

Faculté des sciences

Technique de valorisation en assurance vie

Auteure : Mariette Gateka
Promoteur : Karim Barigou
Lecteur : Donatien Hainaut
Année académique 2025-2026

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la valorisation des produits d'assurance vie combinant des risques financiers et actuariels. La présence simultanée de ces deux sources de risque rend leur évaluation plus complexe. Contrairement aux produits purement financiers, une partie des risques présents dans ces contrats ne peut être entièrement couverte ou répliquée sur les marchés financiers. Le marché de l'assurance est donc incomplet et nécessite le développement de méthodes adaptées.

La valorisation des passifs requiert des approches capables de refléter à la fois les conditions observées sur les marchés financiers (*market-consistency*) et les caractéristiques spécifiques des risques d'assurance (*actuarial-consistency*). C'est dans cette optique que nous appliquons une méthode de valorisation en deux étapes (*hedge-based valuation*) puis en trois étapes (*three-step valuation*).

L'analyse porte sur des *equity-linked life insurance contracts*, dont les prestations dépendent de l'évolution d'un actif financier et de la survie de l'assuré. Une application numérique est réalisée afin d'illustrer la mise en œuvre de ces approches et de comparer leur traitement des différentes sources de risque présentes dans le passif.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'intérêt de méthodes adaptées aux marchés incomplets et soulignent l'importance d'une valorisation tenant compte à la fois des risques financiers et actuariels.

Mots-clés : produits hybrides, juste valorisation, valorisation en deux étapes, valorisation en trois étapes, risque financier, risque de mortalité, marchés incomplets, cohérence avec le marché, cohérence actuarielle.

Abstract

This thesis focuses on the valuation of life insurance products combining financial and actuarial risks. The simultaneous presence of these two sources of risk makes their valuation more complex. Unlike purely financial products, part of the risks embedded in these contracts cannot be fully replicated or hedged in financial markets. As a result, the insurance market is incomplete and requires the development of appropriate valuation.

The valuation of insurance liabilities requires approaches capable of reflecting both observed market conditions (*market-consistency*) and the specific characteristics of insurance risks (*actuarial-consistency*). We apply valuation methods developed for life insurance liabilities in incomplete markets : a *hedge-based valuation* approach and a *three-step valuation* method. These approaches are based on the idea that different sources of risk should be identified and treated according to their specific characteristics.

Particular attention is given to *equity-linked life insurance contracts*, whose benefits depend on both the performance of a financial asset and the survival of the insured. A numerical application is carried out to illustrate the implementation of these approaches and to compare their treatment of the different sources of risk.

The results highlight the relevance of valuation techniques adapted to incomplete markets and emphasize the importance of taking both financial and actuarial risks into account when valuing life insurance liabilities.

Keywords : hybrid products, hedge-based valuation, three-step valuation, fair valuation, incomplete markets, market-consistency, actuarial-consistency, financial risks, actuarial risks.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mon promoteur, le Professeur Karim Barigou, pour sa disponibilité, ses conseils avisés et la qualité de son encadrement tout au long de ce travail. Ses remarques et son accompagnement ont été d'une aide précieuse dans l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également l'ensemble du corps enseignant du Master en sciences actuarielles de l'UCLouvain pour la qualité de la formation dispensée au cours de ces années et pour les connaissances transmises, qui ont largement contribué à mon parcours académique.

J'adresse également mes remerciements à ma famille pour son soutien constant, sa confiance et ses encouragements.

Mes pensées vont aussi à mes amis pour leur soutien, leur bienveillance et les nombreux moments de partage qui ont accompagné ce parcours. Un remerciement particulier à Essehin Derre pour son aide précieuse et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Enfin, j'adresse toute ma gratitude à Dieu.

Table des matières

Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
1 Introduction et revue de la littérature	1
1.1 Introduction	1
1.2 Revue de la littérature	2
1.3 Solvency II	3
2 Méthodes de valorisation	5
2.1 Principes théoriques de la valorisation	5
2.1.1 Valorisation financière sous la mesure risque neutre . .	5
2.1.2 Valorisation actuarielle	7
2.1.3 Evaluation des produits hybrides	8
2.2 Market-consistent, actuarial-consistent et fair valuation . . .	8
2.3 Valorisation en deux étapes	10
2.3.1 Mean–variance hedge-based valuation	12
2.4 Valorisation en trois étapes	13
2.4.1 Cadre du modèle et hypothèses	13
2.4.2 Décomposition du payoff hybride	14
2.4.3 Valorisation additive : Three-step valuation	15
2.5 Comparaison des deux méthodes	18
3 Equity-linked life insurance contracts	20
3.1 Description générale	20
3.2 Guaranteed Minimum Maturity Benefit (GMMB)	21
3.3 Modélisation du risque de mortalité	21
3.3.1 Modèle de Lee-Carter	22
3.3.2 Modèle de Renshaw-Haberman	22
3.3.3 Projection de la mortalité	23
3.4 Modélisation de l’actif financier	24
3.4.1 Modèle de Black-Scholes	24
3.5 Données et estimation	25

3.5.1	Calibration des modèles de mortalité	25
3.5.2	Projection et simulation de la mortalité	28
3.5.3	Calibration et simulation du modèle Black-Scholes . .	30
4	Application des méthodes de valorisation	34
4.1	Best estimate du passif	35
4.2	Valorisation en deux étapes	35
4.3	Valorisation en trois étapes	37
4.4	Résultats et analyse de sensibilité	41
	Conclusion générale	45
	Bibliographie	46

Table des figures

3.1	Lee-Carter	25
3.2	Renshaw-Haberman	26
3.3	Heatmaps des résidus de déviance	27
3.4	Projection de l'indice de période κ_t	29
3.5	Projection de l'effet cohorte γ_{t-x}	29
3.6	Probabilités de survie projetées à partir du modèle Renshaw-Haberman , âge initial $x = 50$	30
3.7	Évolution historique de l'indice BEL20 sur la période 2000-2019.	31
3.8	Rendements logarithmiques journaliers du BEL20 sur la période 2000-2019.	31
3.9	Évolution simulée de S_t ($S_0 = 1$)	33
4.1	Sensibilité de la partie diversifiable $\pi_0^a(H_T^{(2)})$ au nombre d'assurés	42
4.2	Sensibilité des méthodes de valorisation à la maturité	43
4.3	Sensibilité des méthodes de valorisation à la volatilité	44

Liste des tableaux

3.1	Comparaison des critères AIC et BIC des modèles de mortalité.	27
3.2	Paramètres estimés du modèle de Black-Scholes	32
4.1	Comparaison des valeurs obtenues par les différentes méthodes de valorisation	41
4.2	Sensibilité de la méthode en trois étapes au nombre d'assurés	41
4.3	Sensibilité des méthodes de valorisation à la maturité	42
4.4	Sensibilité des méthodes de valorisation à la volatilité	43

Chapitre 1

Introduction et revue de la littérature

1.1 Introduction

La valorisation des passifs d'assurance vie représente un défi en raison de leur double exposition aux risques financiers et actuariels. Une estimation précise de ces passifs est essentielle non seulement pour établir une tarification adaptée et une gestion efficace des risques, mais également pour garantir la solvabilité des compagnies d'assurance sur le long terme.

En assurance, la valorisation actuarielle s'appuie traditionnellement sur le principe de diversification et sur la mutualisation des risques. Les passifs sont valorisés sous la mesure réelle $\mathbb{P}$ à laquelle s'ajoute une marge de sécurité destinée à couvrir l'incertitude résiduelle car ils comprennent des risques systématiques et non diversifiables tels que la mortalité et la longévité. En finance, les engagements sont valorisés sous une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ fondée sur le principe d'absence d'arbitrage. Dans un marché complet, comme celui du modèle de Black & Scholes, il existe une stratégie de couverture unique qui permet de répliquer parfaitement le passif.

Cependant, le marché de l'assurance est incomplet car les risques de mortalité et de longévité ne sont pas répliquables sur les marchés financiers. Cette incomplétude entraîne une multiplicité de mesures martingales équivalentes $\mathbb{Q}$ et l'absence d'une stratégie de couverture unique.

Cette distinction entre finance et assurance devient particulièrement problématique dans le contexte des produits d'assurance vie modernes comme les contrats en unités de compte qui exposent les assureurs à des risques à la fois financiers et actuariels.

Ces contrats d'assurance vie hybrides nécessitent donc des méthodes de valorisation adaptées. La notion de fair valuation répond à ce besoin en combinant la cohérence de marché (market-consistency) pour les composantes répliquables et la cohérence actuarielle (actuarial-consistency) pour les risques spécifiques non répliquables des produits d'assurance. Cette combinaison répond aux normes réglementaires actuelles de Solvabilité II et permet une valorisation plus réaliste qui prend en compte les conditions de marché ainsi que spécificités des contrats d'assurance.

Dans cette optique, plusieurs méthodes de valorisation ont été développées pour évaluer les passifs d'assurance vie hybrides. Ce mémoire s'appuie particulièrement sur la valorisation basée sur la couverture (hedge-based valuation) de Dhaene et al. (2017) qui divise les passifs en une partie répliquable, évaluée au prix de marché, et une partie non répliquable, évaluée selon des principes actuariels. Nous explorerons également la méthode en trois étapes de Deelstra et al. (2020) qui décompose le passif en trois parties : une partie financière répliquable, une partie actuarielle diversifiable et une partie résiduelle qui n'est ni répliquable ni diversifiable.

Ce travail aborde les différentes méthodes de valorisation en assurance vie et leur capacité à fournir une valorisation réaliste des passifs. L'objectif est d'évaluer dans quelle mesure ces approches parviennent à concilier les conditions de marché avec les risques spécifiques des produits d'assurance.

1.2 Revue de la littérature

La valorisation des passifs d'assurance a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature en particulier avec le développement des marchés financiers et les produits d'assurance moderne qui combinent risques financiers et actuariels. Ces recherches témoignent d'une transition progressive des modèles déterministes classiques vers des approches stochastiques hybrides plus réaliste.

Les premières contributions de valorisation hybride ont été proposées par Brennan & Schwartz (1976) qui considèrent les contrats d'assurance vie equity-linked avec garantie dans lesquels l'assuré reçoit, à l'échéance ou au décès, le maximum entre la valeur d'un fonds sous-jacent et un montant minimum garanti. Les auteurs montrent que le payoff de ces contrats peut être décomposé en un montant garanti et une option d'achat sur le fonds sous-jacent dont ils déterminent le prix à l'aide des modèles de Black-Scholes (1973) et Merton (1973) et en dérivent une stratégie d'investissement minimisant le risque pour l'assureur. La composante financière du contrat est ainsi évaluée sous une mesure risque-neutre tandis que la composante actuarielle est traitée sous la mesure réelle selon des méthodes actuarielles classiques, le risque de mortalité étant supposé diversifiable par la loi des grands nombres.

L'approche Brennan et Schwartz constitue une étape importante dans le développement des méthodes de valorisation market-consistent des produits d'assurance. Toutefois, elle repose sur des hypothèses restrictives notamment l'indépendance entre risques financiers et actuariels ou la parfaite mutualisation du risque de mortalité. Néanmoins, certains risques comme le risque de mortalité ou de longévité demeurent partiellement non diversifiables dans la pratique. Ces limites ont conduit au développement de méthodes plus générales spécifiquement adaptées aux marchés incomplets.

Pour répondre à ces limites, Møller (2002) s'intéresse notamment aux contrats d'assurance vie en unités de compte et montre que ces passifs ne peuvent être parfaitement couverts de sorte que la valorisation par absence d'arbitrage seule devient insuffisante et laisse subsister un risque résiduel pour l'assureur. Afin d'analyser ce risque, l'article compare plusieurs approches de valorisation et de couverture, notamment la super réplication, la risk-minimisation, la mean-variance hedging et l'indifference pricing.

Dans la continuité, Malamud et al. (2008) étendent la valorisation en marché incomplet à un cadre financier multipériodique. Les auteurs déterminent une prime d'assurance market-consistent fondée sur des arguments de tarification par indifférence basés sur l'utilité espérée. Ils montrent que ce cadre permet de déterminer simultanément les stratégies de couverture optimales et les primes d'assurance en présence de risques idiosyncratiques non couvrables.

Par la suite, Pelsser & Stadje (2014) proposent une méthode de valorisation en deux étapes fondée sur une approche conditionnelle pour l'évaluation des passifs hybrides. Le modèle conditionne d'abord le passif sur l'évolution des actifs financiers afin d'appliquer un principe de tarification actuariel standard au risque résiduel. Le résultat de cette évaluation est ensuite valorisé globalement en calculant son espérance sous une mesure neutre au risque.

Ces recherches ont mené au concept de « hedge-based valuation » (valorisation basée sur la couverture) développé par Dhaene et al. (2017) qui repose sur la construction d'une stratégie de couverture permettant de répliquer au mieux la partie hedgeable du passif à l'aide d'actifs financiers négociés sur le marché, tandis que la composante résiduelle non répliquable est évaluée selon des principes actuariels. Cette méthode permet ainsi d'obtenir une fair valuation à la fois market-consistent et actuarial-consistent.

Deelstra et al. (2020) ont affiné cette décomposition en proposant une méthode en trois étapes. Cette approche moderne décompose le flux financier en trois parts : une partie financière répliquable, une partie actuarielle diversifiable et une composante résiduelle qui n'est ni couvrable ni diversifiable. Cette méthodologie permet notamment de distinguer explicitement le risque de mortalité non systématique du risque systématique associé.

Plus récemment Barigou & Delong (2022) considèrent des contrats d'assurance-vie en unités de compte intégrant plusieurs facteurs de risque stochastiques tels que les taux d'intérêt, la volatilité et la mortalité. Les auteurs adoptent une approche en deux étapes, consistant à couvrir la partie couvrable du risque tout en introduisant une marge de risque pour la partie non couvrable. Ils montrent que la valorisation conduit à des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires dont la résolution nécessite des méthodes numériques avancées telles que les réseaux de neurones.

1.3 Solvency II

Solvency II a été mis en place pour renforcer la solidité financière des compagnies d'assurance en instaurant une gestion plus rigoureuse des risques. Il remplace Solvency I dont les règles fixes ne tenaient pas suffisamment compte du niveau réel de risque auquel les assureurs sont exposés.

Cette réglementation adopte une approche fondée sur le risque (risk-based) visant à établir une valorisation plus cohérente des engagements des compagnies d'assurance et repose sur 3 piliers fondamentaux :

- Le Pilier 1 concerne les exigences quantitatives en matière de capital et impose une valorisation des actifs et des passifs alignée sur les conditions de marché (market-

consistent)

- Le pilier 2 évoque les exigences qualitatives en termes de gouvernance, de gestion des risques et de supervision.
- Le pilier 3 renforce la transparence en imposant des obligations de reporting et de communication financière.

En Solvency II, la valorisation des passifs d'assurance est basé sur le principe de market-consistency. Lorsque les passifs sont répliquables, ils sont évalués au prix du marché. En revanche, pour les engagements non répliquables, Solvency II impose notamment l'utilisation d'une meilleure estimation (Best Estimate) et d'une marge de risque (Risk Margin) pour gérer les incertitudes.

Cette approche permet de garantir une évaluation précise et réaliste des passifs d'assurance car elle repose sur une estimation des flux futurs ajustée en fonction du risque propre aux produits d'assurance.

Chapitre 2

Méthodes de valorisation

2.1 Principes théoriques de la valorisation

Pour explorer plus en détail les modèles de valorisation des passifs d'assurance vie et en comprendre les bases théoriques, il est essentiel de s'intéresser aux concepts fondamentaux. On étudie ici les modèles de Dhaene et al. (2017) et Deelstra et al. (2020), qui proposent des approches permettant de structurer et valoriser les risques financiers et actuariels.

