution par groupe sera déterminée puis dans un second temps ces contributions seront scindées entre les différents membres de chaque groupe.

3.4.3.1 Décomposition de la contribution du groupe

Les résultats des calculs des contributions des différents groupes aux différentes tranches de risque sont consignés dans la table 3.4.1. Initialement, ces montants de contributions confirment les conclusions tirées de la section précédente concernant la mise en œuvre de la CMRS. En effet, une observation rapide révèle que les contributions sont moindres pour les groupes présentant un profil de risque plus faible, comme le groupe 3. Ainsi, chaque groupe contribue au pool et à la couverture stop loss de l'assureur en fonction du niveau de risque qu'il porte ou représente.

De plus, il est intéressant de noter que les primes totales versées par chaque groupe pour bénéficier de cette assurance se situent à des niveaux relativement proches de leurs primes pures respectives. Cela démontre la capacité du système à établir des contributions

équitables en fonction du risque, tout en maintenant une certaine proximité avec la prime pure de chaque groupe.

Groupe	$\pi_i^{P2P} = w_i$	π_i^{SL}	π_i	$\mathbb{E}[S_i]$	$\mathbb{E}[B_i]$
1	285.696	22.623	308.319	234.906	52.900
2	261.130	21.363	282.493	210.618	52.693
3	97.357	7.509	104.865	81.293	16.708

TABLE 3.4.1 – Contributions des groupes étudiés aux différentes tranches du coût total

3.4.3.2 Contributions individuelles

Les résultats de calculs de la contribution des membres aux différentes tranches du coût total sont consignés dans la table 3.4.2. Il est possible d’observer comment les primes ou les contributions sont calculées en fonction du profil de risque de chaque individu. Les contributions individuelles varient en fonction du groupe et de la classe de risque des assurés, avec des montants plus élevés pour les individus présentant un risque plus élevé.

La contribution d’un groupe est intrinsèquement liée à sa composition et, par extension, aux profils de risques de ses membres. Ainsi, la dynamique de contribution au sein d’un groupe est intimement liée à la diversité des risques représentés par ses membres, ce qui influe sur ses contributions et le montant des participations à redistribuer.

Groupe	Classe	Nombre	$\pi_{i,j}^{P2P} = w_{i,j}$	$\pi_{i,j}^{SL}$	$\pi_{i,j}$	$\mathbb{E}[X_{i,j}]$	$\mathbb{E}[B_{i,j}]$	
1	1	9	2	92.526	7.518	100.044	74.907	18.428
2	1	14	1	56.834	4.301	61.134	48.073	9.133
3	1	13	1	43.714	3.307	47.021	36.977	7.023
4	2	1	1	94.986	7.954	102.940	75.685	20.223
5	2	3	1	57.452	4.685	62.137	46.430	11.532
6	2	4	1	74.700	6.094	80.793	60.364	14.999
7	2	5	1	33.880	2.645	36.525	28.093	6.042
8	3	7	1	27.100	2.115	29.215	22.472	4.831
9	3	8	1	35.236	2.751	37.986	29.217	6.283
10	3	15	1	34.966	2.645	37.611	29.579	5.616

TABLE 3.4.2 – Contributions individuelles des membres aux différentes tranches du coût total

3.5 Étude de la sensibilité des participations bénéficiaires

Les participations bénéficiaires versées aux groupes ou à leurs membres dépendent de plusieurs facteurs notamment le facteur du risque au sein du groupe ou au sein du

pool. Ainsi, l'impact de différents paramètres sur les participations est évalué. Il s'agit de paramètres qui ont une incidence sur la structuration des risques dans le système.

3.5.1 Influence du nombre d'assurés dans le portefeuille

L'analyse des box plots de la figure 3.11 révèle une tendance marquée à la diminution de la variabilité des participations de chaque groupe à mesure que le nombre d'assurés dans le portefeuille augmente. Cette réduction est attribuable à un effet de mutualisation accru, où les risques individuels des groupes se dissipent dans un pool plus vaste de participants. Ainsi, à mesure que le nombre d'assurés augmente, non seulement les volatilités des participations, mais également celles des contributions des groupes s'amoindrissent, renforçant ainsi la stabilité et la prévisibilité du système d'assurance.

Cette stabilité se manifeste également par une distribution de plus en plus resserrée autour de la médiane, laquelle décroît à mesure que le nombre de participants augmente. Cela s'explique par le fait que, plus le pool grandit, plus les coûts deviennent stables et les contributions des participants tendent à refléter le coût total du pool. En conséquence, les montants à partager comme participations aux groupes diminuent, entraînant une baisse de la médiane.

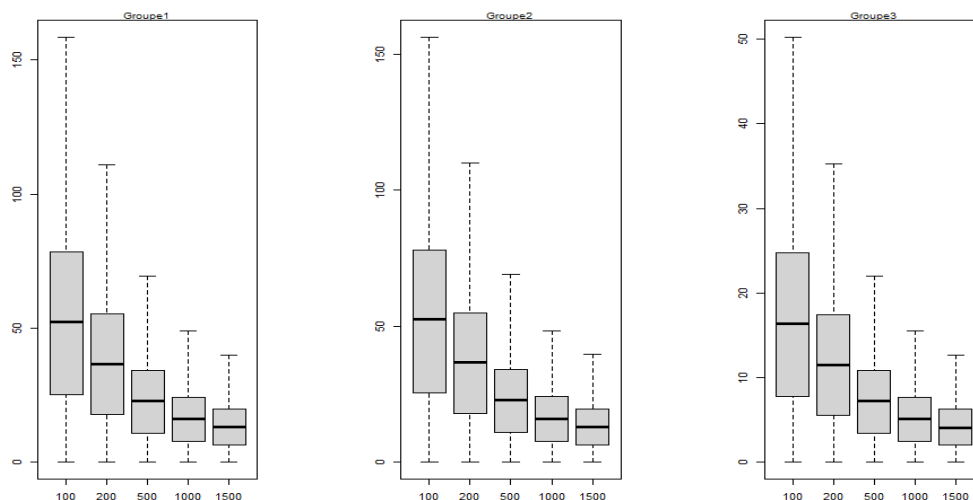


FIGURE 3.11 – Évolution des participations bénéficiaires en fonction du nombre de participants au pool

3.5.2 Influence de la rétention annuelle

L'augmentation de la rétention annuelle produit deux effets notables : d'une part, elle accroît la responsabilité assumée par le pool, et d'autre part, elle induit une plus grande variabilité des cotisations au sein de ce dernier. En effet, les cotisations peuvent fluctuer davantage en réaction aux variations des sinistres et des coûts, ce qui peut introduire une certaine instabilité dans les contributions versées par les groupes. Ainsi, bien que

l'augmentation de la rétention annuelle puisse renforcer la capacité du pool à absorber les risques, elle peut également rendre les contributions plus imprévisibles pour les participants. Cette variabilité aura pour effet de potentiellement accroître les participations bénéficiaires et de les rendre plus volatiles comme le montre la figure 3.12. Cette figure représente la distribution des participations au fur que le β servant à calculer la rétention annuelle augmente.

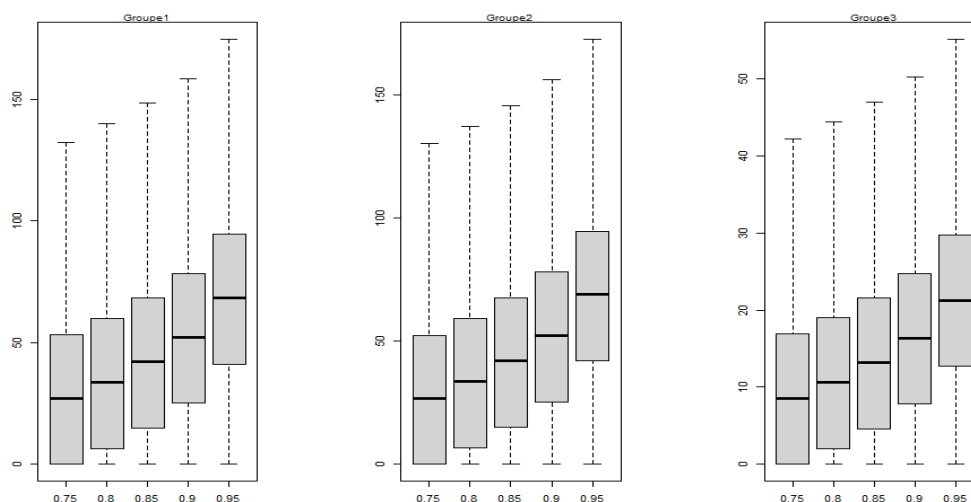


FIGURE 3.12 – Évolution des participations bénéficiaires en fonction de la rétention annuelle

3.5.3 Influence de la taille du groupe

La figure 3.13 illustre l'impact de la variation de la taille du groupe 2 sur les participations bénéficiaires de l'ensemble des groupes étudiés. Pour cela, la taille du portefeuille est maintenue constante (soit 100 assurés par classe de risque) tandis que le nombre de membres dans le groupe 2 est modifié. Ainsi, le nombre de personnes par classe de risque dans le groupe 2 a été progressivement augmenté de 1 à 10, tandis que les deux autres groupes (1 et 3) sont restés inchangés.

Cette figure montre une augmentation significative de la médiane des participations bénéficiaires du groupe 2 à mesure que sa taille augmente. Cette hausse de la médiane reflète une augmentation moyenne des participations du groupe 2, résultant de l'augmentation du nombre de ses membres. Parallèlement, une expansion notable des boîtes de distribution est observée, indiquant une augmentation de la variabilité des participations à mesure que le groupe s'agrandit. Autrement dit, non seulement la médiane des participations augmente, mais également leur dispersion, ce qui suggère une plus grande diversité dans les montants des participations bénéficiaires au sein du groupe à mesure qu'il s'élargit.

À mesure que le groupe 2 accueille davantage de membres, il augmente son exposition au risque par rapport aux autres participants. En absorbant une plus grande part du risque

du pool, cela introduit davantage de variabilité dans les participations. Par conséquent, plus le groupe grandit, plus les participations augmentent en moyenne et deviennent plus volatiles au sein du groupe.

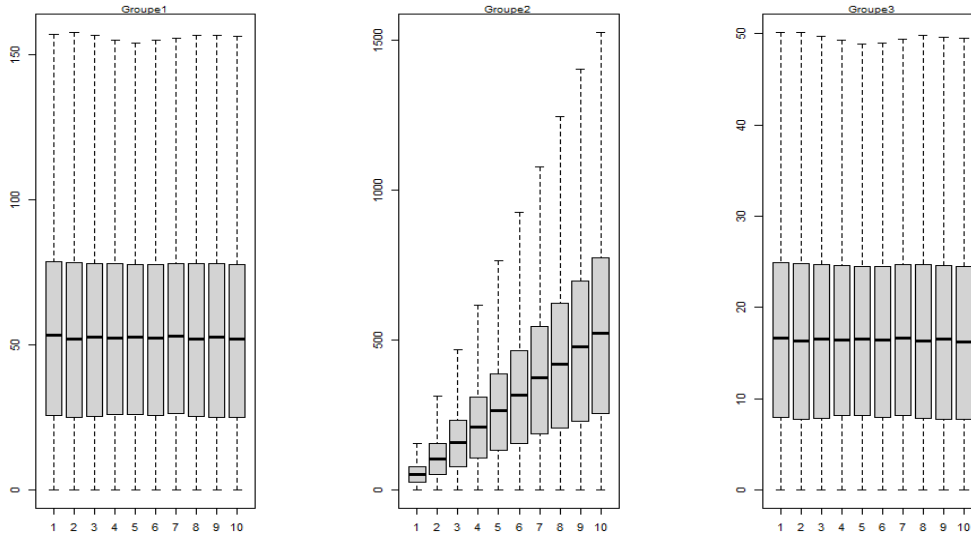


FIGURE 3.13 – Évolution des participations bénéficiaires en fonction de la taille du groupe

3.6 Conclusion

L'étude de cas met en évidence l'impact des choix de franchise et de partage de risque sur la distribution des primes et des contributions dans un système qui inclut l'assurance collaborative. L'analyse montre que la Conditional Mean Risk Sharing favorise une répartition équitable des coûts, incitant à des comportements responsables pour réduire les risques. De plus, l'approximation par la régression linéaire offre une alternative précise pour le calcul des contributions pour les valeurs les plus probables. En augmentant le nombre d'assurés, la rétention ou bien la taille d'un groupe, cela a un impact significatif sur la stabilité des contributions ainsi que la distribution des participations bénéficiaires pour les participants. Ces résultats soulignent l'importance de choisir des paramètres et des règles de partage de risque adaptés pour garantir l'efficacité et l'équité dans un tel modèle.

Conclusion générale

L'assurance pair-à-pair (P2P) représente une innovation majeure dans le domaine de l'assurance. Facilitée par les technologies numériques et les plateformes en ligne, cette forme d'assurance permet une gestion transparente et sécurisée des transactions, tout en éliminant les intermédiaires. Les avantages de l'assurance P2P incluent une réduction des coûts, une responsabilisation accrue des membres, et une adaptabilité aux besoins évolutifs des assurés.

Toutefois, le modèle P2P n'est pas exempt de défis. La stabilité financière du système, la nécessité d'une forte participation et la confiance des membres, ainsi que la complexité opérationnelle sont des aspects critiques à maîtriser. Les trois principaux types de modèles d'assurance P2P offrent des structures variées pour répondre à ces enjeux.

L'exemple des entreprises Luko et Lemonade, qui ont adopté des approches similaires, mais ont connu des parcours divergents, souligne la nécessité de proposer une modélisation solide de ce système soutenu par une entité spécialisée dans la gestion des risques tel que les compagnies d'assurance. Pour d'une part aider les participants à comprendre les règles, les risques et d'autre part à offrir une certaine forme de sécurité aux participants grâce à l'intervention de l'assureur.

Le concept de participation bénéficiaire dans l'assurance, inspiré par les modèles de Luko et Lemonade, propose une formule avec laquelle les assurés peuvent bénéficier d'une partie des primes non utilisées en cas de sinistralité favorable. Cette approche vise à renforcer la relation entre les assurés et les assureurs tout en favorisant des comportements responsables. Le modèle de la police d'assurance avec participation bénéficiaire représente une opportunité pour améliorer l'expérience des assurés et promouvoir une gestion des risques plus transparente et participative.

L'étude de la modélisation actuarielle de la police participative démontre l'efficacité de la règle de partage de risque CMRS (Conditional Mean Risk Sharing), qui assure une répartition équitable des coûts et incite les groupes à adopter des comportements responsables. Cette approche, basée sur le concept familier de moyenne, est facile à mettre en œuvre et transparente, les groupes et les assurés sont informés dès l'adhésion du mécanisme du surplus en fonction du coût total observé.

En conclusion, l'application de l'assurance collaborative par les compagnies d'assu-

rances représente une nouvelle perspective dans l'industrie de l'assurance, grâce à leur flexibilité, leur capacité à répondre aux besoins spécifiques des participants et leur approche du partage des risques. Cependant, certains éléments essentiels doivent être pris en compte pour assurer la viabilité financière du système, tels que le choix de la rétention annuelle, la taille du portefeuille de la compagnie et la taille des groupes. Ces considérations sont cruciales pour garantir la conformité et la pérennité d'un tel système, qui opère différemment de l'assurance traditionnelle.

Cependant, l'étude présentée ici est basée sur une hypothèse forte selon laquelle les risques des assurés sont indépendants. Au vu de la manière dont les groupes sont constitués dans l'étude, cette hypothèse pourrait être infirmée. Il serait alors judicieux d'envisager une modélisation prenant en compte la corrélation entre les différents risques.

Bibliographie

- [1] Michel DENUIT. « Investing in your own and peers' risks : the simple analytics of P2P insurance ». In : *European Actuarial Journal* 10.2 (5 juin 2020), p. 335-359. DOI : 10.1007/s13385-020-00238-x.
- [2] Michel DENUIT et Arthur CHARPENTIER. *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome II : Tarification et Provisionnement*. 2005.
- [3] Michel DENUIT, Jan DHAENE et Christian ROBERT. « Risk-sharing rules and their properties, with applications to peer-to-peer ». In : *Journal of Risk and Insurance* 89.3 (2022), p. 615-667.
- [4] Michel DENUIT et Christian ROBERT. « From risk sharing to pure premium for a large number of heterogeneous losses ». In : *Insurance : Mathematics and Economics* 96 (2021), p. 116-126.
- [5] Michel DENUIT et al. « Comonotonicity and Pareto optimality, with application to collaborative insurance ». In : *Available at SSRN 4337038* (24 jan. 2023).
- [6] EIOPA. « Report on best practices on licencing requirements, peer-to-peer insurance and the principle of proportionality in an InsurTech context ». In.
- [7] Ambroise FARGÈRE et Aïcha SOUKI. *L'assurance collaborative, de la promesse à l'exécution*. 2019.
- [8] L'ACTUARIEL. « Assurance P2P et mécanisme de cashback ». fr-FR. In : *L'Actuariel* (mars 2022). URL : <https://www.lactuariel.fr/metier/technique/assurance-p2p-et-mecanisme-de-cashback/> (visité le 04/10/2023).
- [9] Enkack TIENCHEU. *Modélisation actuarielle de la plateforme Medi-share*. 2023.

Annexe A

Code R

A.1 Distribution des Coûts

A.1.1 Chargement des packages

Le chargement des packages nécessaires aux différents calculs à effectuer.

```
# Package
-----
#Chargement des packages
packages<-c("actuar","latex2exp","distrEx","distr","pracma","evmix","
  ExcelFunctionsR",
            "glue","tidyverse","dplyr","RColorBrewer","xtable","ggplot2"
            ,"gridExtra",
            "plotrix","rgdal","rgeos","maptools","scales","readr","
  questionr",
            "labelled","purrr","reshape2")

for (i in packages) {
  if(!require(i,character.only = T)) install.packages(i)
  require(i,character.only = T)
}
```

A.1.2 Table des paramètres des lois de probabilités

La création d'une table qui contient les différents paramètres des lois de probabilités pour les 16 classes de risques.

```
p=16

P1=c(0.75,1)
P2=c(1.9,1.4,1,0.8)
P3=c(1,1.3)
P=matrix(nrow=p,ncol=1,0)
t=1
```

```

for (i in 1:2){
  for(j in 1:4){
    for (y in 1:2){
      P[t]=0.06*P1[i]*P2[j]*P3[y]
      t=t+1
    }
  }
}

S1=c(0.9,1)
S2=c(0.8,0.87,1,1)
S3=c(1,1)
S=matrix(nrow=p, ncol=1,0)
t=1
for (i in 1:2){
  for(j in 1:4){
    for (y in 1:2){
      S[t]=S1[i]*S2[j]*S3[y]*0.000787
      t=t+1
    }
  }
}

##Data frame contenant tous les paramètres associés à chaque classe de
risque

Portfolio=data.frame(Class = seq(1,16,1),
                     Lambda =P,
                     alpha=0.55,
                     beta=S,
                     Franchise=c
                     (150,150,250,250,200,200,200,200,300,300,300,300,100,100,100,100))

```

A.1.3 Discrétisation des sévérités

Pour discrétiser les sévérités dans le contexte de ce travail, le choix de la méthode s'est porté sur la méthode "unbiased". La fonction utilisée pour effectuer cette opération est "discretize" du package "actuar".