Nous travaillons dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, où Ω est l'ensemble des états possibles, $\mathcal{G}$ la σ -algèbre des événements pouvant survenir, et $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité réelle. Le modèle considéré est défini sur un horizon temporel $[0, T]$, où $t = 0$ est l'instant initial et T la maturité du contrat.

Pour mieux comprendre les approches de la valorisation financière sous mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ et de la valorisation actuarielle sous mesure réelle $\mathbb{P}$, il est important de définir le concept de valorisation.

Définition 2.1.1 (Valorisation). *Une valorisation est une application $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des variables aléatoires modélisant les engagements futurs. Elle associe une valeur réelle $\rho(S)$ à chaque $S \in \mathcal{C}$ et satisfait les propriétés suivantes :*

- *Normalisation* : $\rho(0) = 0$.
- *Invariance par translation* : $\rho(S + a) = \rho(S) + e^{-rT}a$, $\forall S \in \mathcal{C}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Une valorisation peut également se caractériser par les propriétés suivantes :

- Invariance selon la loi sous $\mathbb{P}$: $\rho(S_1) = \rho(S_2)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{C}$ tels que $S_1 \stackrel{\mathbb{P}}{=} S_2$.
- Homogénéité positive : $\rho(aS) = a\rho(S)$, $\forall S \in \mathcal{C}$ et $a > 0$.
- Sous-additivité : $\rho(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{C}$.

2.1.1 Valorisation financière sous la mesure risque neutre

Nous considérons un marché financier composé de $n + 1$ actifs : un actif sans risque et n actifs risqués. Le prix actuel ($t = 0$) de l'actif sans risque est noté $y^{(0)} = 1$ et son payoff à l'échéance T est donné par $Y^{(0)} = e^{rT}$, où r représente le taux d'intérêt sans risque. Les n actifs risqués ont chacun un prix actuel $y^{(m)} > 0$ pour $m = 1, \dots, n$ et un payoff à

l'échéance T , noté $Y^{(m)}$, qui est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

Les prix actuels et les payoffs de ces actifs sont représentés par les vecteurs :

$$\mathbf{y} = (y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = (Y^{(0)}, Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)}).$$

Soit $\boldsymbol{\theta} = (\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)})$ une stratégie d'investissement avec $\theta^{(m)}$ le nombre d'unités investies dans l'actif m au temps $t = 0$. Les valeurs de cette stratégie à l'instant initial et à l'échéance T sont respectivement :

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{y} = \sum_{m=0}^n \theta^{(m)} y^{(m)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Y} = \sum_{m=0}^n \theta^{(m)} Y^{(m)}.$$

Nous supposons que ce marché est *sans arbitrage*. Cela signifie qu'il n'existe pas de stratégie $\boldsymbol{\theta}$ telle que :

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Y} \geq 0) = 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{Y} > 0) > 0.$$

Autrement dit, il est impossible de réaliser un profit certain sans investissement initial ni risque de perte.

Dans un tel marché, il existe une *mesure martingale équivalente (MME)* $\mathbb{Q}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}[A] = 0 \iff \mathbb{Q}[A] = 0$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.
2. Sous $\mathbb{Q}$, le prix initial de chaque actif est donné par l'espérance de son payoff actualisé au taux sans risque r :

$$y^{(m)} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y^{(m)}], \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Définition 2.1.2. Un actif $S^h \in C$ est dit *réplicable* (hedgeable) s'il peut être parfaitement répliqué par une stratégie d'investissement $\nu = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)})$, où :

$$S^h = \nu \cdot \mathbf{Y} = \sum_{m=0}^n \nu^{(m)} Y^{(m)}.$$

Son prix initial à $t = 0$ est défini comme suit :

$$S_0 = \nu \cdot \mathbf{y} = \sum_{m=0}^n \nu^{(m)} y^{(m)} = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S^h],$$

où $\mathbb{Q}$ est une mesure martingale équivalente (MME).

D'après le principe de non-arbitrage, la valeur d'un actif réplicable peut être obtenue comme l'espérance actualisée de son payoff sous une mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$. L'ensemble des mesures martingales équivalentes est déterminé à partir des prix observés sur les marchés financiers. Lorsque le marché est complet, cette mesure $\mathbb{Q}$ est unique.

Les marchés d'assurance sont généralement incomplets car certains risques, comme la mortalité et la longévité, ne peuvent pas être entièrement répliqués sur les marchés financiers. Dans ce cas, il existe une infinité de mesures $\mathbb{Q}$. Cela oblige à adopter des méthodes adaptées aux risques actuariels pour évaluer ces passifs non répliquables.

2.1.2 Valorisation actuarielle

Dans les marchés incomplets où certains passifs ne sont pas répliquables, la valorisation actuarielle évalue les risques spécifiques des contrats d'assurance.

Définition 2.1.3. *Un passif orthogonal $S^\perp \in \mathcal{C}$ est un passif $\mathbb{P}$ -indépendant du vecteur des actifs négociés $(Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n)})$:*

$$S^\perp \perp (Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(n)}).$$

L'ensemble des passifs orthogonaux est noté $\mathcal{C}^\perp$. Ces passifs ne peuvent être couverts par des actifs financiers et nécessitent une valorisation spécifique adaptée aux risques assurantiels.

La valorisation actuarielle d'un passif $S^\perp$ est déterminée par la formule suivante :

$$\rho[S^\perp] = e^{-rT} \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp] + \text{RM}[S^\perp] \quad (2.1)$$

où $e^{-rT} \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp]$ représente la *Best Estimate* des flux futurs sous la mesure réelle $\mathbb{P}$ et $\text{RM}[S^\perp]$ est la marge de risque qui reflète les incertitudes des passifs non diversifiables.

Cette marge de risque ne dépend pas directement des prix des actifs financiers négociés sur le marché. Plusieurs approches peuvent être utilisées pour la déterminer selon la nature des risques et les hypothèses de valorisation. Parmi celles-ci, figurent le principe du *cost of capital* et le principe de l'écart-type.

Selon le principe du *cost of capital*, l'assureur doit détenir un capital supplémentaire afin de couvrir le risque que les pertes réelles soient supérieures à la Best Estimate. Ce capital est déterminé à partir d'une mesure de risque comme la Value-at-Risk et est donné par :

$$e^{-rT} (\text{VaR}_p[S^\perp] - \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp])$$

où $\text{VaR}_p[S^\perp]$ représente la Value-at-Risk du passif $S^\perp$ au niveau de confiance p .

La marge de risque correspond alors au coût associé à la détention de ce capital et peut être déterminée par

$$\text{RM}[S^\perp] = e^{-rT} i (\text{VaR}_p[S^\perp] - \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp])$$

pour un certain taux de coût du capital i .

Elle peut également être déterminée à l'aide du principe de l'écart-type :

$$\rho[S^\perp] = e^{-rT} (\mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp] + \alpha \sigma^\mathbb{P}[S^\perp])$$

avec $\alpha \geq 0$.

La valorisation actuarielle fournit une base solide pour l'évaluation des passifs liés aux risques spécifiques d'assurance. Cependant, elle montre ses limites lorsqu'il existe une dépendance entre les risques financiers et actuariels, comme c'est le cas pour les produits hybrides.

2.1.3 Evaluation des produits hybrides

Définition 2.1.4 (Hybrid Claim). *Un passif S est hybride s'il n'est ni totalement répliquable (hedgeable) ni orthogonal :*

$$S \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^h \cup \mathcal{C}^\perp)$$

Les produits hybrides en assurance vie combinent des éléments financiers tels que les performances des portefeuilles d'actifs et des risques actuariels comme la mortalité ou la longévité des assurés. Par exemple, dans les contrats unit-linked, les prestations dépendent de la performance des actifs financiers avec des garanties actuarielles comme en cas de décès. Cette combinaison rend les méthodes traditionnelles de valorisation peu adaptées car elles traitent séparément la partie financière et actuarielle sans tenir compte de leur éventuelle interdépendance.

Avec l'évolution des marchés, la titrisation des assurances (comme les CAT bonds ou les obligations de longévité) permet aujourd'hui de rendre certains risques actuariels (comme ceux liés aux catastrophes naturelles ou à la longévité) partiellement répliquables. Cela introduit également des caractéristiques hybrides dans les portefeuilles d'assurance.

Les approches financières et actuarielles de valorisation sont généralement séparées et inadaptées pour évaluer les produits hybrides. Une approche plus complète consiste à étendre :

- La valorisation financière vers une approche *market-consistent* où les parties répliquables des passifs sont valorisées selon les prix du marché.
- La valorisation actuarielle vers une approche *mark-to-model* où les risques non répliquables sont évalués selon des modèles actuariels adaptés.

L'objectif est de proposer une méthode combinant ces deux approches pour garantir une valorisation équilibrée des passifs hybrides. Cela conduit à la notion de *fair valuation* qui assure à la fois la cohérence avec le marché et la cohérence actuarielle.

Les méthodes modernes, comme la valorisation en deux étapes (hedge-based valuation) proposée par Dhaene et al. (2017) et la valorisation en trois étapes (three-step method) présentée par Deelstra et al. (2020) permettent de diviser ces engagements en différentes composantes et de les évaluer selon des principes financiers et actuariels. Les sections suivantes examineront en détail ces méthodologies afin de montrer leur efficacité dans la valorisation des passifs hybrides.

2.2 Market-consistent, actuarial-consistent et fair valuation

Dans le domaine de l'assurance, la valorisation des engagements constitue une étape cruciale pour garantir la transparence financière, la solvabilité et la conformité réglementaire. Aujourd'hui, les méthodes modernes ne se limitent plus à une vision purement financière ou actuarielle, mais cherchent à combiner les deux aspects. La *fair valuation* est une combinaison de ces deux approches : la cohérence avec le marché (*market-consistency*),

qui valorise les composantes répliquables en fonction des prix observés sur les marchés financiers, et la cohérence actuarielle (*actuarial-consistency*), qui s'appuie sur des modèles actuariels pour évaluer les composantes non répliquables. Comme le montrent Dhaene et al. (2017), cette méthode permet de traiter les passifs complexes, tels que les créances hybrides dans des marchés incomplets.

Définition 2.2.1 (Cohérence de Marché). *Une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite cohérente avec le marché (market-consistent valuation) si toute partie répliquable d'un passif est valorisée au prix de marché (marked-to-market) :*

$$\rho(S + \nu \cdot Y) = \rho(S) + \nu \cdot y, \quad \forall S \in \mathcal{C} \text{ et } \nu \cdot Y \in C_h. \quad (2.2)$$

Définition 2.2.2 (Cohérence Actuarielle). *Une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite actuarielle (actuarial consistent valuation) si toute partie orthogonale d'un passif est marked-to-model, c'est-à-dire valorisée selon un modèle actuariel :*

$$\rho(S^\perp) = \pi(S^\perp), \quad \forall S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \quad (2.3)$$

où $\pi(S^\perp)$ est une valorisation actuarielle définie par :

$$\pi(S^\perp) = e^{-rT} \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp] + RM(S^\perp).$$

Définition 2.2.3 (Fair Valuation). *Comme défini par Dhaene et al. (2017), une fair valuation est une valorisation qui est à la fois market-consistent et actuarial-consistent.*

Elle est particulièrement adaptée pour les passifs hybrides composés d'une partie répliquable et non répliquable.

Un passif hybride peut être exprimé comme la somme d'une partie répliquable et d'une partie orthogonale : $S = S^\perp + S^h$ avec $S^\perp \in \mathcal{C}^\perp$ et $S^h = \nu \cdot Y \in C_h$.

A partir des conditions (2.2) et (2.3), la fair valuation est alors donnée par :

$$\rho(S^\perp + \nu \cdot Y) = \pi(S^\perp) + \nu \cdot y \quad (2.4)$$

où $\nu \cdot y$ représente le prix de marché de la partie répliquable. La partie orthogonale quant à elle, est valorisée selon un modèle actuariel $\pi(S^\perp)$.

La fair valuation offre une méthode rigoureuse et flexible pour les passifs hybrides des contrats d'assurance. Elle concilie les prix du marché et les incertitudes actuarielles tout en répondant aux exigences des réglementations comme Solvabilité II.

Les notions de market-consistency et actuarial-consistency constituent une base théorique essentielle pour les développements ultérieurs des méthodes de valorisation modernes, telles que la valorisation en deux étapes (*hedge-based valuation*).

2.3 Valorisation en deux étapes

Une fois les valorisations market-consistent, actuarial-consistent et fair définies, Dhaene et al. (2017) introduisent les différentes catégories de stratégies de couverture (*hedgers*) correspondantes pour établir la définition de la valorisation basée sur la couverture (*hedge-based valuation*).

Définition 2.3.1 (Hedger). *Un hedger est une fonction $\theta : \mathcal{C} \rightarrow \Theta$ qui associe à chaque créance $S \in \mathcal{C}$ une stratégie de couverture $\theta_S = (\theta_S^{(0)}, \theta_S^{(1)}, \dots, \theta_S^{(n)})$ telle que :*

- θ est normalisé : $\theta_0 = (0, 0, \dots, 0)$.
- θ est invariant par translation : $\theta_{S+a} = \theta_S + (e^{-r}a, 0, \dots, 0)$, $\forall a > 0, \forall S \in \mathcal{C}$.

La stratégie de couverture θ_S appelée *couverture* de S peut être partielle ou totale.

Dhaene et al. (2017) distinguent différents types de stratégies de couverture : market-consistent, actuarial et fair.

Définition 2.3.2 (Market-Consistent, Actuarial et Fair Hedger).

1. Un Hedger θ est **market-consistent** si toute partie répliquable $\nu \cdot Y$ d'un passif est couverte par ν :

$$\theta_{S+\nu \cdot Y} = \theta_S + \nu, \quad \forall S \in \mathcal{C}, \nu \cdot Y \in \mathcal{C}^h. \quad (2.5)$$

2. Un Hedger θ est **actuarial-consistent** si toute partie orthogonale $S^\perp$ est couverte sans risque via une valorisation actuarielle ρ :

$$\theta_{S^\perp} = (\rho[S^\perp], 0, \dots, 0), \quad \forall S^\perp \in \mathcal{C}^\perp. \quad (2.6)$$

3. Un Hedger θ est **fair** si elle est market-consistent et actuarial-consistent.

Le lemme et le théorème suivants établissent les liens entre les stratégies de couverture et les méthodes de valorisation.

Lemme 1. *Considérons une couverture θ et une valorisation ρ . La couverture μ est définie par :*

$$\mu_S = \theta_S + (\rho[S - \theta_S \cdot Y], 0, \dots, 0), \quad \forall S \in \mathcal{C}. \quad (2.7)$$

1. Si θ est une couverture cohérente avec le marché, alors μ est également cohérente avec le marché.
2. Si θ est une couverture actuarielle et ρ une valorisation actuarielle, alors μ est une couverture actuarielle avec une valorisation actuarielle sous-jacente ρ .
3. Si θ est une juste couverture et ρ une valorisation actuarielle, alors μ est une juste couverture avec une valorisation actuarielle sous-jacente ρ .