Les sévérités ont été discrétisées sur l'intervalle $[0, q]$, avec q qui le maximum des

quantiles à 99,9999 % des distributions de Gamma. Le pas de discrétisation est de 100.

```
####Discretisation des sévérités gamma pour l'aplication de panjer

# Discrétisation des sévérités
-----

qg=c()
##Calcul du quantile maximum sur les 16 classes pour générer la limite
de la table de discrétisation
for (i in 1:16){

  qg[i]=qgamma(0.99999999, shape=Portfolio[i,"alpha"],rate = Portfolio[i
,"beta"])
}

max(qg)
####Delta pour le pas de discrétisation
delta=100
a=0
q=max(qg)+delta

##Exemple de discrétisation avec un individu de la classe 1

Dis=discretize(pgamma(x, shape=Portfolio[1,"alpha"],rate = Portfolio[1,"
beta"]),
               method = "unbiased",lev=levgamma(shape=Portfolio[1,"alpha
"],rate = Portfolio[1,"beta"],x),
               from = a, to = q, step =delta)

####Distribution des coûts par classe de risque

Dis_G=as.data.frame(matrix(0,ncol=16,nrow=(length(seq(a,q,delta))))
rownames(Dis_G)=seq(a,q,delta)

for (i in 1:16){
  q1=qgamma(0.99999999,shape=Portfolio[i,"alpha"],rate = Portfolio[i,"
beta"])

  l=length(seq(a,q1,delta))
  Dis_G[c(1:l),i]=discretize(pgamma(x, shape=Portfolio[i,"alpha"],rate =
Portfolio[i,"beta"]),
                             method = "unbiased",lev=levgamma(shape=
Portfolio[i,"alpha"],rate = Portfolio[i,"beta"],x),
                             from = a, to = q1, step = delta)}
```

A.1.4 Représentation de la distribution des fréquences et la fonction de répartition des sévérités de quelques classes de risques

Représentation de la fonction de densité de N_j et de la fonction de répartition de $C_{j,k}$.

```
###Distribution des fréquences

par(mfrow=c(1,1),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,mar = c(2, 5, 1, 5))

u=seq(0,5,1)

Rep_class=c(1,7,15)
linet=c(2,3,4,5,6,7)

cols=c("darkred","blue","yellow","green","purple")

plot(u,dpois(u,Portfolio[1,"Lambda"]),type="b",lty=2,xlab="k",
     ylab=list(TeX('$\\P[N_j=k]$')),col="darkblue")
leg=c("Classe 1")
for (i in 2:length(Rep_class)){
  j=Rep_class[i]
  lines(u,dpois(u,Portfolio[j,"Lambda"]),type="b",lty=2,col=cols[i])
  leg[i]=paste0("Classe ",j)
}

legend("topright",inset=0.02,cex=1,legend=leg,
      col=c("darkblue",cols[2:length(Rep_class)]),lty=c(1,4),box.lty=0)

###Distribution des sévérités

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,mar = c(2, 5, 1, 5))

for (i in 1:length(Rep_class)){
  j=Rep_class[i]

x <- seq(0, q, delta)
curve(pgamma(x, shape=Portfolio[j,"alpha"],rate = Portfolio[j,"beta"]),
      lwd=2.5 ,xlim = c(0, q),main=paste0("Classe ",j),xlab="x",ylab=list(
      TeX('$F_{C_{ij}}(x)$')),col="red")
plot(stepfun(x, diffinv(Dis_G[,j])), pch = 10, add = TRUE,col="black")
legend("bottomright",inset=0.02,cex=1,legend=c("Exacte","Discrète"),
      col=c("red","black"),lty=c(1,1),box.lty=0)
}
```

A.1.5 Distribution de $\bar{C}_{j,k}$, Y_{ij} et X_{ij}

Pour déterminer la distribution de ces trois variables aléatoires, des fonctions ont été créées dont l'un des paramètres principaux est la classe de risque. Pour les variables Y_{ij} et

X_{ij} , la fonction *aggregateDist* a été utilisée pour déterminer la distribution de ces variables en appliquant l'algorithme de Panjer.

Pour la suite, la fonction *DiscreteDistribution* est utilisée afin de convertir principalement les résultats de la fonction *aggregateDist* en un objet reconnu par ce package et de reconstruire ainsi la distribution complète de la variable aléatoire. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir facilement la densité, la fonction de répartition ainsi que la fonction quantile. Les moments d'ordre 1 et 2 sont également plus faciles à obtenir avec cette approche.

Dans la suite, les deux fonctions précitées seront utilisées pour déterminer les distributions de toutes les variables aléatoires.

```

FC=function(Ri){
  #Ri: Classe de risque j
  sup=as.numeric(row.names(Dis_G))
  FC=DiscreteDistribution(supp=sup,prob=Dis_G[,Ri])
  return(FC)
}

###Fonction de calcul pour générer la fonction de répartition des sévé
rités avec la franchise par classe de risque
FC2=function(Ri,di){
  #Ri: Classe de risque j
  #di: Montant de la franchise appliquée
  sup=as.numeric(row.names(Dis_G))
  probM<-p(FC(Ri))(sup+di)
  pM0<-p(FC(Ri))(0+di)
  prob=c(pM0,diff(probM))
  FC2=DiscreteDistribution(supp=sup,prob=prob)
  return(FC2)
}

##Distribution des coûts individuels (Y et X)

FX<-function(Ri,deductible){
  #Ri : classe de risque j
  #deductible : Préciser si la fonction de répartition est calculé avant
  application de la franchise ou après
  #Récupérer les paramètres nécessaires dans la table Portfolio en
  fonction de Ri

  di=Portfolio[Ri,"Franchise"]
  sup=as.numeric(row.names(Dis_G))
  if (deductible==TRUE){
    probM<-p(FC(Ri))(sup+di)
    pM0<-p(FC(Ri))(di)}else{probM<-p(FC(Ri))(sup)
    pM0<-p(FC(Ri))(0)}

  prob=c(pM0,diff(probM))
  #Avec la masse de probabilité obtenu dans appliquer Panjer

```

```

FX=aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson", model.sev=prob,
                 lambda =Portfolio[Ri,"Lambda"],x.scale=delta)

FX=DiscreteDistribution(supp=knots(FX),prob=diff(FX))
return(FX)
}

```

A.1.6 Représentation des distributions de $\bar{C}_{j,k}$, Y_{ij} et X_{ij}

Représentation de la distribution des variables $\bar{C}_{j,k}$, Y_{ij} et X_{ij} .

```

##Distribution des sévérités après application de la franchise et des co
  ûts individuels

FC1=FC2(Ri=1,di=Portfolio[1,"Franchise"])
FX1=FX(Ri=1,deductible=F)
FX2=FX(Ri=1,deductible=T)

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
     cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,col="black")

u1=seq(0,distr::q(FC1)(0.9999999),delta)

plot(u1,p(FC1)(u1),main=list(TeX('Distribution de  $\bar{C}_{ij}$ ')),
     xlab="x",
     sub="",ylab=list(TeX('$F_{\bar{C}_{ij}}(x)$')),xlim=c(0,q(FC1)
(0.9999999)),type="l")

u2=seq(0,q(FX1)(0.9999999),delta)
plot(u2,p(FX1)(u2),main=list(TeX('Distribution de  $Y_{ij}$ ')),sub="",
     xlab="x",
     ylab=list(TeX('$F_{Y_{ij}}(x)$')),xlim=c(0,q(FX1)(0.9999999)),type
="l")

u3=seq(0,q(FX2)(0.9999999),delta)
plot(u3,p(FX2)(u3),main=list(TeX('Distribution de  $X_{ij}$ ')),sub="",
     xlab="x",
     ylab=list(TeX('$F_{X_{ij}}(x)$')),xlim=c(0,q(FX2)(0.9999999)),type
="l")
rm(u1,u2,u3)

```

A.1.7 Distribution de S_i

Cette partie permet de déterminer la distribution de S_i grâce à la fonction *Group* qui permet de déterminer les paramètres λ_i et F_{C_i} de la loi de Poisson composé. Après avoir déterminé ces paramètres, la distribution est calculée en appliquant l'algorithme de Panjer.

```

##Distribution des coûts dans le groupe (Si)

```

```

####Fonction de calcul de la masse de probabilité des sévérités d'une
      classe de risque avec franchise

FG2=function(Ri,di){
  #Ri: Classe de risque j
  #di: Montant de la franchise appliquée

  probM<-p(FC(Ri))(sup+di)
  pM0<-p(FC(Ri))(0+di)
  prob=c(pM0,diff(probM))
  return(prob)
}

####Fonction de calcul de la distribution d'un groupe Si en fonction des
      caractéristiques de ses membres
sup=as.numeric(row.names(Dis_G))
Group=function(d_sum,Carac,nb_m){
  ##Carac : vecteur de classe de risque des membres du
  #nb_m: Vecteur qui contient le nombre de personnes d'une classe de
  risque
  #d_sum: Indique si la franchise est mis en commun (True) au sein du
  groupe ou si elle est individuelle (False)
  #retourne la fonction de répartition de Si, le lambda du groupe et la
  masse de probabilité
  l=length(Carac)

  group_m=dplyr::filter(Portfolio,Class%in%Carac)#Récupérer les paramè
  tres des membres du groupe

  lam_G=sum(group_m[["Lambda"]]*nb_m) #Calul du lambda du groupe

  group_d=sum(group_m[, "Franchise"]) #Somme des franchie pour le cas où
  la franchise sera mis en commun

  if (d_sum==TRUE){
    D=rep(group_d,l)}else{D=group_m[["Franchise"]]}

  ##Générer la masse de probabilité de chaque membres suivant le type de
  franchise
  A=as.matrix(mapply(FG2,Carac,D))
  N=group_m[["Lambda"]]*nb_m

  ##Masse de probabilité pour le groupe
  repart=(1/lam_G)*rowSums(A*%N)

  #Panjer
  FXG=aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson", model.sev=
  repart,
                    lambda=lam_G,x.scale=delta,maxit=10000,echo = T)