Théorème 1. *Considérons une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$.*

- (a) ρ est une market-consistent valuation (valorisation cohérente avec le marché) si et seulement si il existe un market-consistent hedger θ^m tel que :

$$\rho[S] = \theta_S^m \cdot y, \quad \forall S \in \mathcal{C}. \quad (2.8)$$

(b) ρ est une valorisation actuarielle si et seulement si il existe un actuarial hedger θ^a tel que :

$$\rho[S] = \theta_S^a \cdot y, \quad \forall S \in \mathcal{C}. \quad (2.9)$$

(c) ρ est une juste valorisation (fair valuation) si et seulement si il existe un fair hedger θ^f tel que :

$$\rho[S] = \theta_S^f \cdot y, \quad \forall S \in \mathcal{C}. \quad (2.10)$$

La valorisation basée sur la couverture (*Hedge-based valuation*) divise le passif S en une partie répliquable qui reproduit partiellement le passif à l'aide d'une stratégie d'investissement et une partie non répliquable pour laquelle une valorisation actuarielle est appliquée.

Définition 2.3.3 (Hedge-based valuation). Une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite basée sur la couverture si, pour tout passif S , la valeur $\rho(S)$ est donnée par :

$$\rho[S] = \theta_S \cdot y + \pi[S - \theta_S \cdot Y], \quad (2.11)$$

où θ est un fair hedger et π une valorisation actuarielle.

Cette décomposition permet de distinguer la partie du passif pouvant être couverte par les actifs financiers de la composante résiduelle non répliquable valorisée selon une approche actuarielle. D'après cette définition :

- La valorisation basée sur la couverture pour un passif orthogonal $S^\perp$ correspond à la valorisation actuarielle :

$$\rho[S^\perp] = \pi[S^\perp], \quad \forall S^\perp \in \mathcal{C}^\perp.$$

- Pour un passif répliquable S^h , sa valeur est égale au prix de la couverture sous-jacente :

$$\rho[S^h] = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[S^h], \quad \forall S^h \in \mathcal{C}^h.$$

Le théorème suivant montre que cette classe de valorisations est équivalente à celle de la fair valuation.

Théorème 2. Une application $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une hedge-based Valuation si et seulement si c'est une Fair Valuation.

Démonstration. Considérons la valorisation basée sur la couverture ρ , définie en (2.11). Pour tout passif S , $\rho[S]$ peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \rho[S] &= \mu_S \cdot y, \\ \text{avec } \mu_S &= \theta_S + (\pi[S - \theta_S \cdot Y], 0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Selon le lemme 1, μ est un fair hedger avec une valorisation actuarielle π et le théorème 1 nous permet de conclure que ρ est une fair valuation.

Supposons aussi que ρ soit une fair valuation. Le théorème 1 montre qu'il existe un fair hedger θ^f tel que $\rho[S] = \theta_S^f \cdot y$ pour tout passif S . Définissons une valorisation ρ' telle que :

$$\rho'[S] = \theta_S^f \cdot y + \rho[S - \theta_S^f \cdot Y]. \quad (2.13)$$

ρ' est une valorisation basée sur la couverture avec $\rho[S - \theta_S^f \cdot Y] = 0$.

On en déduit que $\rho \equiv \rho'$ et donc ρ est également une hedge-based valuation.

2.3.1 Mean–variance hedge-based valuation

Dans le cadre des *hedge-based valuations*, Dhaene et al. (2017) introduisent une classe particulière de stratégies de couverture fondée sur un critère de minimisation de la variance appelée *mean-variance hedging*.

Dans les marchés incomplets, une réplication parfaite du passif n'est généralement pas possible. Cette approche consiste alors à déterminer le portefeuille de couverture qui approxime au mieux le passif en minimisant l'erreur quadratique entre le passif et le portefeuille de réplication.

Définition 2.3.4 (Mean–Variance Hedger). *Pour tout passif $S \in \mathcal{C}$, le mean–variance hedger $\theta_S^{MV} \in \Theta$ est défini comme la solution du problème d'optimisation suivant :*

$$\theta_S^{MV} = \arg \min_{\mu \in \Theta} \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[(S - \mu \cdot Y)^2 \right]. \quad (2.14)$$

Cette définition correspond à la recherche du portefeuille financier qui approxime au mieux le passif S au sens des moindres carrés. Comme le montrent Dhaene et al. (2017), ce problème admet une solution unique sous l'hypothèse de non-redondance du marché.

Théorème 3. *Le mean–variance hedger θ_S^{MV} est l'unique solution du système suivant :*

$$\mathbb{E}^\mathbb{P}[Y^\top Y] (\theta_S^{MV})^\top = \mathbb{E}^\mathbb{P}[SY^\top]. \quad (2.15)$$

La solution peut également être exprimée explicitement comme suit :

$$\theta_S^{MV} = \mathbb{E}^\mathbb{P}[SY^\top] \left(\mathbb{E}^\mathbb{P}[Y^\top Y] \right)^{-1}. \quad (2.16)$$

Le mean–variance hedger possède plusieurs propriétés importantes qui découlent directement de sa définition.

Théorème 4. *Le mean–variance hedger θ^{MV} satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Toute créance S et la valeur de son portefeuille de couverture ont la même espérance :*

$$\mathbb{E}^\mathbb{P}[S] = \mathbb{E}^\mathbb{P}[\theta_S^{MV} \cdot Y]. \quad (2.17)$$

2. *Additivité :*

$$\theta_{S_1+S_2}^{MV} = \theta_{S_1}^{MV} + \theta_{S_2}^{MV}, \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{C}. \quad (2.18)$$

3. *Homogénéité positive :*

$$\theta_{aS}^{MV} = a \theta_S^{MV}, \quad \forall a > 0. \quad (2.19)$$

4. *MV hedge d'un produit entre un passif hedgeable et un passif orthogonal :*

$$\theta_{S^h \times S^\perp}^{MV} = \nu \times \mathbb{E}^\mathbb{P}[S^\perp], \quad (2.20)$$

pour tout $S^h = \nu \cdot Y \in \mathcal{C}^h$ et tout $S^\perp \in \mathcal{C}^\perp$.

Sur base de cette stratégie de couverture, Dhaene et al. (2017) introduisent la valorisation mean–variance.

Définition 2.3.5 (*Mean-variance hedge-based Valuation*). Une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mean-variance hedge-based si, pour tout passif $S \in \mathcal{C}$, elle est donnée par :

$$\rho[S] = \theta_S^{MV} \cdot y + \pi[S - \theta_S^{MV} \cdot Y], \quad (2.21)$$

où θ^{MV} est le mean-variance hedger et π une valorisation actuarielle.

Cette valorisation s'inscrit dans le cadre général des hedge-based valuations. $\theta_S^{MV} \cdot Y$ correspond à la partie du passif qui peut être couverte par les actifs financiers et correspond à la composante répliquable du passif tandis que le terme $S - \theta_S^{MV} \cdot Y$ représente la composante non couverte évaluée selon des principes actuariels.

Cette valorisation est également une fair valuation.

2.4 Valorisation en trois étapes

La méthode en trois étapes proposée par Deelstra et al. (2020) constitue une autre approche pour la valorisation des produits hybrides d'assurance vie combinant à la fois des risques financiers et actuariels. Elle repose sur une décomposition du payoff en trois parties : une partie financière totalement répliquable, une partie diversifiable et une partie résiduelle ni répliquable ni diversifiable.

2.4.1 Cadre du modèle et hypothèses

Nous considérons une cohorte composée de $n \in \mathbb{N}$ assurés, chacun ayant une durée de vie restante $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Le risque de mortalité est constitué de deux parties : le risque de mortalité systématique lié à des facteurs de risque communs qui influencent l'espérance de vie de l'ensemble des assurés et le risque de mortalité non systématique qui correspond à des écarts aléatoires individuels par rapport à l'expérience de mortalité de la population.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on introduit une filtration $(\mathcal{G}_t)$ générée par les facteurs de risque de mortalité systématique. Pour chaque assuré j , on définit $\mathcal{I}_t^j := \sigma(\{\tau_j \leq u\}, u \leq t)$, représentant son historique de survie. Sous la mesure réelle $\mathbb{P}$, il est supposé que conditionnellement à $\mathcal{G}_T$, les durées de vie sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t, \dots, \tau_n > t \mid \mathcal{G}_T) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\tau_j > t \mid \mathcal{G}_T), \quad \forall t \in [0, T].$$

La filtration actuarielle est alors donnée par $\mathcal{F}_t^a := \mathcal{G}_t \vee \bigvee_{j=1}^n \mathcal{I}_t^j$, et la filtration financière est notée $\mathcal{F}_t^f$. L'information totale disponible au temps t est donc : $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^a \vee \mathcal{F}_t^f$.

Enfin, nous supposons une indépendance entre les risques actuariels et financiers sous $\mathbb{P}$, c'est-à-dire que l'espace probabilisé se décompose en un produit : $\Omega = \Omega^a \times \Omega^f$ muni de la mesure produit $\mathbb{P} = \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f$.

Considérons des fonctions $g_j(\tau_j) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $h_j(s) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, pour $j = 1, 2, \dots, n$. Les produits d'assurance-vie hybrides peuvent être représentés par le payoff suivant à l'échéance T :

$$H_T^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) \cdot h_j(S_T), \quad (2.22)$$

où S_T désigne la valeur à l'instant T d'un actif financier, $h_j(S_T)$ est $\mathcal{F}_T^f$ -mesurable et $g_j(\tau_j)$ est $\mathcal{F}_T^a$ -mesurable. L'ensemble des engagements définis par ce payoff est noté $\mathcal{H}_T$. On distingue notamment le sous-ensemble des engagements purement financiers, noté $\mathcal{H}_T^f$ obtenu en fixant $g_j(\tau_j) = 1$, pour $j = 1, 2, \dots, n$ ainsi que le sous-ensemble des engagements actuariels, noté $\mathcal{H}_T^a$, obtenu en fixant $h_j(S_T) = 1$, pour $j = 1, 2, \dots, n$.

L'objectif de cette méthode est de fournir une approche d'évaluation adaptée au produit hybride H_T^n (2.22) en tenant compte de la nature mixte des risques qu'il contient. Lorsqu'un contrat est purement financier, répliquable sur les marchés, il est d'usage d'appliquer une évaluation purement financière sans marge de risque supplémentaire conformément au principe de *market-consistency*. À l'inverse, les risques assurantiels doivent être évalués selon une logique actuarielle. Dans ce cas, l'opérateur d'évaluation doit inclure des marges appropriées pour refléter ce risque non répliquable mais mutualisable (*actuarial-consistency*). Nous supposons que tout opérateur d'évaluation est à la fois market-consistent et actuarial-consistent.

2.4.2 Décomposition du payoff hybride

Deelstra et al. (2020) proposent un opérateur d'évaluation comprenant les marges de risque liées aux différents risques du produit. L'opérateur d'évaluation décompose le payoff en trois parties : une partie financière répliquable, une partie actuarielle diversifiable ainsi qu'une partie résiduelle liée au risque non répliquable et non diversifiable, notamment le risque de mortalité systématique.

La première étape consiste à séparer la part du payoff associée au risque de mortalité comme suit :

$$g_j(\tau_j) = \underbrace{\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)]}_{\text{best-estimate}} + \underbrace{\left(g_j(\tau_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)]\right)}_{\text{unsystematic deviation}} + \underbrace{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)]\right)}_{\text{systematic deviation}}.$$

La structure proposée repose sur le modèle du risque de mortalité (non) systématique.

Cette décomposition en une valeur de best-estimate ainsi qu'en écarts systématiques et non systématiques permet alors de séparer H_T^n en trois parties :

$$\begin{aligned} H_T^n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) \cdot h_j(S_T) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)] \cdot h_j(S_T)}_{\text{Partie financière}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(g_j(\tau_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)]\right) \cdot h_j(S_T)}_{\text{Partie diversifiable}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f}[g_j(\tau_j)]\right) \cdot h_j(S_T)}_{\text{Partie non-diversifiable}} \\ &= H_T^{(1)} + H_T^{(2)} + H_T^{(3)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

- $H_T^{(1)}$ correspond à la partie purement financière qui ne dépend pas du risque de mortalité. Elle est entièrement couvrable sur les marchés financiers.

- $H_T^{(2)}$ correspond aux écarts non systémiques par rapport à l'expérience globale de mortalité $\mathcal{G}_T$. Cette partie est entièrement diversifiable sur les marchés d'assurance. En effet, conditionnellement à $\mathcal{G}_T$, les décès individuels sont indépendants, ce qui permet d'éliminer le terme $H_T^{(2)}$ en augmentant la taille n du portefeuille. Ce risque est donc qualifié de diversifiable.
- $H_T^{(3)}$ ne peut pas être éliminé. Il comprend le risque systématique de mortalité ainsi que le risque des marchés financiers, et ne peut ni être couvert sur les marchés financiers ni être diversifié par l'augmentation de la taille du portefeuille. Cette partie hybride disparaît lorsque les taux de mortalité sont déterministes, c'est-à-dire en l'absence de risque systématique de mortalité (théorème 5)

Dans la suite, nous nous concentrons sur des portefeuilles d'assurance homogènes. Les contrats satisfont alors l'hypothèse suivante :

(Hom) le portefeuille d'assurés est homogène, c'est-à-dire que l'âge initial et les préférences de risque sont identiques. Leurs durées de vie restantes sont distribuées de manière identique. De plus, $g_j(\tau_j) = g(\tau_j)$ et $h_j(S_T) = h(S_T)$ pour $j = 1, \dots, n$.

Théorème 5 (Risque de mortalité non systématique). *Considérons un portefeuille d'assurance satisfaisant l'hypothèse d'homogénéité. On a :*

- Lorsque $n \rightarrow +\infty$, la partie diversifiable $H_T^{(2)}$ du payoff H_T^n converge p.s vers 0, c'est-à-dire $H_T^{(2)} \rightarrow 0$ p.s. (pas de risque de mortalité non systématique).*
- Si les taux de mortalité sont déterministes (pas de risque de mortalité systématique), la dernière partie $H_T^{(3)}$ du payoff H_T^n est égale à 0 p.s .*

2.4.3 Valorisation additive : Three-step valuation

La méthode de valorisation en trois étapes consiste à appliquer un opérateur de valorisation spécifique à chacune des composantes issues de la décomposition du payoff hybride (2.23) :

$$\pi_0^{(3)}(H_T^n) := \pi_0^f(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0) + \pi_0^a(H_T^{(2)} \mid \mathcal{F}_0) + \pi_0^n(H_T^{(3)} \mid \mathcal{F}_0),$$

Cette méthode assure une évaluation cohérente du produit hybride en traitant chaque composante selon le type de risque qu'elle représente.

L'évaluation de la première composante repose sur l'application de l'opérateur financier au payoff $H_T^{(1)}$ (Deelstra et al., 2020, équation (2.3) :

$$\pi_0^f(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0) := \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[e^{-rT} H_T^{(1)} \right].$$

La deuxième partie du passif, $H_T^{(2)}$, correspond au risque actuariel diversifiable. Sa valorisation repose sur un principe actuariel appliqué conditionnellement aux facteurs systématiques de mortalité et à l'information financière. Cette valorisation repose sur l'hypothèse d'homogénéité du portefeuille qui suppose que les assurés présentent des caractéristiques similaires en termes d'âge, de profil de risque et de durée de couverture.

La méthode applique alors le principe de l'écart-type qui consiste à ajouter une marge de risque à l'espérance conditionnelle :

$$\pi_0^a \left(H_T^{(2)} \mid \mathcal{F}_0 \right) := e^{-rT} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \times \mathbb{P}^f}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left[H_T^{(2)} \right] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\text{Var}_{\mathcal{F}_0 \times \mathbb{P}^f}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left(H_T^{(2)} \right)} \right)$$

La valorisation de la partie résiduelle $H_T^{(3)}$ concerne les risques qui ne peuvent être ni couverts par les marchés financiers ni diversifiés au sein du portefeuille d'assurance. Contrairement à la composante financière $H_T^{(1)}$, ce risque ne peut pas être répliqué à l'aide d'actifs négociés sur le marché. De plus, contrairement à la composante actuarielle diversifiable $H_T^{(2)}$, ce risque ne disparaît pas lorsque la taille du portefeuille augmente. Il demeure donc dans le portefeuille de l'assureur et représente une exposition résiduelle principalement liée au risque systématique de mortalité.