```

```

FXG=DiscreteDistribution(supp=knots(FXG),prob=diff(FXG))

return(list(Lam=lam_G,prob=repart,FSi=FXG))
}

```

A.1.8 Représentation de la distribution de S_i

Représentation de la distribution des variables S_i .

```

#Les groupes exemples
group_list=list(G1=c(9,14,13),G2=c(1,3,4,5),G3=c(7,8,15))
nb_classe=list(G1=c(2,1,1),G2=c(1,1,1,1),G3=c(1,1,1))

##Calcul des fonctions de répartition pour chaque groupe et en fonction
  du type de la franchise
FSI1T=Group(group_list$G1,d_sum=T,nb_classe$G1)$FSi
FSI1F=Group(group_list$G1,d_sum=F,nb_classe$G1)$FSi
FSI2T=Group(group_list$G2,d_sum=T,nb_classe$G2)$FSi
FSI2F=Group(group_list$G2,d_sum=F,nb_classe$G2)$FSi
FSI3T=Group(group_list$G3,d_sum=T,nb_classe$G3)$FSi
FSI3F=Group(group_list$G3,d_sum=F,nb_classe$G3)$FSi

##Distribution des coûts des groupes

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,col="black")

u11=seq(0,distr::q((Group(group_list$G1,d_sum=T,nb_classe$G1)$FSi))
        (0.99999999),delta)
u12=seq(0,distr::q((Group(group_list$G1,d_sum=F,nb_classe$G1)$FSi))
        (0.99999999),delta)

plot(u11,p((Group(group_list$G1,d_sum=T,nb_classe$G1)$FSi))(u11),main="
  Groupe 1",xlab="x",
      sub="",ylab=list(TeX('$F_{S_{i}}(x)$'),xlim=c(0,q((Group(group_
        list$G1,d_sum=T,nb_classe$G1)$FSi))(0.99999999)),type="l")
lines(u12,p((Group(group_list$G1,d_sum=F,nb_classe$G1)$FSi))(u12),type="
  l",lty=2,col="red")
legend("bottomright",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("Franchise globale","
  Franchise individuelle"),
      col=c("black","red"),lty=c(1,4),box.lty=0)

u21=seq(0,distr::q((Group(group_list$G2,d_sum=T,nb_classe$G2)$FSi))
        (0.99999999),1)
u22=seq(0,distr::q((Group(group_list$G2,d_sum=F,nb_classe$G2)$FSi))
        (0.99999999),1)

plot(u21,p((Group(group_list$G2,d_sum=T,nb_classe$G2)$FSi))(u21),main="
  Groupe 2",xlab="x",

```

```

    sub="", ylab=list(TeX('$F_{S_{i}}(x)$')), xlim=c(0, q((Group(group_
    list$G2, d_sum=T, nb_classe$G2)$FSi))(0.99999999)), type="l")
lines(u22, p((Group(group_list$G2, d_sum=F, nb_classe$G2)$FSi))(u22), type="
l", lty=2, col="red")
legend("bottomright", inset=0.02, cex=0.9, legend=c("Franchise globale", "
Franchise individuelle"),
      col=c("black", "red"), lty=c(1, 4), box.lty=0)

u31=seq(0, distr::q((Group(group_list$G3, d_sum=T, nb_classe$G3)$FSi))
(0.99999999), 1)
u32=seq(0, distr::q((Group(group_list$G3, d_sum=F, nb_classe$G3)$FSi))
(0.99999999), 1)

plot(u31, p((Group(group_list$G3, d_sum=T, nb_classe$G3)$FSi))(u31), main="
Groupe 3", xlab="x",
      sub="", ylab=list(TeX('$F_{S_{i}}(x)$')), xlim=c(0, q((Group(group_
      list$G3, d_sum=T, nb_classe$G3)$FSi))(0.99999999)), type="l")
lines(u32, p((Group(group_list$G3, d_sum=F, nb_classe$G3)$FSi))(u32), type="
l", lty=2, col="red")
legend("bottomright", inset=0.02, cex=0.9, legend=c("Franchise globale", "
Franchise individuelle"),
      col=c("black", "red"), lty=c(1, 4), box.lty=0)

rm(u11, u12, u21, u22, u31, u32)

```

A.1.9 Détermination des paramètres de la loi de S et $S - S_i$

La fonction *ParamS* a été écrite pour déterminer les paramètres de la loi de Poisson composé des coûts S et $S - S_i$.

```

##Distribution du cout total S

n=10

##Calculé les paramètres de la loi de Poisson composé de S

ParamS=function(n, S_X, d_sum, G){

#n: nombre d'assurés dans toutes les classes de risque j
#S_X : Indique si les paramètres sont calculé pour le coût S ou le coût
S-Si
#d_sum: d_sum: Indique si la franchise est mis en commun (True) au sein
du groupe ou si elle est individuelle (False)
#G: si S_X est vrai , préciser le numéro du groupe Si
#Retourne les paramètres de la loi de S ou S-Si afin d'appliquer Panjer

##Récupérer les paramètres des 3 groupes
Carac1=group_list$G1

```

```

Carac2=group_list$G2
Carac3=group_list$G3
nb_m1=nb_classe$G1
nb_m2=nb_classe$G2
nb_m3=nb_classe$G3

FD1=Group(d_sum=d_sum, Carac1, nb_m1)
lam1=FD1$Lam
prob_G1=FD1$prob

FD2=Group(d_sum=d_sum, Carac2, nb_m2)
lam2=FD2$Lam
prob_G2=FD2$prob

FD3=Group(d_sum=d_sum, Carac3, nb_m3)
lam3=FD3$Lam
prob_G3=FD3$prob

#Calcul des paramètres pour S
Q=sum((Portfolio[,"Lambda"])*n)#lambda de S

rest=numeric(16)

Caracf=c(Carac1, Carac2, Carac3)
nbf=c(nb_m1, nb_m2, nb_m3)

rest=ifelse(Portfolio$Class%in%Caracf, n-nbf[match(Portfolio$Class,
  Caracf)], n)

D=Portfolio[["Franchise"]]
A=mapply(FG2, c(1:16), D)

RepartS=rowSums(A%*(Portfolio[["Lambda"]]*rest))+lam1*prob_G1+lam2*
  prob_G2+lam3*prob_G3 #Masse de probabilité de S

#Calcul des paramètres pour S-Si
if(S_X==TRUE){
Q=Q-get(paste0("lam", G))

RepartS=RepartS-get(paste0("lam", G))*get(paste0("prob_G", G))
}
RepartS=RepartS/Q
return(list(Ldot=Q, FG=RepartS))
}

```

A.1.10 Distribution de S et représentation de la distribution

La fonction FSn permet de calculer la distribution de S en récupérant les paramètres calculés de la fonction $ParamS$ présentée plus haut. Pour la représentation, on considère

que chaque classe de risques comportent 10 assurés, soit un portefeuille total de 160 assurés.

```
##Fonction de calcul de la fonction de répartition de S
FSn=function(n,d_sum){

FS=aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson",tol=0, model.sev =
  ParamS(n,S_X=F,d_sum)$FG ,
            lambda=ParamS(n,S_X=F,d_sum)$Ldot/2^2, convolve = 2,
            maxit=200000 ,x.scale=delta ,echo=TRUE)

FS=DiscreteDistribution(supp=knots(FS),prob=diff(FS))
return(FS)

}

FST=FSn(n,d_sum=T)
FSF=FSn(n,d_sum=F)

##Distribution du coût total
par(mfrow=c(1,2),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1)

u11=seq(0,distr::q(FSF)(0.99999999),delta)
u12=seq(0,distr::q(FST)(0.99999999),delta)

plot(u11,d(FSF)(u11),xlab="x",main="Masse de probabilité",
     sub="",ylab=list(TeX('$f_{S}(x)$')),xlim=c(0,q(FSF)(0.999)),type="l"
    )
lines(u12,d(FST)(u12),lty=4,col="red")
legend("bottomleft",inset=0.02,cex=0.6,legend=c("Franchise individuelle"
    ,"Franchise globale"),
     col=c("black","red"),lty=c(1,4),box.lty=0)

plot(u11,p(FSF)(u11),xlab="x",main="Fonction de répartition",
     sub="",ylab=list(TeX('$F_{S}(x)$')),xlim=c(0,q(FSF)(0.999)),type="l"
    )
lines(u12,p(FST)(u12),type="l",lty=4,col="red")
legend("topleft",inset=0.02,cex=0.6,legend=c("Franchise individuelle","
    Franchise globale"),
     col=c("black","red"),lty=c(1,4),box.lty=0)

rm(u11,u12)

##Value at risk 99,95%
VaR_S=distr::q(FST)(0.9995)
```

A.1.11 Distribution de $S - Si$

La fonction *FSX* permet de calculer la distribution de $S - Si$ en récupérant les paramètres calculés de la fonction *ParamS* présentée plus haut.

```
#####Fonction de calcul de la fonction de répartition de S-Si
FSX=function(n,d_sum,G){
  FSX=aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson",tol=0, model.sev
    =ParamS(n,S_X=T,d_sum,G)$FG ,
    lambda=ParamS(n,S_X=T,d_sum,G)$Ldot/2^2,convolve = 2,
    maxit=200000,x.scale=delta,echo=TRUE)
  FSX=DiscreteDistribution(supp=knots(FSX),prob=diff(FSX))
  return(FSX)
}

FSX1T=FSX(n,d_sum=T,G=1)
FSX1F=FSX(n,d_sum=F,G=1)

FSX2T=FSX(n,d_sum=T,G=2)
FSX2F=FSX(n,d_sum=F,G=2)

FSX3T=FSX(n,d_sum=T,G=3)
FSX3F=FSX(n,d_sum=F,G=3)

distr::q(FSX1F)(0.9995)
```

A.2 Calcul des contributions

A.2.1 Implémentation de la CMRS

La fonction *CMRS* permet d'appliquer la formule 2.2.10. Cette fonction permettra de calculer les contributions selon la "Conditional Mean Risk Sharing".

```
#Calcul de l'espérance conditionnelle de Si sachant S=s, (CMRS)
CMRS=function(s,FX,FS,FSX){
  #si E[Xi|S] est calculé
  #s: Valeur de S
  #FX: Fonction de répartition de X
  #FS : Fonction de répartition de S
  #FS_X:Fonction de répartition de S-Xi

  ifelse(s==0,{Expec=0},{
    sval <- seq(0, s, delta)
```

```

pS=d(FS)(s) #Pr[S=s]

px=d(FX)(sval) #Pr[Xi=k] k allant de 1 à s

psx=rev(d(FSX)(sval)) #Pr[S-Xi=s-k]

Expec=sum((sval*px*psx)/pS)})
return(Expec)
}

```

A.2.2 Approximation de la CMRS par la règle de régression linéaire

La fonction *CMRS* permet d'appliquer la formule 2.2.11. Cette fonction permettra de calculer les contributions selon la règle de régression linéaire .

```

###Approximation de la CMRS par La régression linéaire
Reg_lin=function(FX,FS,s){
  #s: Valeur de S
  #FX: Fonction de répartition de X
  #FS : Fonction de répartition de S
  #Calcul l'espérance avec la fonction E() et la variance avec sd()

  Expec=E(FX)+(distr::sd(FX)^2/distr::sd(FS)^2)*(s-E(FS))

  return(Expec*ifelse(s==0,0,1))
}

```

A.2.3 Calcul de contributions avec la CMRS

Cette partie permet de calculer les contributions grâce à la CMRS selon un nombre de 10 assurés. Et de représenter l'évolution des contributions des groupes étudiés selon s .

```

#Calcul l'espérance conditionnelle pour certaines valeurs s
qS=q(FST)(0.99999)
s=seq(100,qS,delta)
CM=as.data.frame(matrix(ncol=1,nrow=(length(s))))

# Définir une liste des ensembles de données ou des fonctions à utiliser
list_F<- list(
  set1 = list(FSI1T, FST, FSX1T),
  set2 = list(FSI1F, FSF, FSX1F),
  set3 = list(FSI2T, FST, FSX2T),
  set4 = list(FSI2F, FSF, FSX2F),
  set5 = list(FSI3T, FST, FSX3T),
  set6 = list(FSI3F, FSF, FSX3F)
)

```

```

)

# Itérer sur chaque ensemble de données ou fonction dans la liste
for (j in seq_along(list_F)) {
  for (i in 1:length(s)) {
    # Appliquer CMRS à chaque valeur de s pour l'ensemble actuel
    CM[i, j] <- CMRS(s = s[i], list_F[[j]][[1]], list_F[[j]][[2]], list_
      F[[j]][[3]])
  }
}

# Ajouter des noms de colonnes pour identifier les ensembles
colnames(CM) <- paste0("Set_", seq_along(list_F))

##Représentation

par(mfrow=c(1,3), family="sans", font.lab=2, font.axis=1, cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9, font.main=1, font.lab=1, font.axis=1, col="black")

plot(s, CM[,1], main="Groupe 1", xlab="s", sub="", ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')), type="l", col="blue")
lines(s, CM[,2], type="l", lty=2, col="red")
legend("topleft", inset=0.02, cex=0.9, legend=c("Franchise globale", "
Franchise individuelle"),
      col=c("blue", "red"), lty=c(1,4), box.lty=0)

plot(s, CM[,3], main="Groupe 2", xlab="s", sub="", ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')), type="l", col="blue")
lines(s, CM[,4], type="l", lty=2, col="red")
legend("topleft", inset=0.02, cex=0.9, legend=c("Franchise globale", "
Franchise individuelle"),
      col=c("blue", "red"), lty=c(1,4), box.lty=0)

plot(s, CM[,5], main="Groupe 3", xlab="s", sub="", ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')), type="l", col="blue")
lines(s, CM[,6], type="l", lty=2, col="red")
legend("topleft", inset=0.02, cex=0.9, legend=c("Franchise globale", "
Franchise individuelle"),
      col=c("blue", "red"), lty=c(1,4), box.lty=0)

```

A.2.4 Comparaison des résultats entre le CMRS et la règle de régression linéaire

Les contributions sont calculées avec la règle de régression linéaire et comparées aux résultats obtenus avec la CMRS pour un nombre de 10 assurés.

```

###Comparer les résultats de la régression linéaire à ceux de l'espé
  rance conditionnelle

```

```

RGL=as.data.frame(matrix(ncol=1,nrow=(length(s))))

for (j in seq_along(list_F)) {
  for (i in 1:length(s)) {
    # Appliquer la regression linéaire à chaque valeur de s pour l'
    ensemble actuel
    RGL[i, j] <- Reg_lin(s = s[i], FX=list_F[[j]][[1]], FS=list_F[[j]
]][[2]])
  }
}

#Ajouter des noms de colonnes pour identifier les ensembles
colnames(RGL) <- paste0("Set_", seq_along(list_F))

##Représentation pour les cas de franchise individuelle
par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,col="black")

plot(s,CM[,2],main="Groupe 1",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="red")
lines(s,RGL[,2],type="l",lty=2,col="darkred")
lines(s,d(FSF)(s)*(9.e4),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise
individuelle","Reg:Franchise individuelle",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("red","darkred","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

plot(s,CM[,4],main="Groupe 2",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="red")
lines(s,RGL[,4],type="l",lty=2,col="darkred")
lines(s,d(FSF)(s)*(1e5),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise
individuelle","Reg:Franchise individuelle",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("red","darkred","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

plot(s,CM[,6],main="Groupe 3",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="red")
lines(s,RGL[,6],type="l",lty=2,col="darkred")
lines(s,d(FSF)(s)*(2.5e4),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise
individuelle","Reg:Franchise individuelle",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("red","darkred","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

##Représentation pour les cas de franchise mise en commun

```

```

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1,col="black")

plot(s,CM[,1],main="Groupe 1",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="blue")
lines(s,RGL[,1],type="l",lty=1,col="darkblue")
lines(s,d(FST)(s)*(7.e4),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise globale",
    Reg:Franchise globale",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("blue","darkblue","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

plot(s,CM[,3],main="Groupe 2",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="blue")
lines(s,RGL[,3],type="l",lty=1,col="darkblue")

lines(s,d(FST)(s)*(6.e4),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise globale",
    Reg:Franchise globale",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("blue","darkblue","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

plot(s,CM[,5],main="Groupe 3",xlab="s",sub="",ylab=list(TeX('$E[S_{i}|S=
s]$')),type="l",col="blue")

lines(s,RGL[,5],type="l",lty=1,col="darkblue")
lines(s,d(FST)(s)*(2e4),type="l",xlab="x",col="black")

legend("topleft",inset=0.02,cex=0.9,legend=c("CMRS:Franchise globale",
    Reg:Franchise globale",TeX('$f_{S}(s)$')),
    col=c("blue","darkblue","black"),lty=c(1,4),box.lty=0)

```

A.2.5 Test du nombre d'assurés sur la CMRS

Cette partie permet de calculer la fonction de répartition de S et $S - S_i$ en fonction du nombre personnes par classe de risque (n) qui augmentent.

A.2.5.1 Calcul des distributions de S et $S - S_i$ en fonction du nombre d'assurés

```

#Calcul des contributions pour les différentes tranches

###Etude de l'influence du nombre d'assurés sur l'espérance
conditionnelle

n<-c(100,200,500,1000,1500)
F.SI=list(c(FSI1T,FSI1F),c(FSI2T,FSI2F),c(FSI3T,FSI3F))

```

```

F.S.n<-list()
F.SX.n<-list()

Quant_S.n<-rep(NA,length(n))

for(i in 1:length(n)){
  ##Calcul des fonctions de répartition de S et S-Si en fonction du nombre
  d'assurés dans toutes les classe de risque
  F.ST=FSn(n[i],d_sum=T)
  F.SF=FSn(n[i],d_sum=F)

  F.SX1T=FSX(n[i],d_sum=T,G=1)
  F.SX1F=FSX(n[i],d_sum=F,G=1)

  F.SX2T=FSX(n[i],d_sum=T,G=2)
  F.SX2F=FSX(n[i],d_sum=F,G=2)

  F.SX3T=FSX(n[i],d_sum=T,G=3)
  F.SX3F=FSX(n[i],d_sum=F,G=3)

  Quant_S.n[i]<-max(distr::q(F.ST)(0.99999999),distr::q(F.SF)
  (0.99999999))
  F.S.n[[length(F.S.n)+1]] <-c(F.ST,F.SF)
  F.SX.n[[length(F.SX.n)+1]]<-list(G1=c(F.SX1T,F.SX1F),G2=c(F.SX2T,F.
  SX2F),G3=c(F.SX3T,F.SX3F))
}
##Liste avec les fonction de répartition selon le nombre d'assurés par
classe
names(F.S.n)<-paste("N",as.character(n),sep="")
names(F.SX.n)<-paste("N",as.character(n),sep="")

```

A.2.5.2 Évaluation de la loi de probabilité des contributions calculées avec la CMRS