Dans ce contexte, l'assureur doit intégrer une marge de sécurité suffisante pour couvrir cette exposition résiduelle. Deelstra et al. (2020) proposent alors d'utiliser un opérateur fondé sur la transformée d'Esscher. Cette approche permet d'introduire une prime de risque adaptée aux risques non répliquables et non diversifiables restant à la charge de l'assureur.

L'utilisation de la transformée d'Esscher est particulièrement intéressante dans le cadre actuariel car elle permet de construire une mesure de valorisation cohérente avec l'incomplétude du marché de l'assurance. En effet, contrairement aux marchés financiers complets où la mesure risque-neutre suffit pour valoriser les produits répliquables, la présence d'un risque systématique de mortalité nécessite l'introduction d'une mesure ajustée au risque.

Cette approche présente également un intérêt pratique important puisqu'elle peut être calibrée de manière cohérente avec l'approche du *Cost-of-Capital* utilisée sous *Solvency II*. Dans ce cadre réglementaire, les risques résiduels doivent être accompagnés d'une marge de risque destinée à couvrir le coût du capital immobilisé pour faire face aux pertes potentielles futures.

Deelstra et al. (2020) proposent d'appliquer la transformée d'Esscher aux facteurs de risque sous-jacents, à savoir le risque financier et le risque systématique de mortalité, pour obtenir une valorisation prudente de la composante résiduelle $H_T^{(3)}$.

La transformée d'Esscher permet alors de définir une nouvelle mesure équivalente

$$\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f \sim \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f,$$

permettant d'obtenir une valorisation prudente du passif.

Ainsi, la valorisation de $H_T^{(3)}$ s'écrit sous la forme :

$$\pi_0^n \left(H_T^{(3)} \mid \mathcal{F}_0 \right) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[H_T^{(3)} \right].$$

En remplaçant l'expression de $H_T^{(3)}$ donnée par la décomposition du passif hybride (2.23), nous obtenons :

$$\pi_0^n \left(H_T^{(3)} \mid \mathcal{F}_0 \right) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [g_j(\tau_j)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [g_j(\tau_j)] \right) \right] \times h_j(S_T) \right).$$

Sous l'hypothèse d'homogénéité :

$$\pi_0^n(H_T^{(3)} | \mathcal{F}_0) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} [h(S_T)] \times \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [g_j(\tau_j)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [g_j(\tau_j)] \right) \right] \right).$$

En combinant les trois opérateurs de valorisation, la prime selon la méthode en 3 étapes est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_0^{(3)}(H_T^n) &:= \pi_0^f(H_T^{(1)} | \mathcal{F}_0) + \pi_0^a(H_T^{(2)} | \mathcal{F}_0) + \pi_0^n(H_T^{(3)} | \mathcal{F}_0) \\ &= e^{-rT} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [H_T^n] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [h(S_T)^2]} \right. \\ &\quad \cdot \sqrt{\text{Var}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (g(\tau_j) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [g(\tau_j)]) \right)} \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [h(S_T)] \cdot \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [g(\tau_j)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [g(\tau_j)] \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Exemple d'application : CAT bond.

Les *CAT bonds* (*Catastrophe Bonds*) constituent une forme de titrisation du risque d'assurance. Ils permettent à un assureur ou un réassureur de transférer une partie du risque assurantiel vers les marchés financiers à travers des titres financiers achetés par des investisseurs. Dans ce type de produit, les investisseurs reçoivent des coupons financiers réguliers mais supportent une partie des pertes lorsque un événement extrême survient ou lorsque le taux de mortalité observé dépasse un certain seuil. Le payoff dépend donc simultanément d'une composante financière et d'un risque actuariel, ce qui en fait un exemple d'application de la méthode en trois étapes.

Considérons un CAT bond de maturité T , de nominal K et de taux de coupon c . Les flux financiers du contrat sont donnés par :

$$CF_t = cK, \quad t = 1, \dots, T,$$

et

$$CF_T = cK + H_T^n,$$

où H_T^n représente la composante liée au risque de mortalité.

Le taux de mortalité réalisé dans une population de référence de taille n est défini par :

$$q_t := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{t-1 < \tau_j \leq t\}}, \quad t = 1, 2, 3,$$

Le payoff lié au risque de mortalité est alors donné par :

$$H_T^n = K \cdot l(q),$$

où la fonction de perte $l(q)$ est définie par :

$$l(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q \leq 1.3 q_0, \\ \frac{1.5 q_0 - q}{0.2 q_0}, & \text{si } 1.3 q_0 < q \leq 1.5 q_0, \\ 0, & \text{si } q \geq 1.5 q_0. \end{cases}$$

La partie purement financière des coupons possède pour valeur actuelle :

$$cK \sum_{t=1}^T e^{-rt}.$$

La méthode en trois étapes est ensuite appliquée au payoff H_T^n .

La valeur de la partie répliquable est donnée par :

$$\pi_0^f \left(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0 \right) = e^{-rT} K \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [l(q)].$$

La partie actuarielle diversifiable est donnée par :

$$\pi_0^a \left(H_T^{(2)} \mid \mathcal{F}_0 \right) = K \pi_0^a \left(l(q) - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [l(q)] \right).$$

Enfin, la partie résiduelle non diversifiable est valorisée par :

$$\pi_0^n \left(H_T^{(3)} \mid \mathcal{F}_0 \right) = K \pi_0^n \left(\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [l(q)] - \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [l(q)] \right).$$

La méthode en trois étapes permet ainsi de construire une valorisation prudente du produit en tenant compte des scénarios extrêmes liés au risque systématique de mortalité. La composante résiduelle du payoff peut alors être chargée d'une marge de risque supplémentaire afin de protéger l'assureur contre les pertes importantes susceptibles d'apparaître lors de conditions de mortalité défavorables.

2.5 Comparaison des deux méthodes

Les méthodes proposées par Dhaene et al. (2017) et Deelstra et al. (2020) partagent l'objectif commun de valoriser des passifs d'assurance combinant risques financiers et actuariels. Elles s'inscrivent dans une logique de *fair valuation* visant à produire un prix cohérent avec les marchés financiers (*market-consistency*) tout en tenant compte des caractéristiques actuarielles du contrat (*actuarial-consistency*).

La méthode en deux étapes repose sur la détermination d'une couverture optimale par l'approche de moyenne-variance. Celle-ci consiste à déterminer la meilleure couverture du passif parmi les actifs financiers disponibles en minimisant l'erreur quadratique de répliqua-tion. La valeur du passif est ensuite obtenue en combinant la valeur de la couverture optimale et une valorisation actuarielle appliquée à la partie résiduelle du passif. Cette approche conduit à une décomposition en deux parties : une partie couverte par les actifs financiers et une partie résiduelle regroupant l'ensemble des risques qui ne peuvent être répliqués sur les marchés financiers.

La méthode en trois étapes propose une lecture plus fine du risque. Elle est développée sous l'hypothèse d'un marché financier complet ainsi que de l'indépendance entre les risques financiers et actuariels. Elle distingue une partie financière pure, une partie actuarielle diversifiable et une partie résiduelle correspondant au risque systématique. La deuxième partie est associée au risque de mortalité non systématique et peut être réduite par mutualisation au sein d'un portefeuille suffisamment large. La troisième regroupe quant à elle les risques qui subsistent même lorsque la taille du portefeuille augmente. Cette partie est valorisée à l'aide d'une transformée d'Esscher permettant de définir une mesure de valorisation adaptée au risque systématique.

Les deux approches reposent donc sur une même logique consistant à séparer la partie financière du passif des risques actuariels. Dans les deux cas, la première étape porte sur la partie du passif pouvant être valorisée à partir des marchés financiers. Les méthodes se distinguent ensuite dans la manière dont elles traitent et valorisent les risques qui ne peuvent être couverts par les actifs financiers.

Dans la méthode en deux étapes, la valorisation actuarielle porte sur le risque résiduel qui reste après la détermination de la couverture optimale. La méthode en trois étapes sépare explicitement le risque de mortalité non systématique du risque de mortalité systématique.

Dans le chapitre 4, nous appliquerons ces deux méthodes à la valorisation d'un contrat *equity-linked* afin de comparer les résultats obtenus et d'analyser l'impact des différentes hypothèses de valorisation sur la valeur du passif.

Chapitre 3

Equity-linked life insurance contracts

3.1 Description générale

Dans ce chapitre, nous étudions les contrats en unités de compte (*equity-linked contracts*) qui sont des produits d'assurance-vie dont le montant des prestations dépend à la fois de l'évolution d'un actif financier (par exemple un fonds d'investissement ou un indice boursier) et de la survie ou du décès de l'assuré. Le paiement des prestations repose ainsi sur deux principales sources d'incertitude : le risque de marché et le risque de mortalité.

L'évaluation de ces contrats nécessite donc une approche mixte et s'inscrit dans la continuité des approches *market-consistent* et *actuarial-consistent* présentées dans les chapitres précédents.

Les contrats d'assurance vie *equity-linked* occupent aujourd'hui une place importante dans les marchés modernes de l'assurance et se sont fortement développés avec l'apparition des *variable annuities*.

Ces contrats comportent généralement une phase d'accumulation durant laquelle le souscripteur verse une prime unique ou des primes périodiques qui sont investies sur des marchés financiers. À l'échéance du contrat, les prestations versées dépendent de l'évolution du portefeuille financier ainsi que des garanties offertes par l'assureur.

Afin de limiter l'exposition des assurés aux fluctuations défavorables des marchés, les assureurs ont progressivement introduit différentes garanties minimales regroupées sous l'appellation *Guaranteed Minimum Benefits* (GMxB). Parmi les garanties les plus couramment rencontrées figurent notamment :

- **GMDB** (*Guaranteed Minimum Death Benefits*) : garantit un capital minimal en cas de décès de l'assuré avant la maturité du contrat.
- **GMAB** (*Guaranteed Minimum Accumulation Benefits*) : garantit une valeur minimale accumulée du contrat en cas de survie à la maturité.
- **GMMB** (*Guaranteed Minimum Maturity Benefits*) : garantit un capital minimal à la date de maturité du contrat sous condition de survie.
- **GMIB** (*Guaranteed Minimum Income Benefits*) : garantit un revenu minimal sous forme de rente viagère à la retraite ou à la maturité.

- **GMWB** (*Guaranteed Minimum Withdrawal Benefits*) : garantit des retraits périodiques minimaux indépendamment de l'évolution du portefeuille financier.

Dans la suite, nous nous intéressons plus particulièrement aux contrats de type Guaranteed Minimum Maturity Benefits (GMMB).

3.2 Guaranteed Minimum Maturity Benefit (GMMB)

Le contrat GMMB garantit à l'assuré un montant minimal à la maturité T en cas de survie tout en lui permettant de bénéficier de la performance du portefeuille financier.

Soit S_T la valeur du portefeuille financier à la date T et G le montant garanti par l'assureur.

La prestation totale versée à la maturité, en cas de survie de l'assuré, est donnée par :

$$H_T = \mathbf{1}_{\{\tau_x > T\}} \max(S_T, G),$$

où τ_x désigne la durée de vie résiduelle d'un assuré âgé de x à la date initiale.

Le payoff peut également s'écrire sous la forme :

$$H_T = \mathbf{1}_{\{\tau_x > T\}} \left(S_T + (G - S_T)^+ \right).$$

$(G - S_T)^+$ représente le coût de la garantie supporté par l'assureur lorsque la valeur du portefeuille financier devient inférieure au niveau garanti.

Pour évaluer ce type de produits, il est nécessaire de modéliser l'évolution du portefeuille financier ainsi que la mortalité de l'assuré.

Dans les sections suivantes, nous décrirons les différentes étapes de cette modélisation ainsi que les méthodes utilisées pour estimer les paramètres nécessaires à la valorisation de ces contrats.

3.3 Modélisation du risque de mortalité

La modélisation des taux de mortalité permet de décrire leur évolution dans le temps et d'obtenir les probabilités de survie nécessaires à l'évaluation actuarielle du contrat.

Pour cela, nous retenons une approche stochastique fondée sur les modèles GAPC (*Generalized Age-Period-Cohort*) qui permettent de représenter les effets liés à l'âge, à la période et à la cohorte. Parmi ces modèles, nous considérons le modèle de Lee-Carter, puis son extension avec effet cohorte, le modèle de Renshaw-Haberman.

Cette section s'appuie sur Villegas et al. (2018) qui présentent le package *StMoMo*. Ce package permet de définir, d'estimer, de comparer et de projeter différents modèles stochastiques de mortalité.

3.3.1 Modèle de Lee-Carter

Le modèle Lee-Carter, introduit en 1992, est une approche de référence pour la modélisation et la projection de la mortalité.

Brouhns et al. (2002) reformulent ce modèle dans un cadre de régression de Poisson dans lequel le nombre de décès observés à l'âge x durant l'année t , noté $D_{x,t}$, est supposé suivre :

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}^c \mu_{x,t}),$$

où $E_{x,t}^c$ représente l'exposition centrale au risque et $\mu_{x,t}$ la force de mortalité.

Les taux de mortalité sont alors modélisés sous la forme suivante :

$$\ln m_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} \quad (3.1)$$

où

- α_x décrit le niveau moyen de mortalité observé pour chaque âge,
- $\beta_x^{(1)}$ reflète la sensibilité de la mortalité à l'évolution dans le temps,
- $\kappa_t^{(1)}$ représente la tendance globale de la mortalité au fil des années.

Classiquement, les contraintes suivantes sont imposées pour assurer l'identifiabilité du modèle :

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_x \beta_x^{(1)} = 1$$

3.3.2 Modèle de Renshaw-Haberman

Renshaw & Haberman (2006) développent une extension du modèle de Lee-Carter en introduisant explicitement un effet cohorte.

Le modèle s'écrit :

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \quad (3.2)$$

où γ_{t-x} représente l'effet de cohorte associé à l'année de naissance $c = t - x$ et permet de capter les différences de mortalité propres à certaines générations.

Comme pour le modèle de Lee-Carter, l'estimation repose sur une loi de Poisson pour le nombre de décès observés.

Afin d'assurer l'identifiabilité du modèle, les contraintes suivantes sont imposées :

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \quad \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \quad \sum_c \gamma_c = 0.$$

Renshaw & Haberman (2006) considèrent également plusieurs sous-structures du modèle obtenues en fixant certains coefficients de modulation.

Une version simplifiée du modèle est obtenue en posant :

$$\beta_x^{(0)} = 1.$$

Le prédicteur devient alors :

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}.$$

Cette formulation suppose que l'effet cohorte agit de manière identique pour tous les âges.

3.3.3 Projection de la mortalité

La projection des taux futurs de mortalité repose sur la modélisation des indices de période $\kappa_t^{(i)}$ ainsi que de l'effet cohorte γ_{t-x} à l'aide de techniques de séries temporelles. Ces composantes temporelles décrivent l'évolution de la mortalité au cours du temps et permettent d'obtenir les projections futures des taux de mortalité.

Deux approches principales sont généralement utilisées dans la littérature actuarielle pour projeter les indices de période. Une première approche consiste à supposer que les indices suivent une marche aléatoire avec dérive :

$$\kappa_t = \delta + \kappa_{t-1} + \xi_t^\kappa,$$

où δ représente le terme de dérive et ξ_t^κ un bruit blanc.