Pour toutes les fonctions de répartition obtenues à la section précédentes, on simule plusieurs valeurs de S et on calcule les contributions dans chaque cas. Ce calcul permet de déterminer la distribution de $\mathbf{E}[S_i|S]$.

```

##Déterminer la distribution des contributions calculés avec la CMRS
####Simulation des contributions sur la base des S [1] avec franchise
globale , [2] sans franchise globale

simulation=15000
Law.NT<-list()
Law.NF<-list()

```

```

##Avec les simulations de S calculés les contributions des groupes pour
  les cas de franchise globale et franchise individuelle
for(i in 1:length(n)){
  S<-r(F.S.n[[i]][[1]])(simulation)
  ESPT<-data.frame(s=S,Cont1T=rep(0,simulation),Cont2T=rep(0,simulation)
    ,Cont3T=rep(0,simulation))
  for(j in 1:length(S)){
    #conditionalmeanrisksharing
    ESPT$Cont1T[j]<-CMRS(s=S[j],FSI1T,F.S.n[[i]][[1]],F.SX.n[[i]]$G1
      [[1]])
    ESPT$Cont2T[j]<-CMRS(s=S[j],FSI2T,F.S.n[[i]][[1]],F.SX.n[[i]]$G2
      [[1]])
    ESPT$Cont3T[j]<-CMRS(s=S[j],FSI3T,F.S.n[[i]][[1]],F.SX.n[[i]]$G3
      [[1]])
  }
  rm(S)
  S<-r(F.S.n[[i]][[2]])(simulation)
  ESPF<-data.frame(s=S,Cont1F=rep(0,simulation),Cont2F=rep(0,simulation)
    ,Cont3F=rep(0,simulation))
  for(j in 1:length(S)){
    #conditionalmeanrisksharing
    ESPF$Cont1F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI1F,F.S.n[[i]][[2]],F.SX.n[[i]]$G1
      [[2]])
    ESPF$Cont2F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI2F,F.S.n[[i]][[2]],F.SX.n[[i]]$G2
      [[2]])
    ESPF$Cont3F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI3F,F.S.n[[i]][[2]],F.SX.n[[i]]$G3
      [[2]])
  }

  Law.NT[[length(Law.NT)+1]]<-ESPT
  Law.NF[[length(Law.NF)+1]]<-ESPF

  rm(S,ESPT,ESPF)
}

##Conserver ces distributions dans les listes selon le nombre d'assurés
  et le type de franchise.
names(Law.NF)<-paste("N",as.character(n),sep="")
names(Law.NT)<-paste("N",as.character(n),sep="")
save(Law.NT,file="CMRS_LawT.Rdata")
save(Law.NF,file="CMRS_LawF.Rdata")

load("CMRS_LawF.Rdata")
load("CMRS_LawT.Rdata")

```

A.2.5.3 Représentation de la distribution des contributions calculées avec la CMRS

Représentation de la distribution des $E[S_i|S]$ à travers des box plot.

```

##Représentation box plot de la distribution des contributions pour la
franchise individuelle
Box.plot<-list()
for(j in 2:ncol(Law.NT[[1]])){
  Bx.plt<-list()
  for(i in 1:length(Law.NT)){
    Bx.plt[[length(Bx.plt)+1]]<-Law.NT[[i]][[j]]
  }
  names(Bx.plt)<-as.character(n)
  Bx.plt.sim<-melt(do.call(rbind,Bx.plt))
  Box.plot[[length(Box.plot)+1]]<-Bx.plt.sim
}
names(Box.plot)<-colnames(Law.NT[[1]])[2:ncol(Law.NT[[1]])]

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1)

for(i in 1:length(Box.plot)){
  boxplot(value~Var1,Box.plot[[i]],xlab="",ylab="",
    main=paste0("Groupe ",i),
    outline=FALSE)
  abline(h=E(F.SI[[i]][[1]]),lwd=1,lty=4,col="red")
}

Box.plot<-list()
for(j in 2:ncol(Law.NF[[1]])){
  Bx.plt<-list()
  for(i in 1:length(Law.NF)){
    Bx.plt[[length(Bx.plt)+1]]<-Law.NF[[i]][[j]]
  }
  names(Bx.plt)<-as.character(n)
  Bx.plt.sim<-melt(do.call(rbind,Bx.plt))
  Box.plot[[length(Box.plot)+1]]<-Bx.plt.sim
}
names(Box.plot)<-colnames(Law.NF[[1]])[2:ncol(Law.NF[[1]])]

##Représentation box plot de la distribution des contributions pour la
franchise mise en commun
par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1)

for(i in 1:length(Box.plot)){
  boxplot(value~Var1,Box.plot[[i]],xlab="",ylab="",
    main=paste0("Groupe ",i),
    outline=FALSE)
  abline(h=E(F.SI[[i]][[2]]),lwd=1,lty=4,col="red")
}

```

A.2.6 Calcul des contributions des groupes

Dans ce bloc, il s'agit d'appliquer le modèle présenté pour déterminer la contribution de chaque groupe aux différentes tranches du coût total. Et enfin, calculer les participations bénéficiaires pour un portefeuille qui comprend 100 assurés par classe de risque.

```
##Détermination de la rétention annuelle w et calcul de la prime pour
  les différentes tranches

####Portefeuille de 100 personnes par classe, cas calcul w , franchise
  individuelle appliquée
##Coût du capital
coc=0.06
##P(S<=w)=a
a=0.9
#VaR 99.5%

VarS=distr::q(F.S.n$N100[[2]])(0.995)

##Détermination de la rétention annuelle
W<-distr::q(F.S.n$N100[[2]])(a)

##Contribution du groupe à la rétention W

wi1<-CMRS(s=W,FSI1F,F.S.n$N100[[2]],F.SX.n$N100$G1[[2]])
wi2<-CMRS(s=W,FSI2F,F.S.n$N100[[2]],F.SX.n$N100$G2[[2]])
wi3<-CMRS(s=W,FSI3F,F.S.n$N100[[2]],F.SX.n$N100$G3[[2]])

##Contribution des groupes à la tranche basse
Grp=data.frame(wi=c(wi1,wi2,wi3))
Grp$ESi=rep(0,nrow(Grp))
Grp$wiVar=rep(0,nrow(Grp))

##Calcul de le prime stop loss

##ValeursE[Xi|S=s] simulées précédemment
CMRS.layer<-Law.NF[["N100"]]

#Vecteur contenant les valeurs de min{S,W}
Charge.P2P<-CMRS.layer
Charge.P2P[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0
##Vecteur contenant les valeurs de la primeSL
PI.SL<-CMRS.layer
PI.SL[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

##Vecteur contenant les valeurs du cash-back
BI.n<-CMRS.layer
```

```

BI.n[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

for(i in 2:ncol(CMRS.layer)){
  #E[Si]
  Grp$ESi[i-1]=E(F.SI[[i-1]][[2]])

  #pi_P2P=min{CMRS,wi}
  Charge.P2P[,i]<-ifelse(
    test=CMRS.layer[,i]<Grp$wi[i-1],
    yes=CMRS.layer[,i],
    no=Grp$wi[i-1])

  #Calcul de (CMRS-wi)_+
  PI.SL[,i]<-ifelse(
    test=CMRS.layer[,i]-Grp$wi[i-1]>0,
    yes=CMRS.layer[,i]-Grp$wi[i-1],
    no=0
  )
  #Calcul de E[Si|S=VaR S à 99,5%]
  Grp$wiVar[i-1]=CMRS(VarS,F.SI[[i-1]][[2]],F.S.n$N100[[2]],F.SX.n$N100
    [[i-1]][[2]])

  #Cash-back
  BI.n[,i]<-ifelse(
    test=Grp$wi[i-1]-CMRS.layer[,i]>0,
    yes=Grp$wi[i-1]-CMRS.layer[,i],
    no=0
  )
}

##Calcul de la prime stop loss en appliquant la tarification selon le co
 ût du capital

Grp$prime.SL<-colMeans(PI.SL[,-1],na.rm=TRUE)+ coc*(Grp$wiVar-colMeans(
  PI.SL[,-1],na.rm=TRUE))
##Prime totale pi pour chaque groupe
Grp$Prime<-Grp$prime.SL+Grp$wi
##Cash back
Grp$Ex.Bi<-colMeans(BI.n[,-1],na.rm=TRUE)
Grp.table<-Grp[,-c(3)]
Grp.table=relocate(Grp.table,ESi,.after = Prime)

##Génère le code latex de la table
print( xtable(Grp.table,type="latex",digits=3))

```

A.2.7 Calcul des contributions individuelles

Pour le calcul de l'espérance conditionnelle $E[X_{i,j}|S]$, on a besoin de déterminer la fonction de répartition de $S - X_{i,j}$. Cela est fait au travers de la fonction *FSXI*.