Une seconde approche consiste à modéliser séparément chaque indice de période à l'aide d'un processus ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*). Nous retenons cette approche pour la projection des indices $\kappa_t^{(i)}$ et de l'effet cohorte γ_{t-x} .

Plus précisément, dans les modèles considérés, l'indice de période $\kappa_t^{(1)}$ est supposé suivre un processus ARIMA(p, d, q) avec dérive :

$$\Delta^d \kappa_t^{(1)} = c + \phi_1 \Delta^d \kappa_{t-1}^{(1)} + \dots + \phi_p \Delta^d \kappa_{t-p}^{(1)} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

où c représente un terme constant, ϕ_i les coefficients autorégressifs, θ_i les coefficients de moyenne mobile et ε_t un bruit blanc. Les paramètres p , d et q désignent respectivement les ordres autorégressif, de différenciation et de moyenne mobile du modèle.

L'effet cohorte γ_{t-x} est également modélisé à l'aide d'un processus ARIMA indépendant des indices de période :

$$\Delta^d \gamma_c = \delta_0 + \phi_1 \Delta^d \gamma_{c-1} + \dots + \phi_p \Delta^d \gamma_{c-p} + \varepsilon_c + \theta_1 \varepsilon_{c-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{c-q},$$

où $c = t - x$ désigne la cohorte de naissance.

Les valeurs projetées des indices de période et de cohorte permettent ensuite de reconstruire les valeurs futures du prédicteur :

$$\hat{\eta}_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \hat{\kappa}_t^{(1)} + \hat{\gamma}_{t-x}.$$

À partir de ces projections, il est alors possible d'obtenir les taux futurs de mortalité ainsi que les probabilités de survie nécessaires à l'évaluation actuarielle des contrats equity-linked.

3.4 Modélisation de l'actif financier

Le contrat equity-linked dépend de l'évolution d'un actif financier. La modélisation de cette composante financière est donc nécessaire pour l'évaluation du contrat.

Pour cela, nous utilisons le modèle de Black-Scholes couramment utilisé en finance pour modéliser la dynamique des prix d'actifs.

3.4.1 Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes repose sur l'existence de deux actifs financiers : un actif sans risque et un actif risqué.

L'actif sans risque, noté B_t , évolue à un taux d'intérêt constant r . Sa dynamique est donnée par :

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt,$$

d'où :

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

L'actif risqué correspond typiquement à une action ou à un indice boursier. Sous la mesure réelle $\mathbb{P}$, sa dynamique suit un mouvement brownien géométrique :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= (\mu - r) S_t dt + r S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right), \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Girsanov, on passe de la mesure réelle $\mathbb{P}$ à la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ avec $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$.

On obtient alors la dynamique suivante sous $\mathbb{Q}$:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où :

- S_t désigne le prix de l'actif à la date t ;
- μ représente le rendement instantané moyen ;
- σ correspond à la volatilité de l'actif ;
- W_t désigne un mouvement brownien standard sous $\mathbb{P}$;
- $W_t^{\mathbb{Q}}$ désigne un mouvement brownien standard sous $\mathbb{Q}$.

La solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}} \right].$$

3.5 Données et estimation

3.5.1 Calibration des modèles de mortalité

Les modèles de Lee-Carter et de Renshaw-Haberman sont implémentés et estimés à l'aide du package R *StMoMo* (Villegas et al. (2018)).

Les données de mortalité proviennent de la Human Mortality Database (HMD) pour la population belge masculine.

Nous considérons les âges de 50 à 90 ans sur la période 1980-2019.

La Figure 3.1 présente les paramètres estimés du modèle de Lee-Carter :

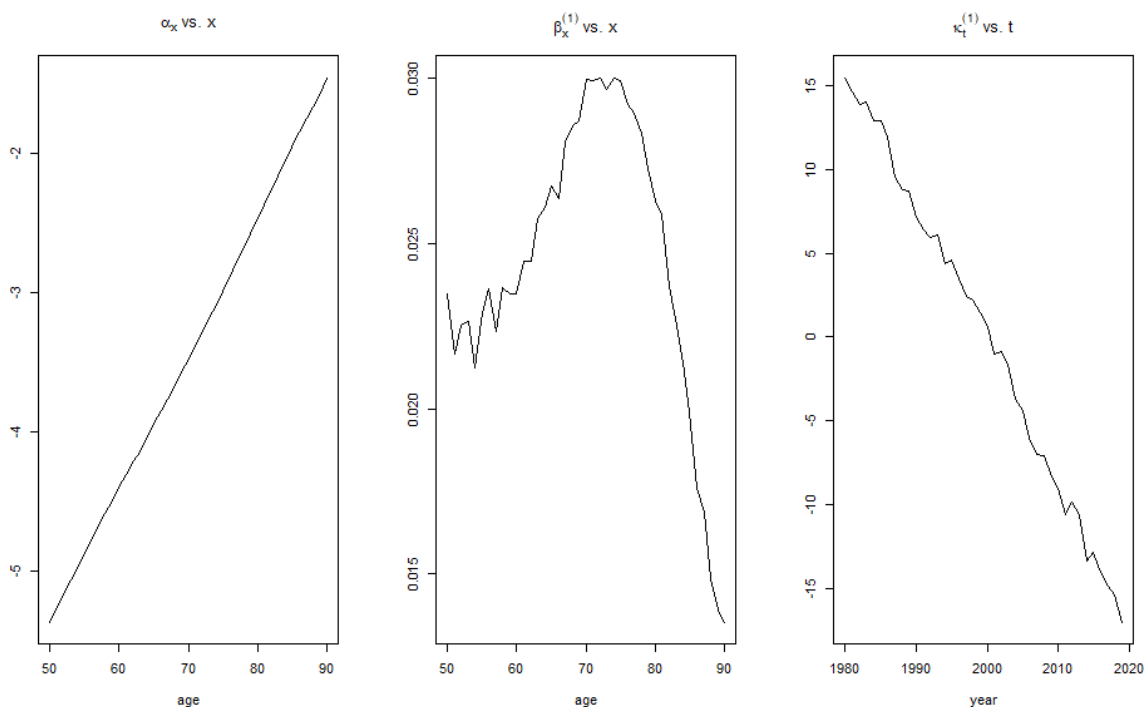


FIGURE 3.1 – Lee-Carter

On observe que la courbe de α_x augmente globalement avec l'âge et montre que le niveau moyen de mortalité devient plus élevé aux âges avancés. L'indice de période $\kappa_t^{(1)}$ présente une tendance décroissante au cours du temps et indique une baisse progressive de la mortalité sur la période étudiée.

Le modèle de Renshaw-Haberman est ensuite estimé en tenant compte d'un effet cohorte dans la dynamique de mortalité.

Les courbes de α_x et de $\kappa_t^{(1)}$ montrent des comportements proches de ceux obtenus avec le modèle de Lee-Carter. L'effet cohorte γ_{t-x} met en évidence des variations supplémentaires selon les générations de naissance.

La Figure 3.2 présente les paramètres estimés du modèle de Renshaw-Haberman.

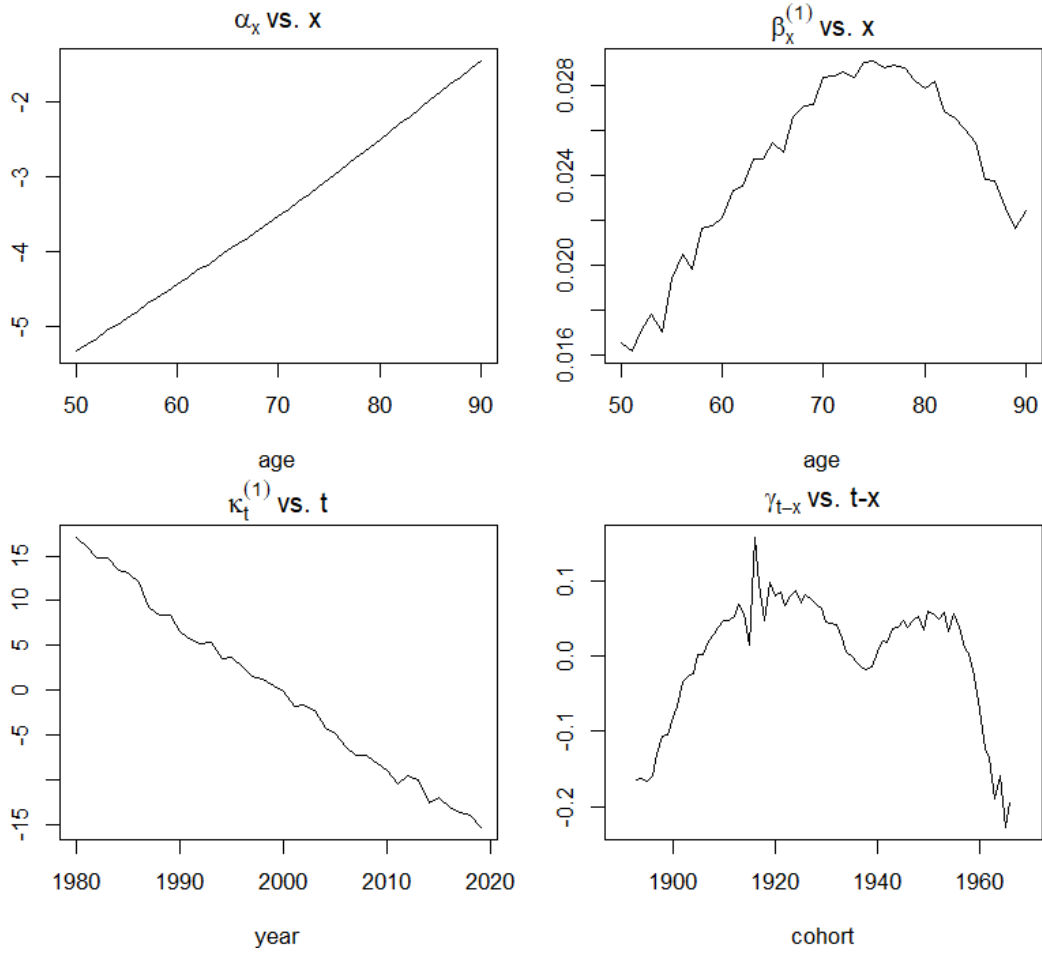


FIGURE 3.2 – Renshaw-Haberman

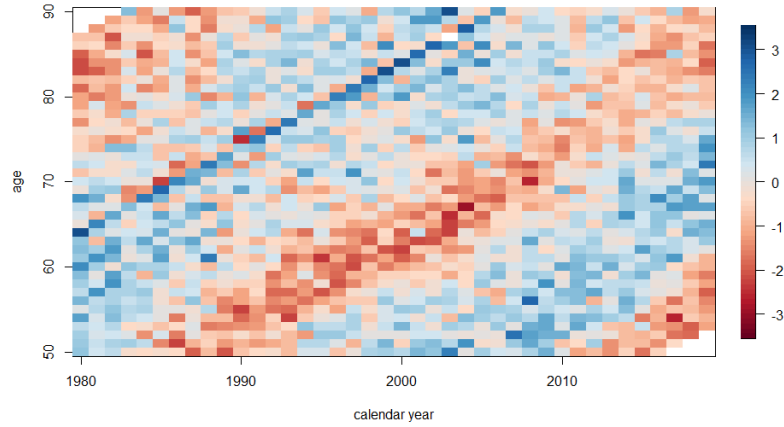
La qualité d'ajustement des modèles est analysée à partir des résidus de déviance. La présence de structures régulières dans les résidus peut indiquer que le modèle ne capture pas correctement certaines caractéristiques des données de mortalité. Dans le cadre des modèles Poisson-log considérés, les résidus de déviance sont définis par :

$$r_{x,t} = \text{sign}(d_{x,t} - \hat{d}_{x,t}) \sqrt{\frac{\text{dev}(x,t)}{\hat{\phi}}},$$

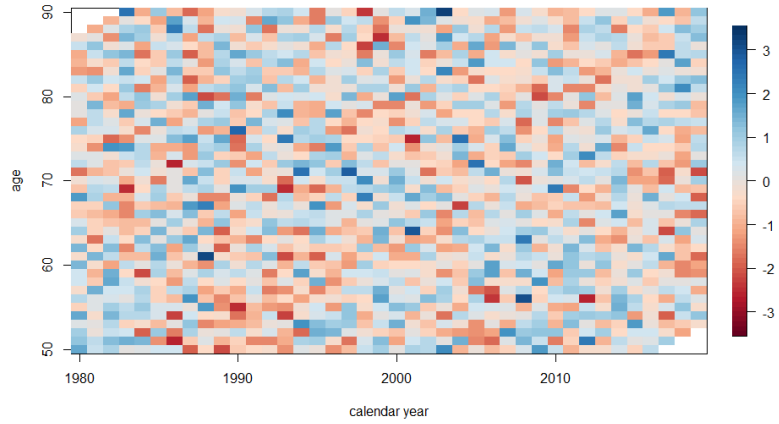
$$\text{où } \begin{cases} \text{dev}(x,t) = 2 \left(d_{x,t} \log \left(\frac{d_{x,t}}{\hat{d}_{x,t}} \right) - (d_{x,t} - \hat{d}_{x,t}) \right), \\ \hat{\phi} = \frac{1}{N-k} \sum_x \sum_t \text{dev}(x,t). \end{cases}$$

où $d_{x,t}$ désigne le nombre observé de décès à l'âge x durant l'année t , $\hat{d}_{x,t}$ le nombre de décès ajusté par le modèle, N le nombre total d'observations et k le nombre de paramètres estimés.

Le package *StMoMo* permet d'obtenir ces résidus de déviance, représentés graphiquement comme suit :



(a) Lee-Carter



(b) Renshaw-Haberman

FIGURE 3.3 – Heatmaps des résidus de déviance

Les diagonales prononcées observées dans les résidus du modèle Lee-Carter traduisent un effet cohorte insuffisamment capté par le modèle. L'introduction du terme cohorte γ_{t-x} dans le modèle de Renshaw-Haberman permet de réduire ces structures résiduelles et d'améliorer l'ajustement aux données observées.

Les critères AIC et BIC permettent également de comparer la qualité d'ajustement des deux modèles. Le meilleur modèle est alors celui avec les plus faibles valeurs. Nous avons pour chaque modèle les résultats dans le tableau ci-dessous :

Modèle	Paramètres	AIC	BIC
Lee-Carter	120	18 123.40	18 770.82
Renshaw-Haberman	192	16 129.78	17 165.64

TABLE 3.1 – Comparaison des critères AIC et BIC des modèles de mortalité.

Le modèle Renshaw-Haberman présente un nombre de paramètres plus élevé que le modèle Lee-Carter en raison de l'introduction explicite de l'effet cohorte. Les critères AIC et BIC sont significativement plus faibles pour le modèle Renshaw-Haberman, ce qui indique un meilleur ajustement aux données de mortalité observées. Ces résultats suggèrent que la prise en compte de l'effet cohorte permet de mieux représenter la dynamique de mortalité.

3.5.2 Projection et simulation de la mortalité

Une fois les paramètres du modèle de Renshaw-Haberman estimés, il est nécessaire de projeter l'évolution future de l'indice de période $\kappa_t^{(1)}$ ainsi que de l'effet cohorte γ_{t-x} afin d'obtenir les taux futurs de mortalité.

Les projections sont réalisées à l'aide de modèles ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average). La sélection des modèles est effectuée automatiquement avec la fonction `auto.arima()` du package *forecast*. Cette procédure explore différentes combinaisons des paramètres autorégressifs, de différenciation et de moyenne mobile afin de sélectionner le modèle le plus adapté aux séries considérées à partir de critères d'information statistiques tels que l'AIC et le BIC.

Pour l'indice de période $\kappa_t^{(1)}$, le meilleur modèle sélectionné avec la fonction `auto.arima()` est un modèle ARIMA(0, 1, 1) avec dérive dont l'expression mathématique est donnée par :

$$\Delta\kappa_t^{(1)} = c + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1},$$

où c représente le terme de dérive, θ_1 le coefficient de moyenne mobile et ε_t un bruit blanc gaussien. Les coefficients estimés sont :

$$\theta_1 = -0.5123, \quad c = -0.8242.$$

L'ordre de différenciation $d = 1$ indique qu'une différenciation de premier ordre est appliquée pour stabiliser la série temporelle. La dérive négative obtenue est cohérente avec la tendance décroissante observée pour l'indice $\kappa_t^{(1)}$ sur la période historique.

Pour l'effet cohorte γ_{t-x} , le modèle sélectionné est un ARIMA(2, 2, 1) et s'écrit sous la forme :

$$\Delta^2\gamma_{t-x} = \phi_1\Delta^2\gamma_{t-x-1} + \phi_2\Delta^2\gamma_{t-x-2} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1},$$

où ϕ_1 et ϕ_2 désignent les coefficients autorégressifs et θ_1 le coefficient de moyenne mobile. Les coefficients estimés sont :

$$\phi_1 = -0.7289, \quad \phi_2 = -0.4322, \quad \theta_1 = -0.6233.$$

Les résidus des modèles ARIMA sont ensuite analysés à l'aide du test de Ljung-Box afin de vérifier l'absence d'autocorrélation résiduelle. Les p-values obtenues sont respectivement égales à 0.5532 pour $\kappa_t^{(1)}$ et 0.5891 pour γ_{t-x} , ce qui ne met pas en évidence d'autocorrélation significative des résidus. Les modèles obtenus sont donc considérés comme adéquats pour la projection des composantes temporelles du modèle de Renshaw-Haberman.

Les composantes temporelles du modèle sont ensuite projetées et simulées sur un horizon de 20 ans (2020-2039) à l'aide du package *StMoMo* avec la méthode `iarima`. Les Figures 3.4 et 3.5 présentent respectivement les projections de l'indice de période $\kappa_t^{(1)}$ et de l'effet cohorte γ_{t-x} .

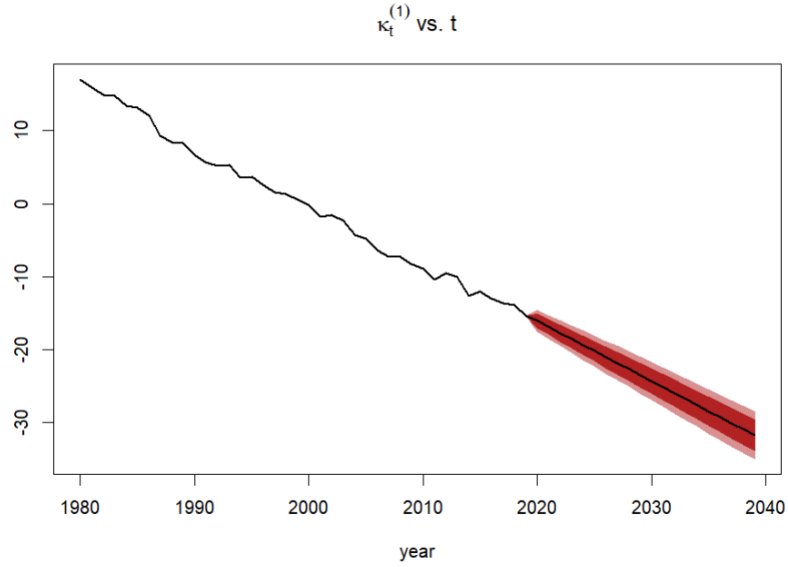


FIGURE 3.4 – Projection de l'indice de période κ_t .

La Figure 3.4 montre que l'indice de période $\kappa_t^{(1)}$ conserve une tendance décroissante sur l'horizon de projection. Cette évolution indique une baisse progressive des taux de mortalité au cours du temps. L'incertitude associée aux projections futures augmente progressivement au fil du temps.

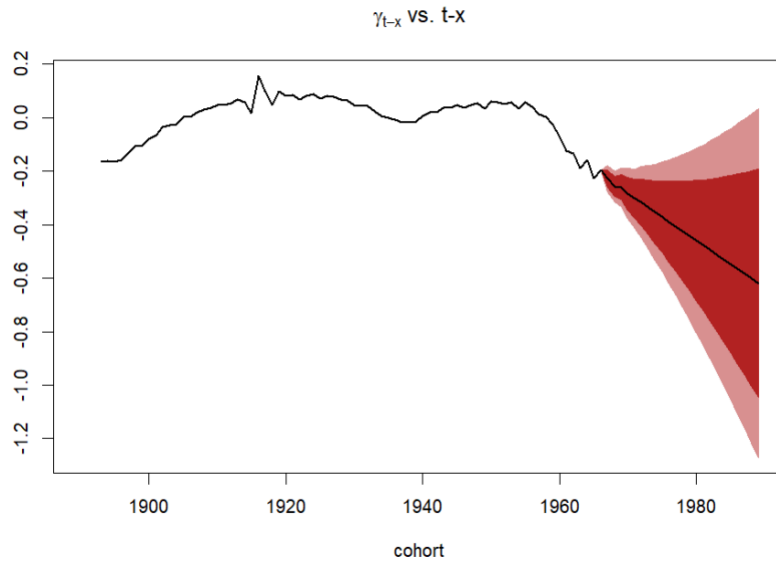


FIGURE 3.5 – Projection de l'effet cohorte γ_{t-x} .

La Figure 3.5 présente les projections de l'effet cohorte γ_{t-x} . Les intervalles de confiance deviennent progressivement plus larges avec l'horizon de projection, ce qui montre que l'évolution future de l'effet cohorte demeure difficile à prévoir.

Les composantes temporelles projetées et simulées du modèle de Renshaw-Haberman permettent d'obtenir les taux futurs de mortalité .

Pour un assuré âgé de x ans à la date initiale, la probabilité de survie sur un horizon de t années est donnée par :

$${}_t p_x = \exp \left(- \int_0^t \mu_{x+s} ds \right),$$

où μ_{x+s} est la force de mortalité à l'âge $x + s$.

Les taux de mortalité projetés(2020-2039) permettent ainsi d'obtenir les probabilités de survie d'un assuré âgé de 50 ans sur un horizon de 20 ans. La Figure 3.6 présente l'évolution de ces probabilités de survie obtenues à partir du modèle de Renshaw-Haberman.

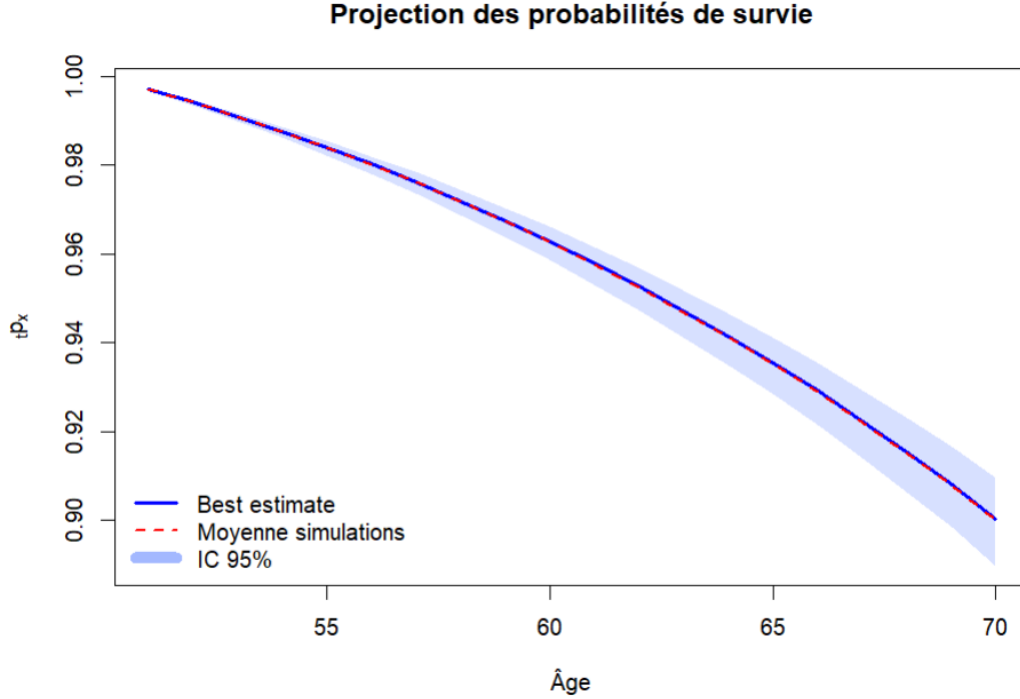


FIGURE 3.6 – Probabilités de survie projetées à partir du modèle Renshaw-Haberman ,
âge initial $x = 50$

3.5.3 Calibration et simulation du modèle Black-Scholes

Le contrat equity-linked dépend de l'évolution d'un actif risqué. Il est donc nécessaire d'estimer les paramètres du modèle de Black-Scholes utilisés pour décrire la dynamique de cet actif.

Nous utilisons les prix journaliers de clôture de l'indice boursier belge BEL20 pour calibrer le modèle financier. Cet indice regroupe les principales sociétés cotées sur le marché belge et constitue un indicateur représentatif de l'évolution du marché financier belge.

Le calibrage est réalisé sur la période allant du 1^{er} janvier 2000 au 31 décembre 2019. Les rendements logarithmiques sont ensuite calculés pour estimer le rendement moyen μ et la volatilité σ du modèle de Black-Scholes.

La Figure 3.7 montre l'évolution de l'indice BEL20 sur la période considérée.

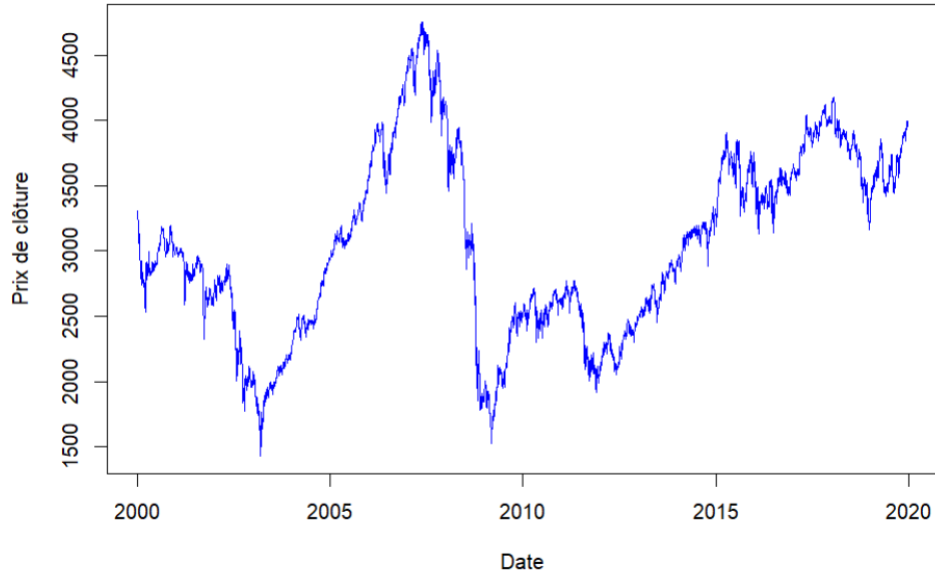


FIGURE 3.7 – Évolution historique de l'indice BEL20 sur la période 2000-2019.

Les rendements logarithmiques journaliers sont calculés à partir des prix de clôture selon la formule suivante :

$$R_t = \ln\left(\frac{S_{t+\Delta}}{S_t}\right),$$

où S_t est le prix de l'indice à la date t et $\Delta = \frac{1}{252}$ correspond à un jour de cotation.

La Figure 3.8 présente l'évolution des rendements logarithmiques journaliers du BEL20 sur la période étudiée.

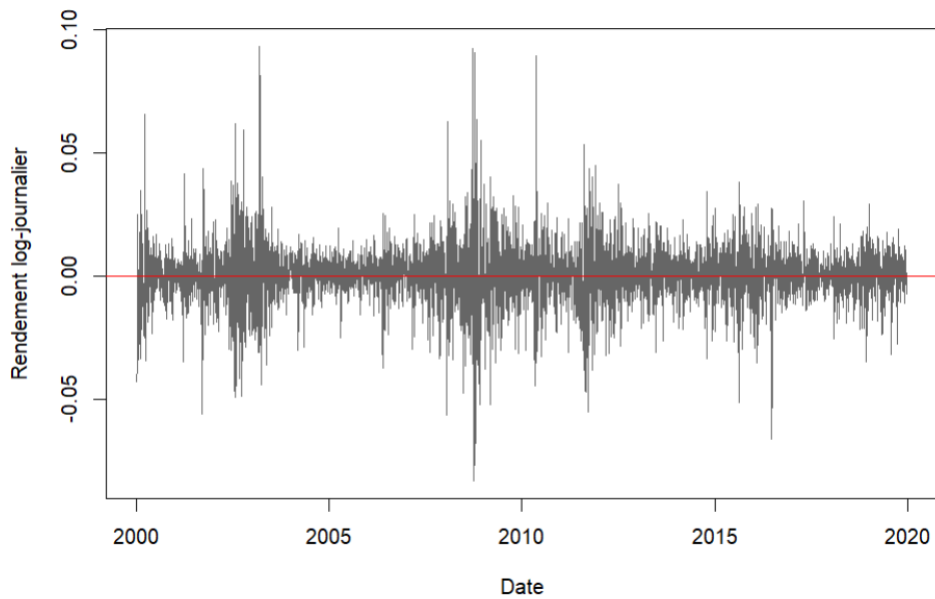


FIGURE 3.8 – Rendements logarithmiques journaliers du BEL20 sur la période 2000-2019.

Les paramètres du mouvement brownien géométrique sont estimés à partir des rendements logarithmiques journaliers observés.

Le rendement moyen journalier est estimé par :

$$\mu^\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i,$$

tandis que la volatilité journalière est donnée par :

$$\sigma^\Delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \mu^\Delta)^2}.$$

Sous l'hypothèse d'indépendance des rendements journaliers, la volatilité annualisée est obtenue par :

$$\sigma = \sqrt{252} \sigma^\Delta.$$

Le rendement moyen annualisé est alors donné par :

$$\mu = 252 \mu^\Delta + \frac{1}{2} \sigma^2.$$

Paramètres	Résultats
$\hat{\mu}$	0,0274
$\hat{\sigma}$	0,1932

TABLE 3.2 – Paramètres estimés du modèle de Black-Scholes

Nous supposons un taux sans risque constant $r = 1,5\%$ (Devolder & Lebègue (2017)).

Ensuite, nous effectuons 10000 simulations de Monte-Carlo afin de générer les trajectoires de l'actif financier.

En choisissant un pas de discrétisation journalier $\Delta t = \frac{1}{252}$, on obtient :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_t \right],$$

où $Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La Figure 3.9 présente l'évolution simulée de l'actif financier sur un horizon de 20 ans.

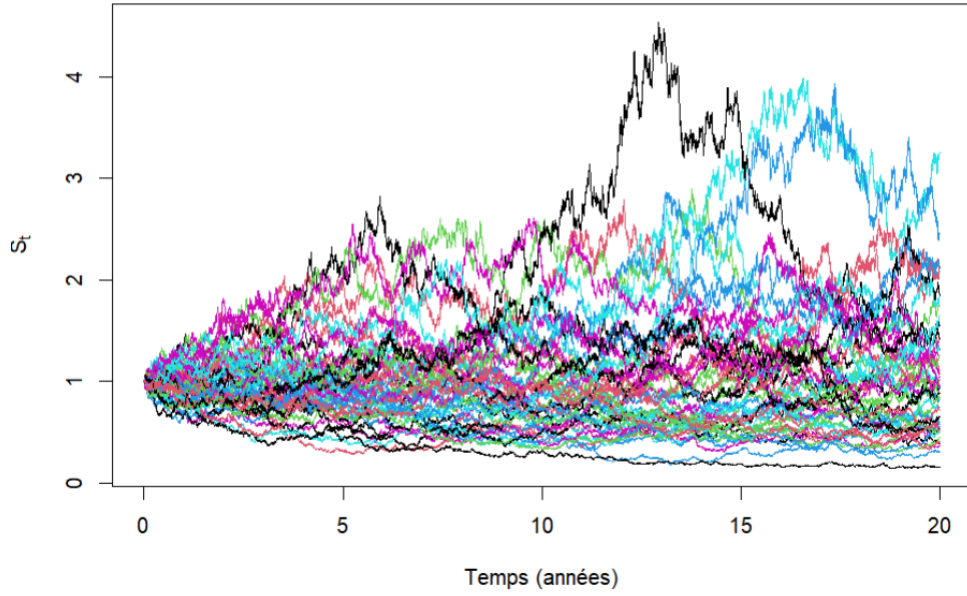


FIGURE 3.9 – Évolution simulée de S_t ($S_0 = 1$)

Les modèles présentés dans ce chapitre donnent les éléments nécessaires pour la suite de l'application. Le modèle de mortalité permet d'obtenir les probabilités de survie futures tandis que le modèle de Black-Scholes permet de décrire l'évolution du portefeuille financier. Ces deux éléments seront utilisés dans le chapitre suivant pour valoriser la garantie du contrat GMMB.

Chapitre 4

Application des méthodes de valorisation

Nous considérons un portefeuille homogène de $n = 10\,000$ contrats GMMB souscrits par des assurés âgés de $x = 50$ ans à la date initiale. La maturité est fixée à $T = 20$ ans.

L'application porte sur le coût de la garantie à maturité, c'est-à-dire le montant supporté par l'assureur si l'assuré est en vie à la date T et si la valeur du portefeuille financier à maturité est inférieure au montant garanti.

Le payoff de la garantie est défini par :

$$H_T^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} (G - S_T)^+. \quad (4.1)$$

où :

- S_T : la valeur du portefeuille financier à maturité ;
- G : le montant garanti à la maturité T ;
- τ_j : la durée de vie résiduelle de l'assuré j .

Les paramètres retenus pour l'application sont les suivants :

- $P = S_0 = 1$: prime unique initiale et valeur initiale du portefeuille financier ;
- $g = 0.009$: taux garanti ;
- $r = 0.015$: taux sans risque ;
- $\hat{\sigma} = 0.1932$: volatilité estimée de l'actif financier.

Le montant garanti à l'échéance est donné par :

$$G = P e^{gT}.$$

Nous déterminons dans un premier temps le Best Estimate du passif. Nous appliquons ensuite la méthode à deux étapes et la méthode en trois étapes.

4.1 Best estimate du passif

Sous l'hypothèse d'indépendance entre le risque de mortalité et le risque financier, le Best Estimate associé au passif défini en (4.1) est donné par :

$$BEL = {}_T p_x \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (G - S_T)^+ \right], \quad (4.2)$$

où ${}_T p_x$ est la probabilité de survie d'un assuré âgé de x ans jusqu'à la maturité T .

Le coût de la garantie à échéance est donné par :

$$(G - S_T)^+ = \max(G - S_T, 0) = \begin{cases} G - S_T, & \text{si } S_T < G, \\ 0, & \text{si } S_T \geq G. \end{cases}$$

Cette expression correspond au payoff d'un put européen de strike G et de maturité T .

Sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes, sa valeur actuelle est donnée par :

$$Put_{BS} = G e^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1), \quad (4.3)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{G}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (4.4)$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (4.5)$$

Le Best Estimate du passif est donc :

$$BEL = {}_T p_x \times Put_{BS}$$

4.2 Valorisation en deux étapes

Nous appliquons maintenant la méthode en deux étapes au contrat GMMB défini précédemment. Cette approche consiste d'abord à déterminer une stratégie de couverture optimale à partir des actifs financiers disponibles sur le marché. Le risque résiduel après cette couverture est ensuite valorisé selon un principe actuariel.

Le payoff du portefeuille GMMB est donné par :

$$H_T^{(n)} = \frac{N_T}{n} (G - S_T)^+, \quad (4.6)$$

où N_T désigne le nombre d'assurés encore en vie à la date T . Il est défini par

$$N_T = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}}.$$

Ainsi, le terme N_T/n représente la proportion de survivants dans le portefeuille à la maturité.

Dans cette première étape, nous cherchons le portefeuille financier qui reproduit au mieux le passif $H_T^{(n)}$. La stratégie de couverture optimale est déterminée en minimisant l'erreur quadratique moyenne :

$$\theta_H^{MV} = \arg \min_{\mu \in \Theta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(H_T^{(n)} - \mu \cdot Y \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

Cette étape est réalisée sous la mesure réelle $\mathbb{P}$ car il s'agit de mesurer le risque supporté par l'assureur.

Dans notre cas, le vecteur des actifs financiers utilisés pour la couverture est donné par :

$$Y = (1, S_T).$$

La stratégie de couverture optimale est représentée par le vecteur

$$\theta_H^{MV} = (\theta_0^{MV}, \theta_1^{MV}).$$

La valeur du portefeuille de couverture associé à cette stratégie est obtenue par :

$$\theta_H^{MV} \cdot Y = \theta_0^{MV} + \theta_1^{MV} S_T.$$

Les coefficients θ_0^{MV} et θ_1^{MV} déterminent respectivement les positions optimales dans l'actif sans risque et dans l'actif risqué.

Les trajectoires financières utilisées dans cette étape sont donc simulées sous $\mathbb{P}$.

La dynamique du portefeuille financier est donnée par

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

où μ désigne le rendement moyen estimé à partir des données historiques du BEL20 et σ la volatilité estimée du portefeuille financier. La solution explicite de cette équation est :

$$S_T = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T^{\mathbb{P}} \right].$$

Cette dynamique permet de générer les valeurs simulées de S_T . Ces trajectoires servent ensuite à calculer les réalisations du payoff $H_T^{(n)}$ et déterminer la stratégie de couverture optimale.

$$\theta_H^{MV} = (\theta_0^{MV}, \theta_1^{MV}) = (0.406816, -0.09764423).$$

Le coefficient θ_1^{MV} est négatif, ce résultat est cohérent avec la structure du contrat GMMB. En effet, lorsque la valeur finale du fonds S_T augmente, le coût de la garantie diminue puisque le payoff $(G - S_T)^+$ diminue. À l'inverse, lorsque S_T diminue, le coût de la garantie augmente. La stratégie de couverture optimale prend une position négative dans l'actif risqué.

La partie hedgeable du passif est donc donnée par :

$$H^h = \theta_H^{MV} \cdot Y$$

Cette stratégie permet de reproduire une partie du passif à l'aide des actifs financiers disponibles sur le marché. Toutefois, la couverture n'est pas parfaite et ne permet pas d'éliminer totalement le risque du contrat.

Le risque résiduel est alors défini par :

$$H^\perp = H_T^{(n)} - \theta_H^{MV} \cdot Y.$$

Le passif peut ainsi être décomposé comme suit :

$$H_T^{(n)} = H^h + H^\perp.$$

Le vecteur des prix initiaux associé à $Y = (1, S_T)$ est :

$$y = (e^{-rT}, S_0).$$

La valeur à la date initiale de la partie couvrable s'obtient alors par :

$$\theta_H^{MV} \cdot y = \theta_0^{MV} e^{-rT} + \theta_1^{MV} S_0.$$

La partie non couvrable $H^\perp$ est ensuite valorisée à l'aide du principe de l'écart-type.

$$\pi(H^\perp) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}^\mathbb{P}[H^\perp] + \alpha \sigma^\mathbb{P}[H^\perp] \right).$$

Les simulations donnent les estimations suivantes :

$$\mathbb{E}^\mathbb{P}[H^\perp] \simeq 0,$$

et

$$\sigma^\mathbb{P}[H^\perp] = 0.2496986.$$

La moyenne quasi nulle du résidu indique que la stratégie de couverture fournit une bonne approximation du passif. En revanche, l'écart-type demeure significatif. Cette dispersion représente le risque qui subsiste après la couverture financière.

On en déduit :

$$\rho(H_T^{(n)}) = \theta_H^{MV} \cdot y + \pi \left[H_T^{(n)} - \theta_H^{MV} \cdot Y \right].$$

4.3 Valorisation en trois étapes

Nous appliquons maintenant la méthode en trois étapes au contrat GMMB. Le payoff moyen d'un portefeuille homogène de n contrats est donné par :

$$H_T^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(\tau_j) h(S_T),$$

où

$$g(\tau_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } \tau_j > T, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(S_T) = (G - S_T)^+.$$

Le risque de mortalité est décomposé comme suit :

$$\begin{aligned} g(\tau_j) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [g(\tau_j) \mid \mathcal{F}_0] + \left(g(\tau_j) - \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [g(\tau_j) \mid \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T] \right) \\ &\quad + \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [g(\tau_j) \mid \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [g(\tau_j) \mid \mathcal{F}_0] \right). \end{aligned}$$

Nous posons :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} \mid \mathcal{F}_0] = p_T^{BE} = {}_T p_x,$$

et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} \mid \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{G}_T] = p_T^{sys},$$

où p_T^{sys} désigne la probabilité de survie conditionnelle au facteur de mortalité systématique.

En remplaçant cette décomposition dans l'expression du payoff, on obtient :

$$H_T^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_T^{BE} (G - S_T)^+ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} - p_T^{sys} \right) (G - S_T)^+ + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(p_T^{sys} - p_T^{BE} \right) (G - S_T)^+. \quad (4.8)$$

Comme le portefeuille est homogène, cette expression se simplifie en :

$$H_T^n = p_T^{BE} (G - S_T)^+ + \left(\frac{N_T}{n} - p_T^{sys} \right) (G - S_T)^+ + \left(p_T^{sys} - p_T^{BE} \right) (G - S_T)^+$$

où

$$N_T = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}}$$

On obtient ainsi une décomposition en 3 parties :

$$H_T^n = H_T^{(1)} + H_T^{(2)} + H_T^{(3)}.$$

Partie financière

La première partie de la décomposition est donnée par :

$$H_T^{(1)} = p_T^{BE} (G - S_T)^+.$$

Cette partie est valorisée par l'opérateur financier :

$$\pi_0^f(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[e^{-rT} H_T^{(1)} \right].$$

En remplaçant $H_T^{(1)}$ par son expression, on obtient :

$$\pi_0^f(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0) = p_T^{BE} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[e^{-rT} (G - S_T)^+ \right].$$

$e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[(G - S_T)^+]$ correspond à la valeur d'un put européen de strike G .

En utilisant la formule de Black-Scholes, on obtient :

$$\pi_0^f(H_T^{(1)} \mid \mathcal{F}_0) = p_T^{BE} \times Put_{BS}. \quad (4.9)$$

Partie diversifiable

La deuxième partie de la décomposition est donnée par :

$$H_T^{(2)} = \left(\frac{N_T}{n} - p_T^{sys} \right) (G - S_T)^+.$$

Conditionnellement à l'information de mortalité systématique contenue dans $\mathcal{G}_T$, les décès individuels sont indépendants. Le nombre de survivants suit alors une loi binomiale :

$$N_T \mid \mathcal{G}_T \sim \mathcal{B}(n, p_T^{sys}).$$

On obtient :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{N_T}{n} \mid \mathcal{G}_T \right] = p_T^{sys},$$

et

$$\text{Var}^{\mathbb{P}} \left(\frac{N_T}{n} \mid \mathcal{G}_T \right) = \frac{p_T^{sys}(1 - p_T^{sys})}{n}.$$

$\frac{N_T}{n} - p_T^{sys}$ représente les écarts non systématiques par rapport au scénario de mortalité systématique considéré.

La variance décroît lorsque la taille du portefeuille augmente. Cette partie du risque peut donc être éliminée par mutualisation dans un portefeuille suffisamment large et correspond au risque de mortalité diversifiable.

Cette partie ne peut pas être couverte sur les marchés financiers mais peut être prise en charge par mutualisation au sein du portefeuille d'assurance. Sa valeur est alors obtenue par un opérateur actuariel :

$$\pi_0^a(H_T^{(2)} \mid \mathcal{F}_0) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [H_T^{(2)}] + \frac{\alpha}{2} \sigma^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} [H_T^{(2)}] \right).$$

En remplaçant l'expression de $H_T^{(2)}$, on a :

$$\pi_0^a(H_T^{(2)} \mid \mathcal{F}_0) = e^{-rT} \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left[\left(\frac{N_T}{n} - p_T^{sys} \right) (G - S_T)^+ \right] + \frac{\alpha}{2} \sigma^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left[\left(\frac{N_T}{n} - p_T^{sys} \right) (G - S_T)^+ \right] \right). \quad (4.10)$$

Afin d'évaluer l'effet de la mutualisation sur cette partie du risque, une analyse de sensibilité au nombre d'assurés est réalisée. Les résultats obtenus pour les trois étapes de valorisation ainsi que pour la valeur totale du passif sont présentés dans le Tableau 4.2.

Partie non couvable et non diversifiable

La troisième partie de la décomposition est donnée par :

$$H_T^{(3)} = (p_T^{sys} - p_T^{BE}) (G - S_T)^+.$$

Cette partie correspond au risque de mortalité systématique. Contrairement au terme précédent, ce risque ne peut pas être éliminé par mutualisation puisque l'ensemble du portefeuille est affecté par les mêmes évolutions de mortalité. Il ne peut pas non plus être parfaitement couvert sur les marchés financiers. Cette partie correspond donc au risque résiduel du contrat.

Pour valoriser ce risque, nous introduisons le vecteur des facteurs de risque :

$$X_T = (X_T^{(1)}, X_T^{(2)})^\top,$$

où $X_T^{(1)} = \log(p_T^{sys})$ est le facteur de mortalité systématique et $X_T^{(2)} = \log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ le facteur de risque financier.

Pour $\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, l'opérateur de valorisation appliqué à $H_T^{(3)}(X_T)$ est défini par :

$$\pi_0^n (H_T^{(3)}(X_T) \mid \mathcal{F}_0) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f} [H_T^{(3)}(X_T)].$$

La mesure $\mathbb{M}^a \times \mathbb{Q}^f \sim \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f$ est définie par la transformée d'Esscher. En l'appliquant à $H_T^{(3)}$, on obtient :

$$\pi_0^n (H_T^{(3)}(X_T) \mid \mathcal{F}_0) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left[H_T^{(3)}(X_T) \frac{\exp\left(-\sum_{j=1}^2 \theta^{(j)} X_T^{(j)}\right)}{\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f} \left[\exp\left(-\sum_{j=1}^2 \theta^{(j)} X_T^{(j)}\right)\right]} \right]. \quad (4.11)$$

La calibration des paramètres d'Esscher dépend du produit considéré et des risques que l'on souhaite valoriser. Les paramètres sont choisis de manière à accorder davantage de poids aux scénarios défavorables pour l'assureur et à attribuer une valeur positive à la partie systématique $H_T^{(3)}$.

Dans le cas d'un contrat de survie tel que le GMMB, ces scénarios correspondent notamment à une augmentation de la longévité, c'est-à-dire à une probabilité de survie plus élevée que celle anticipée. La valeur négative obtenue pour $\theta^{(1)}$ conduit alors à renforcer l'importance accordée à ces situations dans le processus de valorisation.

La transformée d'Esscher permet ainsi de refléter le coût du risque systématique résiduel en tenant compte des situations les plus pénalisantes pour l'assureur.

4.4 Résultats et analyse de sensibilité

	Valeur
Best estimate	0.235609
Méthode en deux étapes	0.259227
Méthode en trois étapes	0.237704

TABLE 4.1 – Comparaison des valeurs obtenues par les différentes méthodes de valorisation

La méthode en trois étapes donne un résultat proche du best estimate. Cela s'explique par le fait que la partie financière est évaluée à 0.235609, alors que les valeurs obtenues pour le risque diversifiable et le risque non diversifiable sont respectivement de 0.000127 et 0.001969. Le risque diversifiable reste faible avec la taille du portefeuille considéré ($n = 10\,000$), pour lequel l'effet de mutualisation réduit fortement cette source d'incertitude.

La méthode en deux étapes donne un résultat plus élevé. Dans cette approche, le portefeuille de couverture est évalué à 0.203733 et le risque résiduel à 0.055494. On observe également que la valeur obtenue pour la partie couvrable diffère de celle obtenue dans la méthode en trois étapes.

Sensibilité de la méthode en trois étapes au nombre d'assurés

n	$\pi_0^f(H_T^{(1)})$	$\pi_0^a(H_T^{(2)})$	$\pi_0^n(H_T^{(3)})$	$\pi_0^{(3)}(H_T^n)$
50	0.235609	0.001773	0.001969	0.239351
100	0.235609	0.001571	0.001969	0.239150
250	0.235609	0.000905	0.001969	0.238483
500	0.235609	0.000641	0.001969	0.238219
750	0.235609	0.000517	0.001969	0.238095
1000	0.235609	0.000475	0.001969	0.238053
1500	0.235609	0.000386	0.001969	0.237964
2000	0.235609	0.000283	0.001969	0.237861
3000	0.235609	0.000262	0.001969	0.237840
4000	0.235609	0.000223	0.001969	0.237801
5000	0.235609	0.000212	0.001969	0.237791
6000	0.235609	0.000184	0.001969	0.237762
10000	0.235609	0.000147	0.001969	0.237725
15000	0.235609	0.000120	0.001969	0.237699

TABLE 4.2 – Sensibilité de la méthode en trois étapes au nombre d'assurés

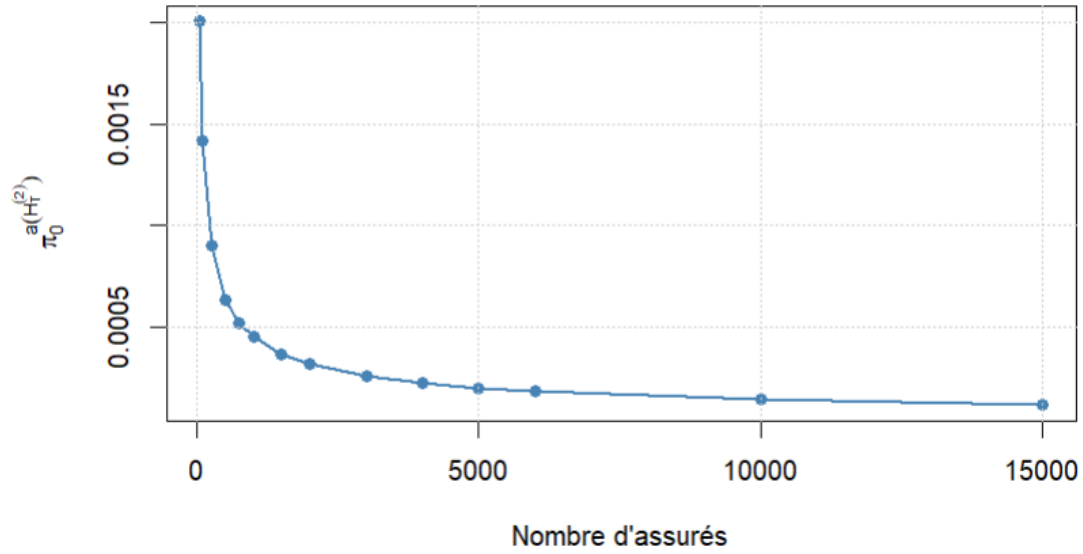


FIGURE 4.1 – Sensibilité de la partie diversifiable $\pi_0^a(H_T^{(2)})$ au nombre d'assurés

Les résultats montrent que lorsque la taille du portefeuille augmente, la partie diversifiable $\pi_0^a(H_T^{(2)})$ tend progressivement vers zéro. Cette diminution s'explique par l'effet de mutualisation.

Les parties $\pi_0^f(H_T^{(1)})$ et $\pi_0^n(H_T^{(3)})$ restent constantes puisqu'elles ne dépendent pas de la taille du portefeuille. Par conséquent, seule la partie diversifiable est affectée par l'augmentation de n , ce qui entraîne une légère diminution de la valeur totale du passif.

Sensibilité des valorisations par rapport à la maturité des contrats

Nous étudions maintenant l'effet de la maturité du contrat. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

T	BE	Deux étapes	Trois étapes
5	0.151647	0.182738	0.151863
7	0.173453	0.206399	0.173818
10	0.197363	0.231465	0.198039
12	0.209267	0.243718	0.210160
15	0.222666	0.255991	0.223948
17	0.229070	0.259550	0.230632
20	0.235609	0.259227	0.237704

TABLE 4.3 – Sensibilité des méthodes de valorisation à la maturité

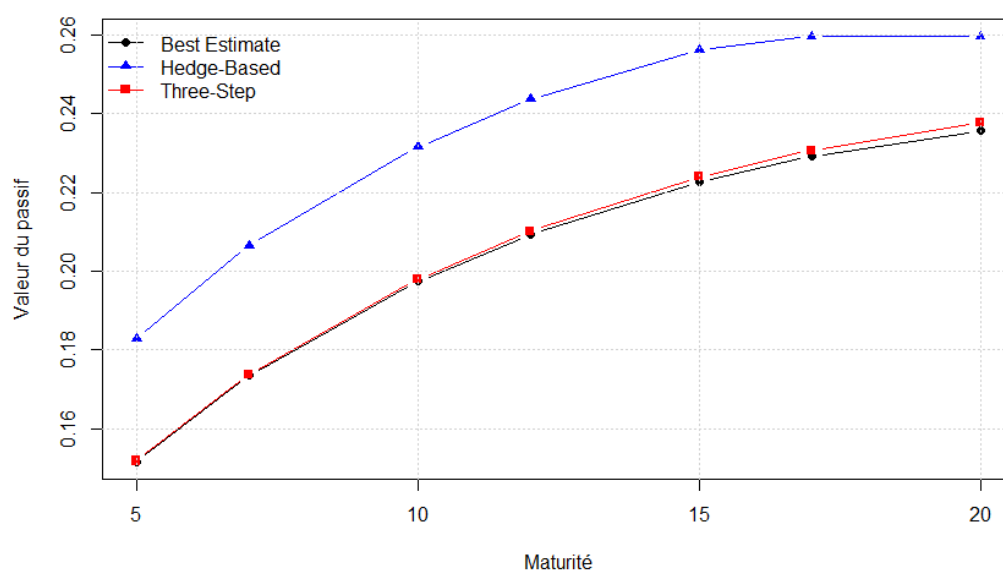


FIGURE 4.2 – Sensibilité des méthodes de valorisation à la maturité

Les résultats montrent que la valeur du passif augmente avec la maturité pour les trois méthodes de valorisation. Cette évolution s'explique par l'allongement de l'horizon du contrat, qui augmente l'exposition aux risques financiers et actuariels.

La méthode en deux étapes fournit systématiquement les valeurs les plus élevées, tandis que la méthode en trois étapes reste proche de la Best Estimate pour l'ensemble des maturités. Les différences observées entre les méthodes deviennent également plus marquées pour les maturités les plus longues.

Sensibilité des méthodes à la volatilité

σ	BE	Deux étapes	Trois étapes
0.08	0.076333	0.067275	0.077260
0.10	0.104676	0.100486	0.105953
0.12	0.133161	0.136588	0.134569
0.15	0.175658	0.185246	0.177596
0.18	0.217488	0.239560	0.219408
0.1932	0.235609	0.259227	0.237704
0.22	0.271731	0.297695	0.273947
0.25	0.311000	0.342737	0.313446
0.28	0.348877	0.380523	0.351454
0.30	0.373290	0.417784	0.375928

TABLE 4.4 – Sensibilité des méthodes de valorisation à la volatilité

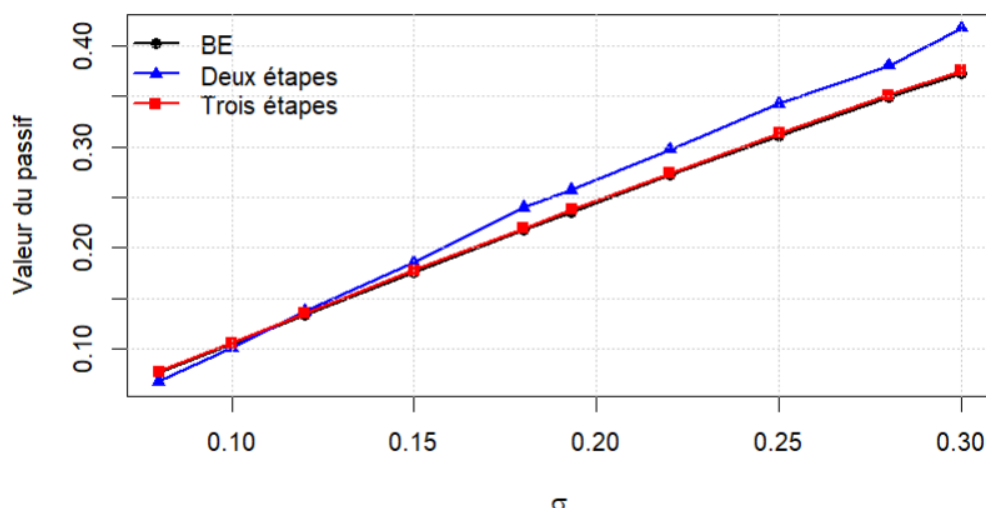


FIGURE 4.3 – Sensibilité des méthodes de valorisation à la volatilité

Les résultats montrent que la valeur du passif augmente avec la volatilité pour les trois méthodes de valorisation. Ce résultat est attendu pour un contrat GMMB, car une volatilité plus élevée accroît le coût de la garantie $(G - S_T)^+$.

Pour les niveaux de volatilité plus faibles, la méthode en deux étapes donne des valeurs légèrement inférieures à celles obtenues par la best estimate et la méthode en trois étapes. Lorsque la volatilité augmente, les valeurs obtenues par la méthode en deux étapes deviennent supérieures à celles des deux autres approches. La méthode en trois étapes reste quant à elle proche de la Best Estimate pour l'ensemble des niveaux de volatilité.

Conclusion générale

La valorisation des engagements d'assurance vie représente un enjeu important pour les assureurs car ils combinent à la fois risques financiers et actuariels. Cette double nature rend la détermination d'une valeur cohérente particulièrement complexe et justifie le développement de méthodes de valorisation adaptées.

Dans un premier temps, nous avons présenté les principaux concepts nécessaires à la compréhension de cette problématique. Une attention particulière a été accordée aux notions de *market-consistency*, d'*actuarial-consistency* et de *fair valuation*. L'étude de la littérature a également permis de mettre en évidence les limites des approches traditionnelles lorsqu'une partie des risques ne peut être couverte sur les marchés financiers.

L'objectif de ce mémoire était d'étudier des approches de valorisation permettant de répondre à cette problématique. Les méthodes analysées reposent sur l'idée qu'une valorisation pertinente des passifs d'assurance vie ne peut être obtenue sans tenir compte de différents risques présents dans le contrat.

Afin d'illustrer ces méthodes dans un cadre concret, nous avons étudié un contrat de type *Guaranteed Minimum Maturity Benefit* (GMMB). Ce produit constitue un exemple représentatif de contrat hybride puisque la prestation versée à l'échéance dépend à la fois de l'évolution d'un portefeuille financier et de la survie de l'assuré. L'application réalisée a permis de comparer une valorisation fondée sur une décomposition du passif en deux étapes à une valorisation reposant sur une décomposition en trois étapes.

Les résultats obtenus montrent que le choix de la méthode de valorisation influence directement l'évaluation du passif. Ils soulignent également l'importance du traitement réservé aux différentes composantes du risque dans la détermination de la valeur finale des engagements.

Ce mémoire met finalement en évidence que la valorisation des produits hybrides ne peut se limiter à une approche purement financière ou purement actuarielle. La prise en compte simultanée de ces deux dimensions apparaît essentielle pour obtenir une évaluation cohérente des passifs d'assurance vie. Dans ce contexte, les méthodes constituent des outils pertinents pour l'analyse et la valorisation des passifs.

Enfin, ces méthodes pourraient être appliquées à d'autres produits d'assurance vie. Une analyse plus approfondie de leur comportement sous diverses hypothèses relatives aux risques financiers et actuariels, notamment en ce qui concerne les interactions entre ces risques, constituerait également un prolongement intéressant de ce travail.

Bibliographie

- Barigou, K. & Delong, L. (2022), ‘Pricing equity-linked life insurance contracts with multiple risk factors by neural networks’, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **404**, 113922.
- Brennan, M. J. & Schwartz, E. S. (1976), ‘The pricing of equity-linked life insurance policies with an asset value guarantee’, *Journal of Financial Economics* **3**(3), 195–213.
- Brouhns, N., Denuit, M. & Vermunt, J. K. (2002), ‘A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables’, *Insurance : Mathematics and Economics* **31**(3), 373–393.
- Deelstra, G., Grasselli, M. & Van Weverberg, T. (2020), ‘A three-step valuation procedure for insurance liabilities in incomplete markets’, *Insurance : Mathematics and Economics* **95**, 294–304.
- Devolder, P. & Lebègue, A. (2017), ‘Iterated var or cte measures : A false good idea ?’, *Scandinavian Actuarial Journal* **2017**(4), 287–318.
- Dhaene, J., Barigou, K., Linders, D. & Vanden Bosch, P. (2017), ‘Fair valuation of insurance liabilities : Merging actuarial judgment and market-consistency’, *Insurance : Mathematics and Economics* **76**, 14–27.
- Malamud, S., Trubowitz, E. & Wüthrich, M. V. (2008), ‘Market consistent pricing of insurance products’, *ASTIN Bulletin* **38**(2), 483–526.
- Møller, T. (2002), ‘On valuation and risk management at the interface of insurance and finance’, *British Actuarial Journal* **8**(4), 787–827.
- Pelsser, A. & Stadje, M. (2014), ‘Time-consistent and market-consistent evaluations’, *Mathematical Finance* **24**(1), 25–65.
- Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2006), ‘A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors’, *Insurance : Mathematics and Economics* **38**(3), 556–570.
- Villegas, A. M., Kaishev, V. K. & Millossovich, P. (2018), ‘Stmomo : An r package for stochastic mortality modeling’, *Journal of Statistical Software* **84**(3), 1–38.