A.2.7.1 Détermination de $S - X_{i,j}$

```

#Contribution individuelle

Indiv=data.frame(Groupe=c(rep(1,3),rep(2,4),rep(3,3)),
Class=c(group_list$G1,group_list$G2,group_list$G3))
Indiv$wi=rep(0,nrow(Indiv))
Indiv$ESi=rep(0,nrow(Indiv))

##Fonction pour calculé la fonction de répartition S-Xij
FSXI=function(Ri){

  FS=ParamS(100,S_X=F,d_sum=F)$FG
  Q=ParamS(100,S_X=F,d_sum=F)$Ldot

  lam=Portfolio[Ri,"Lambda"]
  d=Portfolio[Ri,"Franchise"]
  prob=FG2(Ri,d)

  Ldot=Q-lam
  repart=(FS*Q-lam*prob)/Ldot

  FSXI=aggregateDist("recursive", model.freq = "poisson",tol=0, model.
  sev =repart ,
                    lambda=Ldot/2^2,convolve = 2,maxit=200000,x.scale=
  delta,echo=TRUE)

  FSXI=DiscreteDistribution(supp=knots(FSXI),prob=diff(FSXI))
  return(FSXI)
}

##Création d'une liste contenant les fonction de répartition de Xij et S
-Xij
F.S.XI=list()
F.XI=list()
for (i in 1:nrow(Indiv)){
  A=FX(Indiv[i,"Class"],deductible = T)
  B=FSXI(Indiv[i,"Class"])
  ##Calcul de la contribution individuelle à la rétention
  Indiv$wi[i]=CMRS(W,A,F.S.n$N100[[2]],B)

  F.XI[[length(F.XI)+1]]<-A
  F.S.XI[[length(F.S.XI)+1]]<-B
}

```

```

##Simulation des contributions sur la base des S [1] avec franchise
  globale , [2] sans franchise globale
simulation=15000

##Déterminer la distribution des contributions E[Xij|S]

ESPF=as.data.frame(matrix(0,simulation,ncol=11))
Law.ind.NF<-list()
S<-r(F.S.n$N100[[1]])(simulation)
ESPF[,1]<-S
for(i in 1:nrow(Indiv)){
  for(j in 1:length(S)){
    #conditionalmeanrisksharing
    ESPF[,i+1][j]<-CMRS(s=S[j],F.XI[[i]],F.S.n$N100[[2]],F.S.XI[[i]])}}

Law.ind.NF<-ESPF
rm(S,ESPF)

```

A.2.7.2 Calcul de la contribution individuelle

Dans ce bloc, il s'agit d'appliquer le modèle présenté à section 2.4 pour déterminer la contribution des membres des groupes. Et enfin, calculer les participations bénéficiaires pour un portefeuille qui comprend 100 assurés par classe de risque.

```

#Contribution des membres du groupe à wi

##ValeursE[Xi|S=s] simulées précédemment
CMRS.layer<-Law.ind.NF

#Vecteur contenant les valeurs de min{S,W}
Charge.P2P<-CMRS.layer
Charge.P2P[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0
##Vecteur contenant les valeurs de la primeSL
PI.SL<-CMRS.layer
PI.SL[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

##Vecteur contenant les valeurs du cash-back
BI.n<-CMRS.layer
BI.n[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

for(i in 2:ncol(CMRS.layer)){
  #E[Xi]
  Indiv$ESi[i-1]=E(F.XI[[i-1]])

  #pij_P2P=min{CMRS,wij}
  Charge.P2P[,i]<-ifelse(
    test=CMRS.layer[,i]<Indiv$wi[i-1],

```

```

    yes=CMRS.layer[,i],
    no=Indiv$wi[i-1])

#Calcul de (CMRS-wij)_+
PI.SL[,i]<-ifelse(
  test=CMRS.layer[,i]-Indiv$wi[i-1]>0,
  yes=CMRS.layer[,i]-Indiv$wi[i-1],
  no=0
)
#Calcul de E[Xij|S=VaR S à 99,5%]
Indiv$wiVar[i-1]=CMRS(VarS,F.XI[[i-1]],F.S.n$N100[[2]],F.S.XI[[i-1]])

#Cash-back
BI.n[,i]<-ifelse(
  test=Indiv$wi[i-1]-CMRS.layer[,i]>0,
  yes=Indiv$wi[i-1]-CMRS.layer[,i],
  no=0
)
}

Indiv$prime.SL<-colMeans(PI.SL[,-1],na.rm=TRUE)+ coc*(Indiv$wiVar-
  colMeans(PI.SL[,-1],na.rm=TRUE))

Indiv$Prime<-Indiv$prime.SL+Indiv$wi
Indiv$Ex.Bi<-colMeans(BI.n[,-1],na.rm=TRUE)
Indiv.table<-Indiv[,-c(5)]
Indiv.table=relocate(Indiv.table,ESi,.after = Prime)
print( xtable(Indiv.table,type="latex",digits=3))

```

A.3 Impact sur les participations bénéficiaires

A.3.1 Impact du nombre d'assurés sur les participations bénéficiaires

Étude de la variabilité des participations en fonction du nombre d'assurés dans le portefeuille de l'assureur

```

###Etude de sensibilité du Cash back selon l'évolution du nombre de
  participant ou l'évolution de la rétention annuelle

# Liste pour stocker les résultats pour chaque valeur de n
results_list <- list()
n<-c(100,200,500,1000,1500)
# Boucle à travers différentes valeurs de n
for (i in 1:length(n)) {

```

```

# Mise à jour des données pour la valeur actuelle de n
VarS <- distr::q(F.S.n[[i]][[2]])(0.995)
W <- distr::q(F.S.n[[i]][[2]])(a)

# Contribution du groupe à la rétention W
wi1 <- CMRS(s = W, FSI1F, F.S.n[[i]][[2]], F.SX.n[[i]]$G1[[2]])
wi2 <- CMRS(s = W, FSI2F, F.S.n[[i]][[2]], F.SX.n[[i]]$G2[[2]])
wi3 <- CMRS(s = W, FSI3F, F.S.n[[i]][[2]], F.SX.n[[i]]$G3[[2]])

# Contribution du groupe
Grp <- data.frame(wi = c(wi1, wi2, wi3))
Grp$ESi <- rep(0, nrow(Grp))
Grp$wiVar <- rep(0, nrow(Grp))

# Calcul de le prime stop loss

# Valeurs E[Xi|S=s] simulées précédemment
CMRS.layer <- Law.NF[[i]] # Mettez à jour cette ligne en fonction de
  la valeur actuelle de N

# Vecteur contenant les valeurs de min{S,W}
Charge.P2P <- CMRS.layer
Charge.P2P[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0
# Vecteur contenant les valeurs de la primeSL
PI.SL <- CMRS.layer
PI.SL[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0
# Vecteur contenant les valeurs de la primeSL

# Vecteur contenant les valeurs du cash-back
BI.n <- CMRS.layer
BI.n[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0

for (j in 2:ncol(CMRS.layer)) {
  # E[Xi]
  Grp$ESi[j - 1] <- E(F.SI[[j - 1]][[2]])

  Charge.P2P[, j] <- ifelse(
    test = CMRS.layer[, j] < Grp$wi[j - 1],
    yes = CMRS.layer[, j],
    no = Grp$wi[j - 1]
  )

  PI.SL[, j] <- ifelse(
    test = CMRS.layer[, j] - Grp$wi[j - 1] > 0,
    yes = CMRS.layer[, j] - Grp$wi[j - 1],
    no = 0
  )

  Grp$wiVar[j - 1] = CMRS(VarS, F.SI[[j - 1]][[2]], F.S.n[[i]][[2]], F
.SX.n[[i]][[j - 1]][[2]])
  # Cash-back
  BI.n[, j] <- ifelse(
    test = Grp$wi[j - 1] - CMRS.layer[, j] > 0,

```

```

    yes = Grp$wi[j - 1] - CMRS.layer[, j],
    no = 0
  )
}

# Calcul de la moyenne des primes stop-loss
# z = colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE)
# Grp$prime.SL = colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE) + coc * (Grp$
  wiVar - colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE))
#
# # Calcul de la prime totale
# Grp$Prime <- Grp$prime.SL + Grp$wi
# # Calcul de la moyenne du cash-back
# Grp$Ex.Bi <- colMeans(BI.n[, -1], na.rm = TRUE)
#
# # Création de Grp.table
# Grp.table <- Grp[, -c(3)]
# Grp.table <- relocate(Grp.table, ESi, .after = Prime)
#
# # Générer le script latex pour le tableau Grp.table
#

# Enregistrer les résultats dans la liste des résultats
results_list[[length(results_list)+1]] <- BI.n
}

names(results_list)=paste("N", as.character(n), sep="")

##Représentation
Box.plot<-list()
for(j in 2:ncol(results_list[[1]])){
  Bx.plt<-list()
  for(i in 1:length(results_list)){
    Bx.plt[[length(Bx.plt)+1]]<-results_list[[i]][[j]]
  }
  names(Bx.plt)<-as.character(n)
  Bx.plt.sim<-melt(do.call(rbind,Bx.plt))
  Box.plot[[length(Box.plot)+1]]<-Bx.plt.sim
}
names(Box.plot)<-colnames(results_list[[1]][2:ncol(results_list[[1]])])

par(mfrow=c(1,3), family="sans", font.lab=2, font.axis=1, cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9, font.main=1, font.lab=1, font.axis=1)

for(i in 1:length(Box.plot)){
  boxplot(value~Var1, Box.plot[[i]], xlab="", ylab="",
    main=paste0("Groupe", i),
    outline=FALSE)
}

```

A.3.2 Impact de la rétention sur les participations bénéficiaires

Étude de la variabilité des participations en fonction de la rétention.

```

###Avec la variabilité de w

a_vec=c(0.75,0.8,0.85,0.9,0.95)

results_a <- list()

# Boucle à travers différentes valeurs de N
for (i in 1:length(a_vec)) {
  # Mise à jour des données pour la valeur actuelle de N
  VarS <- distr::q(F.S.n[[1]][[2]])(0.995)
  W <- distr::q(F.S.n[[1]][[2]])(a_vec[i])

  # Contribution du groupe à la rétention W
  wi1 <- CMRS(s = W, FSI1F, F.S.n[[1]][[2]], F.SX.n[[1]]$G1[[2]])
  wi2 <- CMRS(s = W, FSI2F, F.S.n[[1]][[2]], F.SX.n[[1]]$G2[[2]])
  wi3 <- CMRS(s = W, FSI3F, F.S.n[[1]][[2]], F.SX.n[[1]]$G3[[2]])

  # Contribution du groupe
  Grp <- data.frame(wi = c(wi1, wi2, wi3))
  Grp$ESi <- rep(0, nrow(Grp))
  Grp$wiVar <- rep(0, nrow(Grp))

  # Calcul de le prime stop loss

  # Valeurs E[Xi|S=s] simulées précédemment
  CMRS.layer <- Law.NF[[1]] # Mettez à jour cette ligne en fonction de
  la valeur actuelle de N

  # Vecteur contenant les valeurs de min{S,W}
  Charge.P2P <- CMRS.layer
  Charge.P2P[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0
  # Vecteur contenant les valeurs de la primeSL
  PI.SL <- CMRS.layer
  PI.SL[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0

  # Vecteur contenant les valeurs du cash-back
  BI.n <- CMRS.layer
  BI.n[1:nrow(CMRS.layer), 2:ncol(CMRS.layer)] <- 0

  for (j in 2:ncol(CMRS.layer)) {
    # E[Xi]
    Grp$ESi[j - 1] <- E(F.SI[[j - 1]][[2]])

    Charge.P2P[, j] <- ifelse(
      test = CMRS.layer[, j] < Grp$wi[j - 1],
      yes = CMRS.layer[, j],
      no = Grp$wi[j - 1]
    )
  }
}

```

```

PI.SL[, j] <- ifelse(
  test = CMRS.layer[, j] - Grp$wi[j - 1] > 0,
  yes = CMRS.layer[, j] - Grp$wi[j - 1],
  no = 0
)

Grp$wiVar[j - 1] = CMRS(VarS, F.SI[[j - 1]][[2]], F.S.n[[1]][[2]], F
.SX.n[[1]][[j - 1]][[2]])
# Cash-back
BI.n[, j] <- ifelse(
  test = Grp$wi[j - 1] - CMRS.layer[, j] > 0,
  yes = Grp$wi[j - 1] - CMRS.layer[, j],
  no = 0
)
}

# Calcul de la moyenne des primes stop-loss
# z = colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE)
# Grp$prime.SL = colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE) + coc * (Grp$
wiVar - colMeans(PI.SL[, -1], na.rm = TRUE))
#
# # Calcul de la prime totale
# Grp$Prime <- Grp$prime.SL + Grp$wi
# # Calcul de la moyenne du cash-back
# Grp$Ex.Bi <- colMeans(BI.n[, -1], na.rm = TRUE)
#
# # Création de Grp.table
# Grp.table <- Grp[, -c(3)]
# Grp.table <- relocate(Grp.table, ESi, .after = Prime)
#
# # Générer le script latex pour le tableau Grp.table
#

# Enregistrer les résultats dans la liste des résultats
results_a[[length(results_a)+1]] <- BI.n
}

names(results_a) = paste(as.character(a_vec), sep = "")

#Représentation

Box.plot <- list()
for(j in 2:ncol(results_a[[1]])){
  Bx.plt <- list()
  for(i in 1:length(results_a)){
    Bx.plt[[length(Bx.plt)+1]] <- results_a[[i]][[j]]
  }
  names(Bx.plt) <- as.character(a_vec)
  Bx.plt.sim <- melt(do.call(rbind, Bx.plt))
  Box.plot[[length(Box.plot)+1]] <- Bx.plt.sim
}

```

```
names(Box.plot) <- colnames(results_a[[1]])[2:ncol(results_a[[1]])]

par(mfrow=c(1,3), family="sans", font.lab=2, font.axis=1, cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9, font.main=1, font.lab=1, font.axis=1)

for(i in 1:length(Box.plot)){
  boxplot(value~Var1, Box.plot[[i]], xlab="", ylab="",
    main=paste0("Groupe", i),
    outline=FALSE)
}
```

A.3.3 Impact de la taille du groupe sur les participations bénéficiaires

Étude de la variabilité des participations bénéficiaires en fonction de l'augmentation de la taille d'un groupe.

```
results_S2=list()
results_S2w=list()
n_i=c(1:10)
for (i in 1:length(n_i)){
  ##Calcul des fonctions de répartition pour chaque groupe et en fonction
  du type de la franchise
  nb_classe=list(G1=c(2,1,1), G2=c(1,1,1,1), G3=c(1,1,1))
  nb_classe$G2=nb_classe$G2*i

  FSI2F=Group(group_list$G2, d_sum=F, nb_classe$G2)$FSi

  F.SI2=c(FSI1F, FSI2F, FSI3F)

  n=100
  FSF=FSn(n, d_sum=F)

  #####Fonction de calcul de la fonction de répartition de S-Si

  FSX1F=FSX(n, d_sum=F, G=1)

  FSX2F=FSX(n, d_sum=F, G=2)

  FSX3F=FSX(n, d_sum=F, G=3)

  F.SX2=c(FSX1F, FSX2F, FSX3F)
  #Calcul des contributions pour les différentes tranches
```

```

simulation=15000
Law.NFS<-list()

##Avec les simulations de S calculés les contributions des groupes pour
  les cas de franchise globale et franchise individuelle

S<-r(FSF)(simulation)
ESPF<-data.frame(s=S,Cont1F=rep(0,simulation),Cont2F=rep(0,simulation)
,Cont3F=rep(0,simulation))
for(j in 1:length(S)){
  #conditionalmeanrisksharing
  ESPF$Cont1F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI1F,FSF,F.SX2[[1]])
  ESPF$Cont2F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI2F,FSF,F.SX2[[2]])
  ESPF$Cont3F[j]<-CMRS(s=S[j],FSI3F,FSF,F.SX2[[3]])
}

Law.NFS=ESPF

rm(S,ESPF)

##Conserver ces distributions dans les listes selon le nombre d'assurés
  et le type de franchise.

####Portefeuille de 100 personnes par classe, cas calcul w , franchise
  individuelle appliquée
##Coût du capital
coc=0.06
##P(S<=w)=a
a=0.9
#VaR 99.5%

VarS=distr::q(FSF)(0.995)

##Détermination de la rétention annuelle
W<-distr::q(FSF)(a)

##Contribution du groupe à la rétention W

wi1<-CMRS(s=W,FSI1F,FSF,FSX1F)
wi2<-CMRS(s=W,FSI2F,FSF,FSX2F)
wi3<-CMRS(s=W,FSI3F,FSF,FSX3F)

##Contribution des groupes à la tranche basse
Grp=data.frame(wi=c(wi1,wi2,wi3))
Grp$ESi=rep(0,nrow(Grp))
Grp$wiVar=rep(0,nrow(Grp))

```

```

##Calcul de le prime stop loss

##ValeursE[Xi|S=s] simulées précédemment
CMRS.layer<-Law.NFS

#Vecteur contenant les valeurs de min{S,W}
Charge.P2P<-CMRS.layer
Charge.P2P[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0
##Vecteur contenant les valeurs de la primeSL
PI.SL<-CMRS.layer
PI.SL[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

##Vecteur contenant les valeurs du cash-back
BI.n<-CMRS.layer
BI.n[1:nrow(CMRS.layer),2:ncol(CMRS.layer)]<-0

for(i in 2:ncol(CMRS.layer)){
  #E[Si]
  Grp$ESi[i-1]=E(F.SI2[[i-1]])

  #pi_P2P=min{CMRS,wi}
  Charge.P2P[,i]<-ifelse(
    test=CMRS.layer[,i]<Grp$wi[i-1],
    yes=CMRS.layer[,i],
    no=Grp$wi[i-1])

  #Calcul de (CMRS-wi)_+
  PI.SL[,i]<-ifelse(
    test=CMRS.layer[,i]-Grp$wi[i-1]>0,
    yes=CMRS.layer[,i]-Grp$wi[i-1],
    no=0
  )
  #Calcul de E[Si|S=VaR S à 99,5%]
  Grp$wiVar[i-1]=CMRS(VarS,F.SI2[[i-1]],FSF,F.SX2[[i-1]])

  #Cash-back
  BI.n[,i]<-ifelse(
    test=Grp$wi[i-1]-CMRS.layer[,i]>0,
    yes=Grp$wi[i-1]-CMRS.layer[,i],
    no=0
  )
}

##Calcul de la prime stop loss en appliquant la tarification selon le co
ût du capital

Grp$prime.SL<-colMeans(PI.SL[,-1],na.rm=TRUE)+ coc*(Grp$wiVar-colMeans(
  PI.SL[,-1],na.rm=TRUE))
##Prime totale pi pour chaque groupe

```

```

Grp$Prime<-Grp$prime.SL+Grp$wi
##Cash back
Grp$Ex.Bi<-colMeans(BI.n[, -1], na.rm=TRUE)
Grp.table <-Grp[, -c(3)]
Grp.table=relocate(Grp.table,ESi,.after = Prime)

##Génère le code latex de la table
#print( xtable(Grp.table,type="latex",digits=3))

results_S2[[length(results_S2)+1]]<- BI.n
results_S2w[[length(results_S2w)+1]]<- Charge.P2P
}

names(results_S2)=paste(as.character(n_i),sep="")
names(results_S2w)=paste(as.character(n_i),sep="")

#Représentation

Box.plot<-list()
for(j in 2:ncol(results_S2[[1]])){
  Bx.plt<-list()
  for(i in 1:length(results_S2)){
    Bx.plt[[length(Bx.plt)+1]]<-results_S2[[i]][[j]]
  }
  names(Bx.plt)<-as.character(n_i)
  Bx.plt.sim<-melt(do.call(rbind,Bx.plt))
  Box.plot[[length(Box.plot)+1]]<-Bx.plt.sim
}
names(Box.plot)<-colnames(results_S2[[1]][2:ncol(results_S2[[1]])])

par(mfrow=c(1,3),family="sans",font.lab=2,font.axis=1,cex.lab=0.9,
    cex.main=0.9,font.main=1,font.lab=1,font.axis=1)

for(i in 1:length(Box.plot)){
  boxplot(value~Var1,Box.plot[[i]],xlab="",ylab="",
    main=paste0("Groupe",i),
    outline=FALSE)}

```

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des Sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc