

Faculté des sciences

École de Physique

IRMP

Fonctions de corrélation dans le modèle de dimères deux-périodique

Auteur :

Charles Massart

Lecteurs :

Prof. Jan Govaerts

Prof. Christian Hagendorf

Promoteur :

Prof. Philippe Ruelle

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique
de Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie

Année académique 2023-2024

Remerciements

Un grand merci, avant tout, au Prof. Philippe Ruelle. Pour sa patience à toute épreuve, que ce soit les nombreuses fois où je me suis égaré, ou encore celles où j'ai décidé de consacrer un temps déraisonnable à des sujets de moindre importance – qui a parlé de la fonction de partition deux-périodique? –. Mais aussi pour sa disponibilité presque constante, et son insistance à se voir régulièrement.

Mes remerciements vont aussi à son doctorant, Nicolas Robert. Pour les mêmes raisons, mais aussi pour ses conseils avisés et les calculs de vérification ou d'approfondissement qu'il a pu faire pour m'aider.

Enfin je me dois de remercier Mme. Elbakyan, grâce à qui la recherche et la lecture d'articles ont été autrement plus aisées et agréables qu'elles n'auraient pu l'être.

Table des matières

1	Le modèle de dimères	3
2	Le formalisme de Kasteleyn	9
3	Les fonctions de partition	15
	La fonction de partition deux-périodique	18
4	Fonctions de corrélation à deux points dans le cas uniforme	23
	Comment calculer K^{-1} ?	25
	Les symétries des fonctions de corrélation	29
	Les calculs de corrélation	31
5	Fonctions de corrélation à deux points dans le cas deux-périodique	35
	Trouver l'expression de K^{-1}	35
	Les symétries des fonctions de corrélation	40
	Les calculs de corrélation	43
6	Limite d'échelle et théorie des champs	53
A	Les intégrales elliptiques	59
B	La fonction de Bessel K_α	63

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons nous pencher sur le modèle de physique statistique communément appelé "modèle de dimères". C'est un modèle sur réseau, et en ce sens un cousin des célèbres modèle de Ising, modèle à 6 sommets et compagnie. Un cousin certes moins attrayant et donc moins populaire, mais non pas dénué d'intérêt pour autant ! Comme eux, il est aisément soluble mais assez pauvre en 1 dimension, et devient horriblement complexe pour les dimensions 3 et 4, les plus appropriées physiquement. Nous allons donc ici l'étudier en 2 dimensions, où il présente l'avantage d'être exactement soluble et de malgré tout exhiber un comportement critique intéressant. On se restreindra également au réseau rectangulaire, et à sa limite de volume infini.

Comme tout modèle statistique, celui-ci peut être équipé de poids de Boltzmann. La particularité de ce travail se trouve avant tout dans le choix des poids dont est équipé le modèle : au lieu des poids habituels et intuitifs, nous allons principalement travailler avec des poids appelés deux-périodiques. Ceci sera justifié a posteriori par le fait que le modèle possède un point critique, fonction des valeurs de ces poids statistiques, que nous nommerons a et b . Notre objectif final sera d'étudier ce que deviennent certaines observables sur le réseau à la limite d'échelle, et de trouver si elles peuvent être décrites par une théorie des champs candidate.

J'ai pour ambition, en écrivant ces pages, de maintenir le propos le plus simple et accessible possible. Aucune connaissance préalable du modèle ne sera supposée, et j'essaierai autant que possible de démontrer explicitement les résultats utilisés, ou à défaut d'en décrire les étapes. Une certaine connaissance de la physique statistique et des phénomènes critiques est par contre prérequis. Il va sans dire que c'est le cas de mes Lecteurs. Quant au pauvre hère qui aurait entamé la lecture de ce mémoire sans y être contraint et forcé, j'imagine volontiers que ce sera son cas également.

La structure que j'ai adoptée, et que j'espère être la plus naturelle à la lecture, est la suivante :

- Le chapitre 1 aura pour but d'introduire ce qu'est le modèle de dimères. D'abord du point de vue mathématique, le plus intuitif ; et ensuite d'un

point de vue physique en mentionnant rapidement l'histoire du modèle.

- Dans le chapitre 2, nous introduirons le formalisme mathématique avec lequel nous allons travailler. Au lieu de la fameuse technique de la matrice de transfert, nous utiliserons ici une méthode ingénieuse basée sur le pfaffien de la matrice d'adjacence du graphe.
- Dans le chapitre 3, nous détaillerons comment dériver la fonction de partition du modèle pour les poids (z_1, z_2) usuels. Nous décrirons ensuite nos efforts infructueux pour obtenir la fonction de partition munie des poids (a, b) .
- L'objectif du chapitre 4 sera l'étude des fonctions de corrélation à deux points entre les dimères, pour des poids statistiques uniformes. Les calculs y sont logiquement plus aisés que pour (a, b) quelconques. On remarquera que le régime y est critique : les décroissances des corrélations sont algébriques.
- Dans le chapitre 5, nous ferons pareil, tant bien que mal, avec les fonctions de corrélation à deux points dans le régime $a \neq b$.
- Enfin le chapitre 6 aura pour but d'étudier la limite d'échelle de nos fonctions de corrélation et de discuter brièvement de la théorie des champs sous-jacente.

Les calculs "novateurs" que nous avons effectué démarrent en seconde partie du chapitre 3. L'essentiel du travail a été de calculer les nombreuses fonctions de corrélation, en essayant de s'assurer de ne pas faire d'erreurs malencontreuses. Mais l'intérêt principal de ces calculs se trouve dans le fait d'essayer de les associer à une théorie des champs dans la limite d'échelle.

Chapitre 1

Le modèle de dimères

Avant de calculer des quantités diverses et variées et d'assommer les lecteurs d'expressions mathématiques, il serait de bon ton d'introduire le modèle sur lequel nous allons nous pencher. C'est donc ce à quoi nous allons nous atteler dans ce chapitre. Nous commençons par une approche purement mathématique, plus intuitive à mon sens. Nous mentionnerons ensuite l'histoire du modèle et ses applications physiques. Enfin nous parcourrons diverses mesures statistiques que l'on peut vouloir y associer.

Un problème de pavage

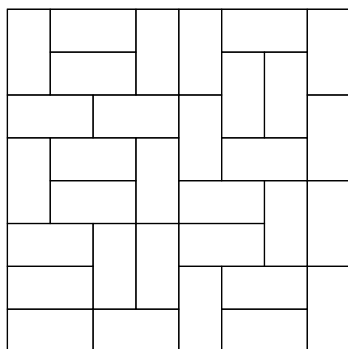
Supposez que vous disposiez de tuiles – ou pavés – de forme et de taille données. Supposez également que vous disposiez d'une surface que vous souhaiteriez voir recouverte par ces tuiles – le sol d'une cuisine, par exemple, ou une allée de jardin. Dans ces circonstances, tout à fait hypothétiques, une question évidente qui pourrait s'imposer à vous serait : est-il possible de complètement recouvrir cette surface à l'aide de ces tuiles, sans qu'elles ne se recouvrent à aucun endroit ?

Cette question anodine est en fait à l'origine d'une discipline mathématique : celle des pavages. Une discipline finalement assez vaste, car il existe autant de problèmes de pavage que de surfaces et de tuiles différentes. Bien entendu, plus un résultat est valable pour une grande classe de problème, plus il aura de la valeur. La généralisation la plus simple consiste certainement à considérer des tuiles et une forme de surface fixées mais de laisser l'aire de la surface variable. En plus du problème fondamental de l'existence du pavage, nombre de questions peuvent se poser, par exemple :

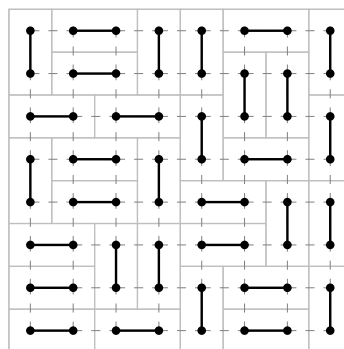
- Combien de pavages différents existent ?
- À quoi ressemble un pavage pris au hasard ?

et bien d'autres. Une introduction pédagogique aux problèmes de pavage, dont nous nous sommes inspirés, est donnée dans [1].

Choisissons à présent des tuiles spécifiques : des rectangles de dimension 1×2 . Les mathématiciens appellent ces tuiles des dominos, et les pavages des configurations de dominos. Un exemple de pavage possible sur un carré de taille 8×8 est donné ci-dessous. En le donnant, nous avons prouvé que la surface est pavable. Combien y a-t-il de configurations différentes ? Intuitivement, on peut se douter qu'elles sont très nombreuses, mais il n'y a pas de manière évidente de les compter. Nous reviendrons sur cette problématique dans un moment.



Une configuration de dominos



Couplage parfait sur le graphe associé

Voilà ce qu'est le modèle de dimères : un problème de pavage pour un choix de tuiles donné, les dominos. Le concept est donc très simple.

Une autre manière d'envisager ce problème de pavage est à travers son graphe associé. Nous pouvons découper notre surface en cases de taille 1×1 – si nous ne le pouvions pas, la surface serait trivialement impossible à paver. Construisons un graphe en associant à chaque case de la surface d'origine un sommet sur le graphe associé (ci-dessus représentés par des points noirs). Nous dessinons ensuite une arête entre chaque paire de sommets correspondant à des cases adjacentes (ci-dessus, les lignes pointillées). Sélectionner une configuration de dominos sur la surface revient alors à sélectionner les arêtes associées sur le graphe [2]. Nous avons la condition : toute la surface doit être pavée de tuiles sans qu'elles se recouvrent. Elle se traduit par : il faut choisir un ensemble d'arêtes de sorte que tous les sommets soient adjacents à une, et une seule, arête sélectionnée.

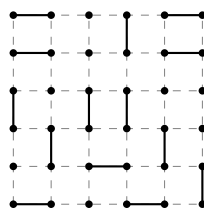
Un tel problème est bien connu en théorie des graphes : c'est celui du couplage parfait. Notre problème de pavage s'est donc réduit à un problème de théorie des graphes. Compter le nombre de configurations de dominos est équivalent à compter le nombre de couplages parfaits sur le graphe. Pour un graphe général, ce problème est P-complet [3]. Mais dans ce mémoire, nous ne travaillerons que sur les surfaces rectangulaires, qui correspondent à des graphes formant

un réseau quadratique. C'est donc une double restriction par rapport à un problème de pavage générique : nous fixons les tuiles et considérons une sous-catégorie très restreinte de surfaces.

Approche physique

Comme vous avez pu le constater, le vocabulaire employé est assez diversifié : des pavages de dominos, des couplages sur le graphe associé ou encore le modèle de "dimères". La raison en est simple, c'est que ce modèle basique est étudié dans diverses branches scientifiques, chacune avec sa propre façon d'envisager le problème. L'étude du modèle en physique statistique a démarré dans les années 30. C'est de la physique que vient le nom de dimère : les interprétations physiques du modèle se basent toutes, à ma connaissance, sur l'identification des couplages sur le graphe à des molécules composées de deux parties, c'est-à-dire des dimères (ces parties peuvent consister en un seul atome ou en des structures plus complexes).

En fait, à l'origine, le modèle d'intérêt était avant tout un modèle de monomères et de dimères. En terme de dominos, cela signifie que l'on considère deux types de tuiles : des rectangles 1×2 et des carrés 1×1 . On s'intéresse alors aux pavages contenant autant de tuiles qu'on le souhaite du premier ou du second type. En terme de graphes, cela revient à considérer des couplages entre les sommets, sans imposer que chaque sommet appartienne à un couplage (c'est-à-dire sans imposer que les couplages soient parfait). Un exemple en est donné ci-dessous.



Un configuration monomères-dimères

Il y a notamment deux applications physiques dans le cadre desquelles ce modèle est apparu :

- Il est possible d'interpréter les sommets du graphe comme des atomes formant un réseau cristallin (dans notre cas, un réseau quadratique). Puisque nous raisonnons en deux dimensions, ce réseau peut être vu comme la surface d'un cristal tri-dimensionnel. Soit un gaz de dimères. Les molécules qui le composent peuvent être adsorbées par les atomes de la surface du cristal, c'est-à-dire former des liaisons énergétiquement favorables avec les atomes du cristal (via l'interaction de Van der Waals par exemple). Faisons les hypothèses suivantes : les deux parties composant

les molécule de gaz sont adsorbées sur des sites voisins du réseau cristallin, et un site ne peut adsorber qu'une seule molécule à la fois. Alors une configuration de monomères-dimères correspond à une adsorption partielle du gaz : les monomères sont des atomes libres du cristal et les dimères des atomes liés à une molécule de gaz [4].

- Supposons que nous ayons un liquide constitué de molécules de tailles différentes, dont nous souhaitons étudier les propriétés thermodynamiques [5]. Supposons ensuite que les molécules du liquide ne peuvent se situer qu'en des points discrets formant un réseau. Si nous modélisons les molécules de petite taille comme occupant un sommet du réseau, et les molécules de grande taille comme occupant une paire de sommets voisins, nous retombons sur le modèle de monomères-dimères.

On pourra trouver une brève histoire du modèle, de ses applications et des principaux résultats dans [6]. Le modèle de monomères-dimères est largement plus intéressant physiquement que sa restriction aux dimères. L'application aux liquides composés de molécules de différentes tailles n'a plus de sens dans le modèle de dimères. Quant à l'adsorption, passer au modèle de dimères revient à considérer la limite dans laquelle chaque site de la surface du cristal est lié à une molécule de gaz. Cela décrit fort mal le phénomène d'adsorption dans un système réel. Pour résumer, en tant que modèle de systèmes physiques concrets, le modèle de dimères n'est pas particulièrement digne d'éloges.

Pourquoi ne pas plutôt étudier le modèle de monomères-dimères dans ce cas ? La raison est simple : le modèle est complexe. Pour s'en donner une idée, introduisons le concept de modèle exactement soluble. La quantité la plus fondamentale que l'on puisse calculer sur un modèle statistique est sa fonction de partition. On dira d'un modèle qu'il est exactement soluble si sa fonction de partition peut être calculée exactement (au moins dans la limite où le système est très grand)[7]. Le modèle de monomères-dimères est exactement soluble en une dimension [8]. Il ne l'est par contre pas en deux dimensions, alors que sa restriction aux dimères l'est. Les dimères seuls permettent donc d'effectuer de nombreux calculs rigoureusement, qui seraient irréalisables si l'on incluait les monomères. Un parallèle peut d'ailleurs être fait avec le modèle d'Ising [9]. Celui-ci est soluble en une dimension, même pour un champ magnétique non nul. Par contre, il n'est soluble en deux dimensions qu'en imposant que le champ magnétique vaille zéro.

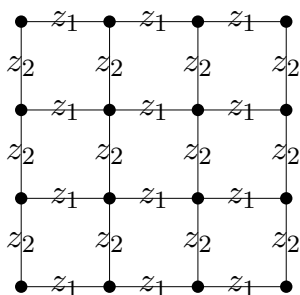
Un des grands mérites des modèles exactement solubles comme celui-ci se trouve dans l'étude de leurs comportements critiques. C'est ce à quoi nous nous proposons de contribuer dans ce mémoire.

Les poids statistiques

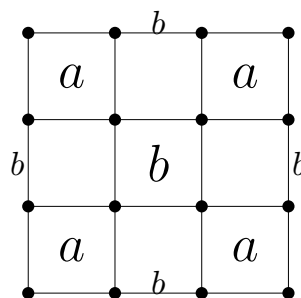
Introduisons la fonction de partition du modèle de dimères, que nous noterons $\mathcal{Z}$ – de l'allemand *Zustandssumme*. Posons que tous les états de notre système sont équiprobables, c'est-à-dire que toutes les configurations ont la même chance de se réaliser. Alors elle a pour expression

$$\mathcal{Z} = \sum_{\text{configurations}} 1 \quad (1.1)$$

Et elle compte le nombre d'états accessibles au système, c'est-à-dire le nombre de pavages différents (dans le langage du début de ce chapitre). Cela correspond à l'ensemble microcanonique de la physique statistique. Le modèle de dimères est alors appelé "uniforme". Nous pouvons aussi introduire des poids statistiques dans notre modèle : ceux-ci vont favoriser certaines configurations de dimères par rapport aux autres. La manière la plus simple de le faire est de séparer les dimères en catégories de poids différents : le poids d'une configuration est alors le produit des poids des dimères qui la constituent. Parmi tous les choix possibles, citons



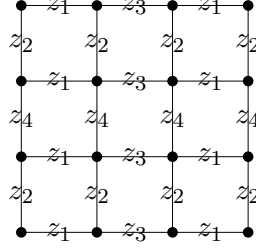
Poids horizontaux et verticaux



Poids deux-périodiques

- Une manière naturelle d'attribuer des poids aux dimères consiste à distinguer les dimères horizontaux, auxquels on attribue le poids z_1 , des dimères verticaux, de poids z_2 . C'est ce que représente la figure de gauche. L'interprétation en est simple : si $z_1 > z_2$, les configurations contenant de nombreux dimères horizontaux seront favorisées.
- Les poids dont nous allons exclusivement nous soucier sont donnés sur le dessin de droite. Nous attribuons aux faces du réseau la valeur a suivant une période de deux faces, dans les deux directions. Nous faisons pareil avec b , de sorte que chaque arête soit adjacente à une, et une seule, face portant un poids. Chaque arête – ou dimère – gagne alors le poids de la face qui lui est adjacente. Les arêtes du bord prennent le poids qu'elles auraient eu si le réseau était plus étendu.

- Il peut être intéressant d'introduire une série de quatre poids qui généralisent les deux types que nous venons d'énoncer [9]. Nous les avons dessinés ci-dessous. Remarquons que le choix $z_2 = z_4$ et $z_1 = z_3$ nous fait retomber sur les poids horizontaux et verticaux. Pareillement, $z_1 = z_2$ et $z_3 = z_4$ nous ramène au cas deux-périodique.



Généralisation à quatre poids

Notons que le modèle uniforme peut toujours s'obtenir à partir d'un de ces cas de figure en imposant que tous les poids soient égaux. Nous nous servirons de cette propriété à plusieurs reprises pour vérifier la cohérence de calculs : il faut retrouver les résultats uniformes lorsqu'on prend la limite de poids identiques.

Pour des poids quelconques, la fonction de partition devient

$$\mathcal{Z} = \sum_s w(s) \quad (1.2)$$

où s parcourt l'ensemble des états, ou configurations, et $w(s)$ est le poids statistique de la configuration s . Dans le cas deux-périodique par exemple, nous pouvons développer

$$\mathcal{Z}(a, b) = \sum_{N_a, N_b} g(N_a, N_b) a^{N_a} b^{N_b} \quad (1.3)$$

avec $g(N_a, N_b)$ le nombre de configurations contenant N_a dimères de type a et N_b dimères de type b . N_a, N_b parcourent les entiers sous la condition que $N_a + N_b$ soit le nombre de dimères nécessaire pour recouvrir le graphe.

Il est maintenant temps de voir comment effectuer des calculs sur ce modèle. C'est l'objectif du chapitre qui suit.

Chapitre 2

Le formalisme de Kasteleyn

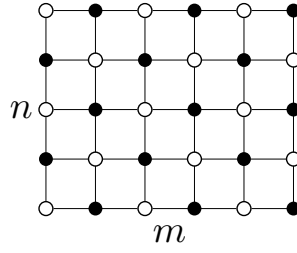
Nous allons développer ici le formalisme mathématique qui sera utilisé dans le reste de ce mémoire. Il est dû à Kasteleyn : celui-ci l'a introduit dans son article de 1961 [10] et s'en est servi dans le même temps pour calculer la fonction de partition du modèle muni des poids (z_1, z_2) . Nous prenons le parti de présenter les choses de la manière que l'on a jugée la plus intuitive possible, quitte à y sacrifier en rigueur et en généralité des développements.

Soulignons également que nous ne travaillerons plus avec l'interprétation en terme de dominos et de pavages, mais exclusivement à partir du graphe associé. Comme annoncé, et hormis certaines remarques ponctuelles, nous nous restreindrons aux graphes formant un réseau quadratique. Les vocabulaires de théorie des graphes et de physique seront utilisés de manière interchangeable : on parlera par exemple de sommets du graphe ou de sites du réseau et d'arêtes du graphe ou de dimères.

Soit donc un graphe formant un réseau quadratique de taille $m \times n$. Si m et n sont impairs, le graphe est trivialement impossible à recouvrir de dimères – il contient un nombre impair de sommets. Nous posons donc m pair, suivant la convention usuelle. Il est possible de colorier les sommets d'un tel graphe en deux couleurs de façon à ce que les sommets d'une couleur ne soient adjacents qu'à des sommets de la couleur opposée. Nous donnons un exemple de coloriage possible ci-dessous. Un graphe qui vérifie cette propriété est dit biparti. Nous allons voir que cette propriété simplifie la discussion subséquente.

Définissons un autre objet de la théorie des graphes. Supposons que nos sommets, appelons-les v , soient numérotés arbitrairement $v_1, \dots, v_{mn}$. La matrice d'adjacence A d'un graphe comme le nôtre à mn sommets est une matrice de taille $mn \times mn$ dont les entrées valent :

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ est adjacent à } v_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

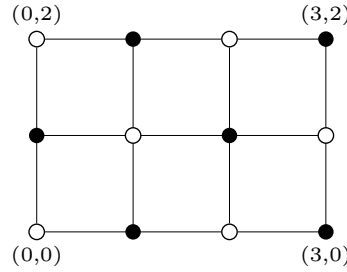


Coloriage d'un réseau quadratique de taille $m \times n$

Cette matrice d'adjacence est une représentation fidèle du graphe. Sa forme exacte dépend de la numérotation des sommets, mais deux graphes sont isomorphes ssi leurs matrices d'adjacence sont semblables. Dans le cas d'un graphe biparti, on peut l'écrire sous la forme

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{blancs} & \text{noirs} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{blancs} \\ \text{noirs} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A} \\ \tilde{A}^t & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.2)$$

où $\tilde{A}$ est la restriction de A aux lignes correspondant à des sommets blancs et aux colonnes correspondant à des sommets noirs. C'est donc une matrice de taille $\frac{mn}{2} \times \frac{mn}{2}$, que nous appellerons la matrice d'adjacence réduite. Afin de fixer les idées, nous donnons ci-dessous un exemple de réseau et de matrice d'adjacence réduite associée.



Réseau de taille 4×3

$$\tilde{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,0) & (3,0) & (0,1) & (2,1) & (1,2) & (3,2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (2,0) \\ (1,1) \\ (3,1) \\ (0,2) \\ (2,2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.3)$$

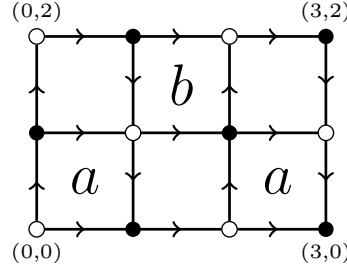
La première clé de la méthode de Kasteleyn est de réaliser que les termes non nuls du déterminant de la matrice d'adjacence réduite $\tilde{A}$ sont en correspondance un-pour-un avec les configurations de dimères sur le réseau, et ceci quelle que soit la numérotation. Pour le voir, écrivons la formule de Leibniz du déterminant

$$\det \tilde{A} = \epsilon_{i_1 \dots i_{\frac{mn}{2}}} A_{1, i_1} \dots A_{\frac{mn}{2}, i_{\frac{mn}{2}}} \quad (2.4)$$

où ϵ est le symbole de Levi-Civita et nous utilisons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. Chaque élément non nul de $\tilde{A}$ correspond au choix d'un sommet blanc et d'un sommet noir adjacents, c'est-à-dire d'un dimère. Le caractère alterné du symbole de Levi-Civita assure qu'il n'y ait pas de recouvrement de dimères. On peut donc voir que chaque terme non-nul du déterminant correspond à une configuration de dimères sur le réseau. Réciproquement, on peut associer à chaque configuration sur le réseau un terme dans le développement du déterminant. Donc le nombre de termes du déterminant de la matrice d'adjacence réduite est exactement le nombre de configurations accessibles, c'est-à-dire la fonction de partition uniforme.

Qui plus est, cela se généralise immédiatement à la présence de poids statistiques sur les arêtes : il suffit d'encoder le poids statistique correspondant à l'arête dans la matrice d'adjacence.

Mais il y a une difficulté : il est bien connu que le caractère alterné du déterminant introduit un signe dans chacun de ses termes, signe qui dépendra de la numérotation des sommets. Or, pour interpréter ce déterminant comme la fonction de partition, il faut que chaque terme soit compté avec un signe positif, ou en tout cas avec le même signe – il nous suffira de prendre la valeur absolue du déterminant. L'idée astucieuse de Kasteleyn pour parer à cela est d'introduire une orientation sur le réseau, c'est-à-dire associer un sens aux arêtes du graphes, que l'on représentera par des flèches sur les arêtes. On dit d'un tel graphe qu'il est dirigé. On modifie ensuite la matrice d'adjacence de la manière suivante. Choisissons la convention que les arêtes sont parcourues au départ des sommets correspondant aux lignes de $\tilde{A}$ (les sommets blancs, donc) vers les sommets correspondants aux colonnes de $\tilde{A}$ (les sommets noirs). La valeur du dimère dans la matrice d'adjacence sera assortie d'un signe "+" lorsque le sens de parcours de l'arête est le même que l'orientation de ladite arête, et du signe "-" lorsque le sens de parcours est opposé à son orientation. En assignant à notre exemple l'orientation et les poids donnés sur le dessin ci-dessous, la matrice d'adjacence est transformée comme suit.



Choix d'orientation et de poids sur l'exemple

$$\tilde{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,0) & (3,0) & (0,1) & (2,1) & (1,2) & (3,2) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (2,0) \\ (1,1) \\ (3,1) \\ (0,2) \\ (2,2) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & b & -b & 0 \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & -b & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & -b & a \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.5)$$

où nous avons appelé cette matrice d'adjacence réduite modifiée $\tilde{K}$, en présage de la suite.

Quelle orientation choisir pour un graphe donné afin de s'assurer que toutes les contributions au déterminant soient bien de même signe ? La seconde clé de la méthode de Kasteleyn est d'avoir réussi à trouver une condition sur les orientations qui assure que cela fonctionne. Pour un graphe biparti, celle-ci se traduit par [11]

Le long de tout cycle de longueur $2l$ sur le graphe, le nombre d'arêtes orientées d'un sommet noir vers un sommet blanc doit être de même parité que $(l+1)$.

Une orientation qui satisfait à cette condition est appelée **orientation de Kasteleyn**. Vous vous en douterez, l'orientation que nous avons choisie pour notre exemple est une orientation de Kasteleyn. Dans le même esprit, nous nommerons $\tilde{K}$ la matrice de Kasteleyn réduite.

Nous obtenons donc finalement le résultat fondamental :

$$\boxed{\mathcal{Z} = |\det \tilde{K}|} \quad (2.6)$$

À ce stade, il convient de faire quelques remarques

- Cette méthode ne fonctionne qu'à condition qu'il existe une orientation de Kasteleyn sur le graphe considéré. Kasteleyn lui-même a prouvé que c'était le cas pour tout réseau planaire [9], et donc a fortiori pour le réseau quadratique qui nous concerne. Quand bien même une orientation existe,

encore faut-il la trouver. Ce problème peut s'avérer fort délicat pour certaines catégories de graphe. Il ne l'est pas pour le réseau quadratique : il existe des orientations très simples valables pour n'importe quels m et n .

- En général, l'orientation de Kasteleyn ne sera pas unique, et par conséquent la matrice de Kasteleyn associée non plus. L'expression (2.6) et donc les quantités d'intérêt que l'on peut calculer sur le modèle sont bien entendu insensibles à l'arbitraire du choix d'orientation. Le but est donc de choisir une orientation la plus simple possible mathématiquement.
- Nous n'avons pas démontré la condition pour qu'une orientation soit de Kasteleyn. La démonstration n'est pas réellement difficile, mais elle est plutôt fastidieuse. Kasteleyn en démontre une version plus forte, qui n'est pas restreinte aux graphes bipartis, dans ses articles.

La matrice de Kasteleyn complète K , de taille $mn \times mn$, peut être directement extrapolée de $\tilde{K}$:

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{blancs} & \text{noirs} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{blancs} \\ \text{noirs} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K} \\ -\tilde{K}^t & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.7)$$

Rappelons que les dimères sont parcourus du sommet associé à l'indice de ligne vers le sommet associé à l'indice de colonne. Le signe "-" par rapport à (2.2) provient donc du fait que les arêtes sont parcourues dans le sens inverse de celui de $\tilde{K}$.

La matrice de Kasteleyn est donc une matrice antisymétrique. L'équation (2.6) implique qu'elle vérifie

$$\boxed{\mathcal{Z} = |\det \tilde{K}| = \sqrt{\det K}} \quad (2.8)$$

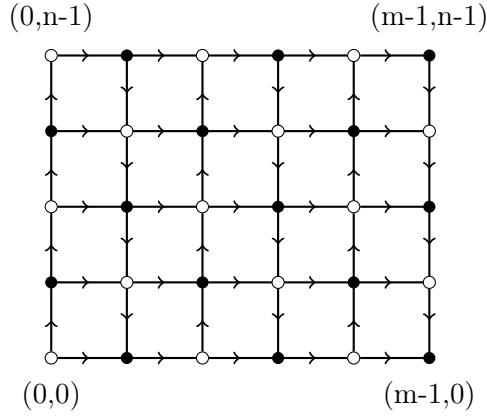
Nous utiliserons l'une ou l'autre formule en fonction de laquelle se prête le mieux aux calculs.

Nous avons dit au début de ce chapitre que nous allions sacrifier la généralité des développements au profit de l'aisance de l'explication. En fait, le formalisme de Kasteleyn n'est pas restreint aux graphes bipartis : il est valable pour n'importe quel graphe sur lequel une orientation de Kasteleyn existe. Je ne peux que chaudement recommander la lecture de l'article de Kasteleyn de 1963 [9], dans lequel il effectue la version généralisée des développements de ce chapitre, en plus d'établir des liens avec le modèle de Ising, et bien d'autres choses. Sa dérivation n'introduit donc pas la matrice réduite et son déterminant, mais se base plutôt sur les propriétés du Pfaffien, avec le résultat final

$$\mathcal{Z} = |\text{Pf}K| = \sqrt{\det K} \quad (2.9)$$

Enfin, il nous reste à présenter l'orientation de Kasteleyn avec laquelle nous allons systématiquement travailler, ainsi que l'expression de K pour cette orientation.

Celle-ci est très simple : nous orientons tous les dimères horizontaux de gauche à droite, et les dimères verticaux de bas en haut sur les colonnes de coordonnées x pair, et de haut en bas sur les colonnes de coordonnées x impair. C'est l'orientation usuelle, que l'on retrouve systématiquement pour le réseau quadratique, à la différence éventuelle du choix de parité pour les dimères verticaux. C'est aussi celle que nous avons utilisé dans notre exemple. Nous l'avons reproduite ci-dessous, sur un graphe que l'on imaginera de dimension quelconque.



Orientation de Kasteleyn usuelle

L'expression indicielle de la matrice de Kasteleyn uniforme se lit directement à partir du graphe.

$$K_{(x,y),(x',y')} = (\delta_{x+1,x'} - \delta_{x-1,x'}) \delta_{y,y'} + (-1)^x \delta_{x,x'} (\delta_{y+1,y'} - \delta_{y-1,y'}) \quad (2.10)$$

où (x, y) sont les coordonnées du premier sommet, et (x', y') celles du second. Cette notation correspond finalement à une vision plus abstraite de K : celle d'une application linéaire sur les sites du réseau. C'est cette vision qui sera souvent privilégiée par la suite.

Chapitre 3

Les fonctions de partition

La fonction de partition du modèle de dimères muni de poids horizontaux et verticaux (z_1, z_2) a été obtenue indépendamment par Kasteleyn [10] et Temperley et Fisher [12] en 1961, sur base du formalisme du chapitre précédent. Nous en réécrivons ici la dérivation et le résultat. Nous essayons ensuite d'appliquer la même méthode au calcul de la fonction de partition munie des poids deux-périodiques.

Soit donc un réseau quadratique de taille $m \times n$. Nous utiliserons dans ce chapitre une notation légèrement différente de notre habitude. Nous numérotions les sommets de $(1, 1)$ à (m, n) . L'indice k parcourra la coordonnée horizontale $1 \leq k \leq m$ et l'indice l parcourra la coordonnée verticale $1 \leq l \leq n$. Rappelons également que nous avons posé m pair. L'expression indiciale de $K(z_1, z_2)$ est la généralisation immédiate de celle que l'on a obtenue dans le cas uniforme

$$K_{(k,l),(k',l')} = z_1 (\delta_{k+1,k'} - \delta_{k-1,k'}) \delta_{l,l'} + z_2 (-1)^k \delta_{k,k'} (\delta_{l+1,l'} - \delta_{l-1,l'}) \quad (3.1)$$

Associée à la formule

$$\mathcal{Z}_{mn}^2(z_1, z_2) = \det K \quad (3.2)$$

que nous avons dérivée au chapitre précédent, elle nous fournit tous les ingrédients nécessaires au calcul de la fonction de partition. L'équation (3.1) nous indique que la matrice de Kasteleyn s'exprime naturellement sous forme d'une somme de deux produits directs (aussi appelés produits de Kronecker) d'une matrice de taille $m \times m$ et d'une matrice de taille $n \times n$.

$$K = z_1 (Q_m \otimes \mathbb{I}_n) + z_2 (F_m \otimes Q_n) \quad (3.3)$$

où les indices indiquent bien entendu la taille de la matrice, et $\mathbb{I}$ est la matrice identité. Nous avons les expressions explicites

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons faire usage d'une propriété du déterminant : il est invariant sous conjugaison. Cela signifie que, pour une matrice A inversible, $\det A^{-1}KA = \det K$. Il s'agit donc d'essayer de simplifier notre expression (3.3) en la conjuguant par une matrice appropriée. Un choix évident est de considérer la matrice des vecteurs propres de Q . Celle-ci va diagonaliser Q , et simplifier l'expression pour peu que son action sur F ne la perturbe pas trop.

La matrice Q est une matrice de Toeplitz tridiagonale. Tridiagonale car elle ne possède d'éléments non nuls que sur la diagonale principale et ses voisines directes. De Toeplitz car tous les éléments sur une diagonale (de gauche à droite) donnée sont les mêmes. Ces matrices et leurs propriétés sont bien connues des mathématiciens. Soit donc

$$U_n(l, l') = \sqrt{\frac{2}{n+1}} i^l \sin \frac{ll'\pi}{n+1} \quad (3.4)$$

$$U_n^{-1}(l, l') = \sqrt{\frac{2}{n+1}} (-i)^{l'} \sin \frac{ll'\pi}{n+1} \quad (3.5)$$

On pourra vérifier que $\tilde{Q}_n = U_n^{-1}Q_nU_n$ est diagonale, avec pour entrées les valeurs propres

$$\tilde{Q}_n(l, l') = 2i \delta_{l,l'} \cos \frac{\pi l}{n+1} \quad (3.6)$$

L'action de la conjugaison sur F la rend simplement antidiagonale

$$(U_m^{-1}F_mU_m)(k, k') = -\delta_{k+k', m+1} \quad (3.7)$$

Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \bar{K}(k, l; k', l') &= (U_m^{-1} \otimes U_n^{-1}) K (U_m \otimes U_n)(k, l; k', l') \\ &= 2i z_1 \cos \frac{\pi l}{m+1} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'} - 2i z_2 \cos \frac{\pi k}{n+1} \delta_{k,k'} \delta_{l+l', m+1} \end{aligned}$$

La matrice résultante est diagonale dans l'espace des k , mais pas dans l'espace des l . À l'aide de permutations et de la propriété $\cos \pi - \theta = -\cos \theta$,

on peut réécrire la matrice sous forme diagonale par blocs de taille 2×2 et finalement obtenir

$$\det K = \det \bar{K} = \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^n \begin{vmatrix} 2iz_1 \cos \frac{\pi k}{m+1} & -2iz_2 \cos \frac{\pi l}{n+1} \\ -2iz_2 \cos \frac{\pi l}{n+1} & -2iz_1 \cos \frac{\pi k}{m+1} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

D'où

$$Z_{mn}(z_1, z_2) = 2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^n \sqrt{z_1^2 \cos^2 \frac{\pi k}{m+1} + z_2^2 \cos^2 \frac{\pi l}{n+1}} \quad (3.9)$$

Cette élégante formule nous donne la fonction de partition pour n'importe quelle taille de réseau et n'importe quels poids horizontaux et verticaux. A fortiori, pour $z_1 = z_2 = 1$, elle nous permet de compter le nombre de configurations différentes de dimères sur le graphe, et donc de pavages de dominos sur la surface associée. Elle répond en cela à une question que l'on s'était posée au chapitre 1. Notons également que, le nombre de configurations étant un entier, le membre de droite de (3.9) – en négligeant les poids statistiques – doit l'être aussi pour toutes valeurs de m, n .

Du point de vue de la physique statistique, nous sommes surtout intéressés par l'énergie libre à la limite thermodynamique, c'est-à-dire la limite où la taille du réseau devient infinie. Soit l'énergie libre par site f [12]

$$(-\beta f)(z_1, z_2) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \ln Z_{mn}(z_1, z_2) \quad (3.10)$$

où β est la température inverse. Il n'échappera pas au lecteur que nous n'avons pas pour le moment défini de notion de température sur le modèle. En fait, les poids statistiques peuvent être vu comme des activités, fonctions de la température du système. Mais le peu de liens du modèle de dimères avec les situations expérimentales physiques fait qu'il est généralement plus naturel d'adopter un point de vue plus mathématique et de définir les poids statistique comme la quantité fondamentale.

Que va valoir cette énergie libre ? Les produits vont devenir des sommes sous l'action du logarithme. On peut en fait remarquer que cette limite infinie de sommes est la même que dans la définition de l'intégrale de Riemann. Cela nous conduit à l'identification

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{l=1}^n f\left(\frac{\pi l}{n+1}\right) = \int_0^\pi f(t) dt \quad (3.11)$$

Nous obtenons alors

$$(-\beta f)(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \ln[4z_1^2 \cos^2 \theta + 4z_2^2 \cos^2 \varphi] \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \ln[2z_1^2 + z_2^2 - z_1^2 \cos \theta - z_2^2 \cos \varphi] \quad (3.13)$$

L'équation (3.13) n'est singulière pour aucune valeur du rapport z_1/z_2 . Le système ne présente donc pas de "transition de phase" pour ces poids. Nous utilisons les guillemets car il serait difficile d'imaginer associer une transition de phase d'un système physique observable aux discontinuités mathématiques que le modèle pourrait présenter. L'équation (3.13) est très semblable à celle que Onsager a obtenue pour l'énergie libre du modèle de Ising à champ nul sur réseau quadratique [13]

$$(-\beta f)(J_1, J_2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta d\varphi \ln[\cosh 2\beta J_1 \cosh 2\beta J_2 - \sinh 2\beta J_1 \cos \theta - \sinh 2\beta J_2 \cos \varphi] \quad (3.14)$$

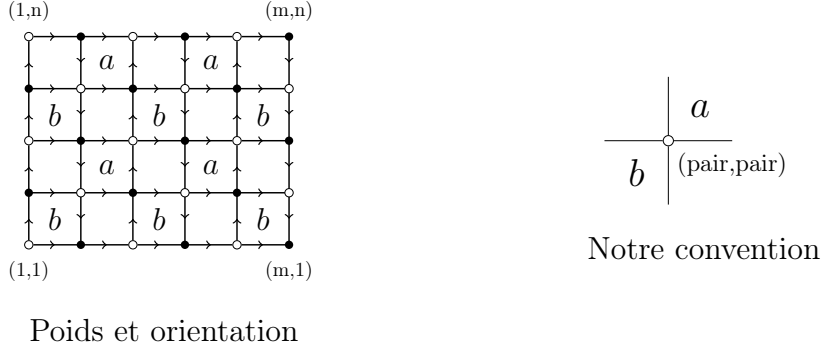
où nous avons négligé un terme constant. Le point critique du modèle de Ising satisfait

$$\sinh 2\beta J_1 \sinh 2\beta J_2 = 1 \quad (3.15)$$

Il est possible de montrer que, lorsque l'on pose $z_1 = \sinh 2\beta J_1$ et $z_2 = \sinh 2\beta J_2$, l'énergie libre (3.13) est la même que (3.14) à son point critique, à des termes inintéressants près [9]. Cela établit une correspondance formelle entre le modèle de Ising uniforme à son point critique et le modèle de dimères uniforme. La distinction entre dimères horizontaux et verticaux est l'équivalent de celle entre interactions horizontales et verticales dans le modèle de Ising.

La fonction de partition deux-périodique

Nous allons essayer d'utiliser les mêmes méthodes pour trouver la fonction de partition deux-périodique. L'orientation de Kasteleyn et les poids sont rappelés sur le graphe de gauche ci-dessous. Il y a une remarque importante qu'il convient de faire concernant les poids deux-périodiques. La manière de les attribuer aux faces du réseau n'est pas unique : il y a quatre façons différentes de répartir les poids a et b . Nous ferons systématiquement le choix que les sommets de coordonnées $(pair, pair)$ soient munis du point a dans le premier cadran – voir le schéma de droite ci-dessous. Cela nous permettra de conserver toujours la même expression pour notre matrice de Kasteleyn. Mais il est important de noter que la fonction de partition dépendra de ce choix d'agencement des poids. On peut intuitivement se convaincre que plus le réseau sera grand, plus ces différences seront gommées jusqu'à converger vers la même fonction de partition à la limite infinie.



La forme indicielle de la matrice de Kasteleyn se lit à nouveau à partir du graphe, quoiqu'un peu moins aisément.

$$K_{(k,l),(k',l')} = \{ \delta_{k+1,k'} (a\delta_{k,pair} + b\delta_{k,impair}) - \delta_{k-1,k'} (a\delta_{k,impair} + b\delta_{k,pair}) \} \delta_{l,l'} \\ + (-1)^k \delta_{k,k'} \{ \delta_{l+1,l'} (a\delta_{l,pair} + b\delta_{l,impair}) - \delta_{l-1,l'} (a\delta_{l,impair} + b\delta_{l,pair}) \} \quad (3.16)$$

L'expression est moins élégante que précédemment. Nous pouvons malgré tout l'écrire sous forme d'une somme de produits directs, comme ceci

$$K = (S_m \otimes \mathbb{K}_n) + (F_m \otimes S_n) \quad (3.17)$$

où F est la même matrice que précédemment. Explicitement

$$S_{pair} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b & 0 \end{pmatrix} \quad S_{impair} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Deux complications sautent aux yeux. La première est que les poids (a, b) sont présents à l'intérieur des matrices au lieu de se factoriser comme pour (z_1, z_2) . Cela ne peut que compliquer la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres. La seconde complication est que l'expression de S dépend de la parité de sa dimension. Nous avons déjà posé m pair. Mais cela implique que le traitement de n pair et de n impair sera fondamentalement différent.

Notons en passant que nous pourrions séparer S en somme de matrices de façon à ne travailler qu'avec des matrices contenant des 0 et des 1. Le prix en serait que K devienne la somme de quatre produits directs, dans lesquels deux matrices non diagonales différentes apparaissent. Le souci est ensuite de

trouver une conjugaison qui simplifie l'expression : cela n'a pas l'air faisable. Conjuguer par les vecteurs propres d'une des deux matrices rend l'expression de l'autre fort complexe.

Nous aimerions donc calculer les valeurs propres et vecteurs propres de S . Un point important à cet égard est que pour $a = b$, $S = aQ$. Nous savons donc déjà que les valeurs et vecteurs propres vont être des expressions plus complexes qui se réduiront à (3.4)-(3.6) lorsque nous supprimerons les poids statistiques. Les valeurs propres de S peuvent être obtenues comme solutions du polynôme caractéristique $p_S(\lambda) := \det \lambda \mathbb{K} - S$. On montre facilement que ce polynôme vérifie la relation de récurrence

$$p_{S_n}(\lambda) = (\lambda^2 + a^2 + b^2) p_{S_{n-2}}(\lambda) - a^2 b^2 p_{S_{n-4}}(\lambda) \quad (3.18)$$

Il nous faut donc considérer quatre expressions différentes, en fonction de la valeur de $n \bmod 4$. Nous écrivons $n = 4d + \alpha$, avec $0 \leq \alpha \leq 3$. Définissons $\rho := \lambda^2 + a^2 + b^2$. Pour les cas impairs nous obtenons

$$\begin{aligned} p_{S_{4d+1}}(\lambda) &= \lambda \sum_{k=0}^d \rho^{2(d-k)} (-a^2 b^2)^k \binom{2d-k}{k} \\ p_{S_{4d+3}}(\lambda) &= \lambda \rho \sum_{k=0}^d \rho^{2(d-k)} (-a^2 b^2)^k \binom{2d-k+1}{k} \end{aligned}$$

Pour les cas pairs, les expressions sont plus complexes mais peuvent être écrites de manière compacte en les manipulant à l'aide du triangle de Pascal.

$$p_{S_n}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (\lambda^2 + b^2) p_{S_{n-1}}(\lambda) - \frac{a^2 b^2}{\lambda} p_{S_{n-3}}(\lambda) \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

Cette complexité accrue provient de l'asymétrie entre le nombre de a et de b dans l'expression de S . Concentrons-nous d'abord sur les cas impairs. Ceux-ci se résolvent facilement. Posons $\gamma = \frac{\rho}{ab}$. Alors

$$p_{S_{4d+1}}(\lambda) = \lambda (ab)^{2d} \sum_{k=0}^d \gamma^{2(d-k)} (-1)^k \binom{2d-k}{k}$$

Les poids n'apparaissent plus dans la somme lorsque le polynôme est exprimé en terme de γ ! Nous pouvons donc utiliser les résultats obtenus dans le cas uniforme pour obtenir les valeurs propres en fonction de γ et puis remplacer celui-ci par son expression $\gamma(\lambda) = \frac{\lambda^2 + a^2 + b^2}{ab}$. La procédure est la même pour les deux cas impairs, et les valeurs propres sont

$$\lambda_l = \begin{cases} i \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \cos^2 \frac{\pi l}{n+1}} & \text{pour } l \in [1, \frac{n-1}{2}] \\ 0 & \text{pour } l = \frac{n+1}{2} \\ -i \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \cos^2 \frac{\pi l}{n+1}} & \text{pour } l \in [\frac{n+3}{2}, n] \end{cases} \quad (3.19)$$

Malheureusement, en dépit de tous mes efforts, il n'a pas été possible de trouver d'expression générale pour les valeurs propres lorsque n est pair. Il n'est d'ailleurs pas dit que cela soit possible. Peut-être n'existe-t-il pas d'expression générale pour la fonction de partition deux-périodique de taille finie. Notons en passant que, si nous arrivions à trouver ces valeurs propres, plus aucune difficulté ne se présenterait. En effet, nous n'aurions pas besoin de trouver les vecteurs propres associés, mais seulement l'action de leur conjugaison sur F . Or, on peut prouver sans difficulté que cette action est la même que dans le cas uniforme : F devient antidiagonale. Il suffit pour cela de remarquer que les vecteurs propres ne possèdent qu'une composante indépendante et que l'action de F sur un tel vecteur l'envoie sur l'espace de la valeur propre opposée.

Quand bien même la fonction de partition à taille finie serait indériverable, rien n'indique que ce soit le cas de son approximation à la limite thermodynamique. Faisons la **conjecture** suivante : pour n pair, à la limite $n \rightarrow \infty$, les valeurs propres sont données par

$$\lambda_l = \begin{cases} i\sqrt{(a-b)^2 + 4ab \cos^2 \frac{\pi l}{n+1}} & \text{pour } l \in [1, \frac{n}{2}] \\ -i\sqrt{(a-b)^2 + 4ab \cos^2 \frac{\pi l}{n+1}} & \text{pour } l \in [\frac{n+1}{2}, n] \end{cases} \quad (3.20)$$

sans que l'on puisse fournir de preuve. Mais une étude heuristique du problème conduit assez naturellement à cette conjecture. L'intuition derrière celle-ci est la suivante : plus le réseau est grand, moins l'asymétrie de S en a et b se fait ressentir dans le spectre de la matrice. Les valeurs propres convergent alors vers le même type d'expression que dans le cas impair. À une exception notoire près : la valeur propre $\lambda = 0$ du cas impair qui a un statut particulier. Cette conjecture redonne bien entendu les bonnes valeurs propres à la limite uniforme.

Armés de ceci, nous pouvons calculer l'hypothétique fonction de partition

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_{mn}(a,b) = 2^{\frac{m(n-1)}{2}} a^{m/2} \prod_{k=1}^{m/2} \prod_{l=1}^{(n-1)/2} \left[\frac{(a-b)^2}{2} + ab \cos^2 \frac{\pi k}{m+1} + ab \cos^2 \frac{\pi l}{n+1} \right]$$

où nous avons posé n impair. Nous retrouvons à nouveau le résultat correct à la limite uniforme. L'énergie libre par site associée est donnée par

$$(-\beta f)(a,b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\varphi \ln[2a^2 + 2b^2 - 2ab \cos \theta - 2ab \cos \varphi] \quad (3.21)$$

à un terme constant près. On peut à nouveau comparer l'énergie libre obtenue (3.21) à celle du modèle de Ising (3.14). Si nous identifions $b/a = \sinh 2\beta J$, alors cette énergie est essentiellement la même que celle du modèle de Ising isotrope, mais à température quelconque ! En particulier, la transition de phase

du modèle de Ising à la température critique T_c correspond à une "transition de phase" dans le modèle de dimères située en $a = b$. L'insertion des poids deux-périodiques dans le modèle de dimères engendre donc mathématiquement une transition de phase! Celle-ci est un peu particulière : au lieu d'avoir une phase ordonnée et l'autre désordonnée comme dans le modèle de Ising, les deux phases sont ici symétriques sous l'échange de a et b .

Il serait logique que l'introduction des quatre poids statistiques généralisant à la fois (z_1, z_2) et (a, b) – cfr. le Chapitre un – permette une correspondance totale avec l'énergie libre du modèle de Ising anisotrope. Kasteleyn écrivait en fait déjà à ce sujet en 1963 [9].

Chapitre 4

Fonctions de corrélation à deux points dans le cas uniforme

Entrons à présent dans le cœur du sujet de ce mémoire : le calcul des fonctions de corrélation entre deux dimères quelconques. Nous allons les calculer ici dans le cas uniforme, c'est-à-dire lorsque les poids statistiques sont tous les mêmes. Le chapitre suivant sera consacré au cas plus complexe des poids deux-périodiques, mais les étapes du raisonnement mathématique seront identiques à celles décrites ici. Nous nous restreindrons dans ce mémoire au calcul des corrélations dans la limite où le réseau est de volume infini. Physiquement, cela revient à imaginer que les bords sont tellement éloignés qu'ils n'ont plus aucune influence sur les quantités que l'on calcule. Cette restriction simplifie grandement le problème : nous aurons notamment accès à un bel éventail de symétries sur nos fonctions de corrélation.

C'est un résultat bien connu de mécanique statistique que la valeur moyenne de p observables O peut s'exprimer à partir de la fonction de partition comme :

$$\langle \prod_{i=1}^p O_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_s \left(\prod_{i=1}^p O_i(s) \right) w(s) \quad (4.1)$$

où s parcourt les différentes configurations possibles du système, et $w(s)$ est le poids de Boltzmann de l'état s – on pourra par exemple consulter [7]. Rappelons qu'une configuration du système consiste en un ensemble de dimères tel que les conditions géométriques soient satisfaites, à savoir que les dimères ne se chevauchent pas et que le réseau soit complètement recouvert. Un dimère D peut être représenté par une fonction caractéristique

$$\chi_D(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } D \in s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

La probabilité qu'une configuration contienne p dimères $D_1, \dots, D_p$ peut alors s'écrire

$$\langle \prod_{i=1}^p D_i \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_s \left(\prod_{i=1}^p \chi_{D_i}(s) \right) w(s) \quad (4.3)$$

En effet, de par leur expression, les fonctions caractéristiques agissent en sélectionnant uniquement les configurations dans lesquelles les p dimères sont présents. En normalisant à l'aide de la fonction de partition, nous trouvons donc bien la probabilité qu'une configuration contienne tous ces dimères.

Nous avons détaillé dans le chapitre 2 le fait que la fonction de partition pouvait s'écrire en termes d'une matrice de Kasteleyn K comme $\mathcal{Z} = \sqrt{\det K} = |\det \tilde{K}|$. Rappelons que le réseau quadratique étant biparti, il existe un coloriage des sommets en deux couleurs, noir et blanc, de telle sorte que chaque sommet ne soit adjacent qu'à des sommets de couleur opposée. Nous avons choisi la convention selon laquelle les sommets de coordonnées (pair,pair) et (impair,impair) sont blancs et les sommets de coordonnées (pair,impair) et (impair,pair) sont noirs. Ce coloriage est bien entendu arbitraire : nous aurions pu choisir l'inverse. Chaque dimère D correspond au choix d'une paire de sommets adjacents sur le réseau : un sommet blanc que nous noterons $B(D)$ et un sommet noir $N(D)$. La matrice de Kasteleyn réduite $\tilde{K}$ a pour lignes les sommets blancs du réseau et pour colonnes les sommets noirs. Chaque entrée $K_{(x,y),(x',y')}$ non nulle est associée à un dimère D , avec $(x,y) = B(D)$ et $(x',y') = N(D)$. La présence des fonctions caractéristiques dans (4.3) revient donc à sélectionner les entrées des dimères concernés et à prendre le déterminant de la sous-matrice de $\tilde{K}$ restante après avoir retiré les lignes et les colonnes associées aux dimères $D_1 \dots D_p$. Appelons cette sous-matrice $\tilde{K}^*$. Alors

$$\langle \prod_{i=1}^p D_i \rangle = \frac{1}{|\det \tilde{K}|} \left| \prod_{i=1}^p K_{B(D_i), N(D_i)} \right| |\det \tilde{K}^*| \quad (4.4)$$

Nous pouvons encore simplifier sensiblement l'expression. Le déterminant peut être vu comme une somme de termes, selon la formule de Leibniz. Par construction, dans une matrice de Kasteleyn, tous ces termes sont de même signe. Le numérateur est simplement un sous-ensemble des termes du dénominateur, nommément ceux qui contiennent les dimères $D_1 \dots D_p$. Donc le signe global du dénominateur et du numérateur est le même, et les valeurs absolues sont redondantes dans l'expression. D'autre part, le $\det \tilde{K}^*$ est appelé en algèbre un mineur de la matrice $\tilde{K}$. Nous allons utiliser un résultat sur les mineurs communément appelé le lemme de Jacobi. Le lecteur intéressé pourra en trouver l'énoncé et la démonstration dans [14] ou encore dans l'appendice A de [15]. Appliqué à notre équation, ce lemme affirme que

$$\det \tilde{K}^* = \det \tilde{K} \det(K_{N(D_i), B(D_j)}^{-1})_{1 \leq i, j \leq p} \quad (4.5)$$

Grâce à lui, nous obtenons finalement

$$\left\langle \prod_{i=1}^p D_i \right\rangle = \left(\prod_{i=1}^p K_{B(D_i), N(D_i)} \right) \det(K_{N(D_i), B(D_j)}^{-1})_{1 \leq i, j \leq p} \quad (4.6)$$

Ce résultat assez élégant nous provient en fait de Richard Kenyon [2]. Nous souhaitons en donner une esquisse de preuve car il est à la base de l'entièreté des calculs de ce chapitre et du suivant. Il est valable pour n'importe quel réseau biparti, n'importe quels poids statistiques ou encore choix de matrice de Kasteleyn. Cerise sur le gâteau, Kenyon nous affirme qu'il reste vrai pour des réseaux de taille infinie. Nous le croirons sur parole.

Comme nous l'avons dit, nous nous contenterons de calculer des fonctions de corrélation à deux dimères. Pour cela, observons que nous aurons besoin d'éléments de K^{-1} de deux types. Soit entre deux sommets adjacents (lorsqu'ils correspondent aux extrémités du même dimère) ; soit entre deux sommets très éloignés (lorsqu'ils correspondent aux extrémités de dimères différents). La question naturelle qui se pose maintenant est

Comment calculer K^{-1} ?

Rappelons l'expression indicielle de K pour l'orientation de Kasteleyn usuelle

$$K_{(x,y),(x',y')} = (\delta_{x+1,x'} - \delta_{x-1,x'}) \delta_{y,y'} + (-1)^x \delta_{x,x'} (\delta_{y+1,y'} - \delta_{y-1,y'}) \quad (4.7)$$

A première vue, il n'est pas évident de trouver la manière de l'inverser. Mais il y a une astuce [16]. Calculons le carré de cette matrice. À taille finie

$$\begin{aligned} K_{(x,y),(x',y')}^2 &= \sum_{(x'',y'')} K_{(x,y),(x'',y'')} K_{(x'',y''),(x',y')} \\ &= \{\delta_{x+2,x'} + \delta_{x-2,x'} - \delta_{x,x'}(2 - \delta_{x,1} - \delta_{x,m})\} \delta_{y,y'} \\ &\quad + \delta_{x,x'} \{\delta_{y+2,y'} + \delta_{y-2,y'} - \delta_{y,y'}(2 - \delta_{y,1} - \delta_{y,n})\} \end{aligned}$$

où $1 \leq x \leq m$ et $1 \leq y \leq n$.

Il y a une remarque intéressante à faire ici. Nous avons expliqué au chapitre 2 que la matrice de Kasteleyn était en fait une matrice d'adjacence modifiée sur le graphe du réseau. Or les matrices d'adjacence vérifient la propriété suivante :

Soit la matrice d'adjacence A d'un graphe quadratique. L'élément $A_{(x,y),(x',y')}^k$ est le nombre de parcours de longueur k allant de (x,y) à (x',y') .

Les matrices de Kasteleyn vérifient toujours cette propriété, à condition de tenir compte des signes dus à l'orientation et des poids sur les arêtes. En plus de

donner une élégante interprétation à ces matrices, cette propriété nous aurait donc permis de trouver K^2 sans réels calculs.

Revenons-en à notre propos. Comme nous souhaitons calculer les corrélations dans le plan $\mathbb{Z}^2$, nous ignorons les termes de bord et laissons x et y parcourir les entiers. Nous obtenons donc

$$K_{(x,y),(x',y')}^2 = (\delta_{x+2,x'} + \delta_{x-2,x'}) \delta_{y,y'} + \delta_{x,x'} (\delta_{y+2,y'} + \delta_{y-2,y'}) - 4 \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} \quad (4.8)$$

L'expression est plus simple. Elle ne dépend plus des coordonnées du réseau que via les différences $(x' - x)$ et $(y' - y)$. Remarquons que cette application linéaire laisse de plus la parité des sommets invariante : appliquée à un sommet (x, y) de parité donnée, disons (p, p) pour fixer les idées, elle l'envoie sur des sommets situés en $(x + 2, y), (x - 2, y), (x, y + 2), (x, y - 2)$ et (x, y) , tous de la même parité (p, p) . Cet opérateur peut donc être écrit sous forme de somme directe d'opérateurs sur chaque sous-réseau :

$$K^2 = K_{pair,pair}^2 \oplus K_{pair,impair}^2 \oplus K_{impair,pair}^2 \oplus K_{impair,impair}^2 \quad (4.9)$$

En fait, ces quatre opérateurs sur les sous-réseaux sont simplement les opposés de Δ , l'opérateur Laplacien discret sur le réseau quadratique [17].

$$K^2 = -\{\Delta_{pair,pair}^2 \oplus \Delta_{pair,impair}^2 \oplus \Delta_{impair,pair}^2 \oplus \Delta_{impair,impair}^2\} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta(x' - x, y' - y) &= 4 \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} - (\delta_{x+1,x'} + \delta_{x-1,x'}) \delta_{y,y'} \\ &\quad - \delta_{x,x'} (\delta_{y+1,y'} + \delta_{y-1,y'}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Notons qu'il y a l'une ou l'autre subtilité. D'abord, la différence de signe. Ensuite, et surtout, un pas de un le long d'un des sous-réseaux correspond à un pas de deux le long de notre réseau d'origine. D'où la différence d'expression du Laplacien discret. Celui-ci est étudié de manière extensive dans la littérature et son inverse est bien connue [18]. L'astuce consiste donc simplement à inverser K^2 au lieu de K ! On multipliera ensuite par K pour obtenir notre expression de K^{-1} . Suivant la convention, nous appellerons G l'opérateur de Green inverse de Δ . Nous avons donc

$$K^{-1} = - \sum_{(x'',y'')} G\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}; \frac{x''}{2}, \frac{y''}{2}\right) K(x'', y''; x', y') \quad (4.12)$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} K_{(i,p),(p,p)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(p,p),(i,p)}^{-1}(x', y'; x, y) &= G\left(\frac{x'-x+1}{2}, \frac{y'-y}{2}\right) - G\left(\frac{x'-x-1}{2}, \frac{y'-y}{2}\right) \\ K_{(p,i),(i,i)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(i,i),(p,i)}^{-1}(x', y'; x, y) &= G\left(\frac{x'-x+1}{2}, \frac{y'-y}{2}\right) - G\left(\frac{x'-x-1}{2}, \frac{y'-y}{2}\right) \\ K_{(p,i),(p,p)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(p,p),(p,i)}^{-1}(x', y'; x, y) &= G\left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y+1}{2}\right) - G\left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y-1}{2}\right) \\ K_{(i,p),(i,i)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(i,i),(i,p)}^{-1}(x', y'; x, y) &= G\left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y-1}{2}\right) - G\left(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y+1}{2}\right) \end{cases} \quad (4.13)$$

Nous avons mis en évidence l'antisymétrie de K^{-1} , qui découle de celle de K . Les indices de type (p, p) , (p, i) se réfèrent à la parité des arguments (x, y) , (x', y') . Un phénomène intéressant qui découle de l'extension spatiale des dimères est cette dépendance des expressions en fonction de la parité relative des sous-réseaux sur lesquels se trouvent ces dimères. Cette particularité se retrouvera dans les fonctions de corrélation. Nous en discuterons plus en détail ultérieurement.

Nous avons donc reporté le problème au calcul de G . Puisque sa dérivation est simple, nous la donnons ici à l'aide du développement en série de Fourier. Considérons le problème de Green discret

$$\sum_{(x'', y'')} \Delta(x, y; x'', y'') G(x'', y''; x', y') = \delta_{x, x'} \delta_{y, y'} \quad (4.14)$$

Nous pouvons décomposer G en série de Fourier sur le réseau

$$G(x'', y''; x', y') = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k x''}{m}} e^{\frac{2\pi i l y''}{n}} \tilde{G}(k, l; x', y') \quad (4.15)$$

En faisant de même avec les delta de Kronecker et en appliquant le Laplacien discret, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k x}{m}} e^{\frac{2\pi i l y}{n}} \tilde{G}(k, l; x', y') \{ -e^{\frac{2\pi i k}{m}} - e^{\frac{-2\pi i k}{m}} - e^{\frac{2\pi i l}{n}} - e^{\frac{-2\pi i l}{n}} + 4 \} \\ = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k(x-x')}{m}} e^{\frac{2\pi i l(y-y')}{n}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Par orthogonalité de la décomposition de Fourier, les membres de gauche et de droite doivent être identiques pour toutes valeurs de k et de l . Donc

$$\tilde{G}(k, l; x', y') = \frac{e^{\frac{-2\pi i k x'}{m}} e^{\frac{-2\pi i l y'}{n}}}{-2 \cos \frac{2\pi k}{m} - 2 \cos \frac{2\pi l}{n} + 4} \quad (4.17)$$

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{2} \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{\frac{2\pi i k(x-x')}{m}} e^{\frac{2\pi i l(y-y')}{n}}}{2 - \cos \frac{2\pi k}{m} - \cos \frac{2\pi l}{n}} \quad (4.18)$$

Nous pouvons simplifier l'expression de la même façon qu'au chapitre 3. Nous cherchons les corrélations dans le plan, ce qui correspond à la limite $m, n \rightarrow \infty$ dans (4.18). Dans cette limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\cos \frac{2\pi k}{m}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(\cos \theta) \quad (4.19)$$

D'où nous obtenons finalement

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \frac{e^{i\theta(x-x')} e^{i\phi(y-y')}}{2 - \cos\theta - \cos\phi} \quad (4.20)$$

Il est difficile d'aller plus loin dans l'intégration pour des valeurs quelconques des arguments. Mais nous pouvons faire plusieurs remarques. Soient $\alpha = x' - x$ et $\beta = y' - y$. L'intégrale ne dépend des coordonnées qu'à travers α et β – comme de juste, puisque c'était déjà le cas de Δ . Remarquons aussi que cette intégrale est divergente : le dénominateur s'annule sur le domaine d'intégration (et pas le numérateur). Pour éviter ce problème, nous introduisons donc la quantité finie

$$g(\alpha, \beta) := G(\alpha, \beta) - G(0, 0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \frac{e^{-i(\theta\alpha + \phi\beta)} - 1}{2 - \cos\theta - \cos\phi} \quad (4.21)$$

Puisque (4.13) s'écrit exclusivement à l'aide de différences de l'opérateur G , nous pourrions systématiquement le remplacer par la fonction g dans les expressions. Cette fonction obéit à une série de symétries :

$$g(\alpha, \beta) = g(\alpha, -\beta) = g(-\alpha, \beta) = g(-\alpha, -\beta) = g(\beta, \alpha) \quad (4.22)$$

Ce qui implique qu'il nous suffit de trouver g lorsque α et β appartiennent au demi-quadrant de 0° à 45° pour l'obtenir sur tout le domaine. En fait, notre analyse de la formule (4.6), ainsi que l'expression (4.13) de K^{-1} en fonction de G , entraînent la chose suivante : nous souhaitons seulement calculer les valeurs de g proche de l'origine et à grande distance de celle-ci. Étant l'inverse du Laplacien, G obéit à l'équation de Green discrète

$$G(\alpha + 1, \beta) + G(\alpha - 1, \beta) + G(\alpha, \beta + 1) + G(\alpha, \beta - 1) - 4G(\alpha, \beta) = -\delta_{\alpha,0} \delta_{\beta,0}$$

On vérifie facilement que g satisfait à la même équation. Par construction, on a $g(0, 0) = 0$. Le choix $\alpha = \beta = 0$ et les symétries nous permettent donc d'obtenir

$$g(1, 0) = -\frac{1}{4} \quad (4.23)$$

Pour calculer les termes subséquents, nous aurions besoin d'informations supplémentaires. Nous n'aurons en fait besoin que de celui-là.

Restent les valeurs à grandes distances. Il existe un développement en série de g sur la distance, que voici :

$$g(\alpha, \beta) = \frac{-1}{2\pi} (\log r + \gamma + \frac{3}{2} \log 2) + \frac{\cos 4\varphi}{24\pi r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.24)$$

Le passage aux coordonnées polaires suit les formules habituelles $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et $\cos \varphi = \frac{\alpha}{r}$. γ est la constante d'Euler-Mascheroni. Ce développement en série

nous vient de [19], à travers [18]. Notons qu'il est possible de calculer sans difficultés insurmontables le terme dominant du développement. Les étapes en sont données dans la section 15 de [20].

Nous avons enfin développé tout l'appareil mathématique nécessaire aux calculs des fonctions de corrélation. Avant de se plonger dedans, faisons le point sur les notations que nous adopterons et sur ce que les symétries peuvent nous apprendre.

Les symétries des fonctions de corrélation

Attardons-nous d'abord un moment sur la notation que nous allons employer dans ce chapitre et le suivant. Un dimère peut être identifié de façon univoque par la donnée des coordonnées des deux sommets qui forment ses extrémités. Nous faisons un choix différent : nous décrivons un dimère par la donnée des coordonnées de son sommet inférieur gauche, et du type de dimère en présence, horizontal ou vertical. À titre d'exemple, nous écrivons :

$$\langle H \rangle_{pi}(x, y)$$

la probabilité que le dimère horizontal, dont le sommet gauche est de coordonnées (x, y) avec x pair et y impair, appartienne à une configuration choisie au hasard. Les sommets du dimère sont donc situés en (x, y) et $(x + 1, y)$.

Nous aimerions calculer les fonctions de corrélation entre deux dimères situés en des endroits quelconques du réseau. Naïvement, on pourrait croire que ce n'est pas possible : il faudrait calculer une infinité de corrélations, pour chaque position possible de l'un ou l'autre dimère. En fait, les nombreuses symétries du système réduisent drastiquement le nombre de cas indépendants. Comme nous travaillons dans la limite de volume infini, c'est-à-dire sans effets de bord, et que nous n'avons pas introduit de poids statistiques sur les arêtes, notre réseau possède toutes les symétries que l'on pourrait espérer. Il est invariant sous

- Translations $(x, y) \rightarrow (x + p, y + q)$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$

Les fonctions de corrélation ne dépendront donc que des positions relatives des dimères l'un par rapport à l'autre. Prosaïquement, cela revient à dire que nous pouvons toujours placer l'origine sur le sommet de référence d'un des deux dimères. Par suite, nous écrirons par exemple

$$\langle HV \rangle_{pp}(x, y)$$

pour la probabilité d'avoir un dimère horizontal dont le sommet gauche est à l'origine et un dimère vertical dont le sommet inférieur est en (x, y) , avec x, y pairs. Les fonctions de corrélation en découlent via la formule

$$\text{Corr}_{HV_{pi}}(x, y) = \langle HV \rangle_{pi}(x, y) - \langle H \rangle \langle V \rangle \quad (4.25)$$

La symétrie implique que les fonctions à un point ne dépendent pas des coordonnées, c'est pourquoi elles ne sont pas reprises dans l'expression. Il en découle de même les relations suivantes :

$$\text{Corr}_{HH}(x, y) = \text{Corr}_{HH}(-x, -y) \quad (4.26)$$

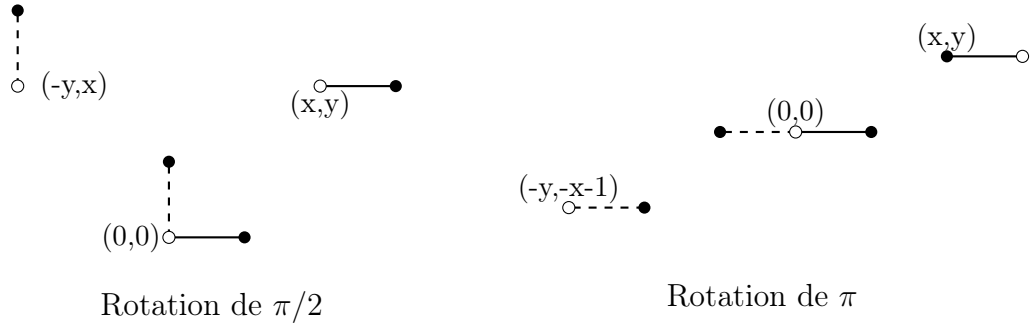
$$\text{Corr}_{VH}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(-x, -y) \quad (4.27)$$

Si nous ne précisons pas les parités des arguments, c'est que le résultat est valable quelles qu'elles soient.

- Rotations de

- $\frac{\pi}{2} : (x, y) \rightarrow (-y, x)$
- $\pi : (x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- $\frac{3\pi}{2} : (x, y) \rightarrow (y, -x)$

Ces symétries sous rotations entraînent une série de relations sur les fonctions de corrélation. Il faut être précautionneux pour les dériver : comme on peut le voir sur les graphes ci-dessous, certaines rotations vont changer le sommet de référence ou le type de dimères.



On obtient

$$\text{Corr}_{VV}(x, y) = \text{Corr}_{HH}(y, -x) \quad (4.28)$$

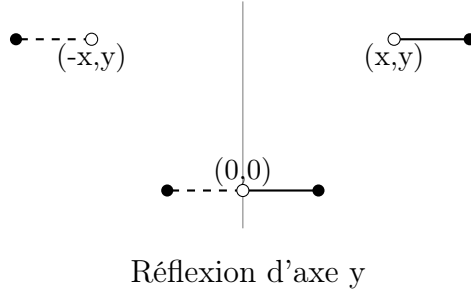
$$\text{Corr}_{HV}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(-y, x - 1) \quad (4.29)$$

- Réflexions d'axe x : $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ ou d'axe y : $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Et nous avons une dernière série de relations grâce à ces symétries.

$$\text{Corr}_{HH}(x, y) = \text{Corr}_{HH}(x, -y) = \text{Corr}_{HH}(-x, y) \quad (4.30)$$

$$\text{Corr}_{HV}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(x, -y - 1) = \text{Corr}_{HH}(-x + 1, y) \quad (4.31)$$



Au lieu d'une infinité de fonctions de corrélation, il n'y en a finalement que cinq de réellement indépendantes. Il nous suffirait de calculer les $\text{Corr}_{HH}(x, y)$ pour les quatre combinaisons de parité possibles ainsi qu'une seule Corr_{HV} . Nous choisissons d'en calculer huit : les quatre HH et les quatre HV . Certaines relations serviront alors de contrainte sur nos résultats afin de vérifier leur exactitude. Les autres nous permettront de déterminer les corrélations de type VH et VV .

Les calculs de corrélation

Commençons par calculer la fonction à un point.

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{pp}(x, y) &= K_{(x,y),(x+1,y)} \det K_{(x+1,y),(x,y)}^{-1} \\ &= g_{0,0} - g_{-1,0} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Comme attendu, elle ne dépend pas des coordonnées. On pourrait faire de même pour les autres parités et pour un dimère vertical, mais les symétries nous affirment que le résultat ne changerait en rien. Donc

$$\langle H \rangle = \langle V \rangle = \frac{1}{4} \quad (4.33)$$

Nous aurions pu trouver cela sans calcul. Chaque sommet possède quatre voisins, et peut donc former un total de quatre dimères différents, selon la configuration. Comme la distribution de probabilité est uniforme, ces quatre alternatives sont équiprobables et la chance qu'une configuration choisie au hasard contienne un dimère donné est de $\frac{1}{4}$. Ce raisonnement ne serait bien entendu plus valable en présence de bord ou d'une distribution de probabilité inhomogène.

Nous nous proposons de donner explicitement le développement de l'une des fonctions à deux points, afin de montrer les détails du raisonnement. Après quoi nous écrirons les valeurs de toutes les corrélations sans justifications supplémentaires.

Nous allons avoir besoin de réécrire l'équation (3.23) en remplaçant α par $\frac{x}{2}$ et β par $\frac{y}{2}$. Nous redéfinissons également $r = x^2 + y^2$.

$$g_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} = \frac{-1}{4\pi} (\log r^2 + 2\gamma - \frac{1}{2} \log 2) + \frac{1}{6\pi} \frac{x^4 - 6x^2y^2 + y^4}{r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.34)$$

Corrélation à deux points pour dimères HH de parité $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{p}, \mathbf{p})$

$$\begin{aligned} \langle H_1 H_2 \rangle_{pp}(x, y) &= K_{(0,0),(1,0)} K_{(x,y),(x+1,y)} \det \begin{pmatrix} K_{(1,0),(0,0)}^{-1} & K_{(1,0),(x,y)}^{-1} \\ K_{(x+1,y),(0,0)}^{-1} & K_{(x+1,y),(x,y)}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} g_{1,0} & g_{\frac{x+2}{2}, \frac{y}{2}} - g_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} \\ g_{\frac{x-2}{2}, \frac{y}{2}} - g_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} & g_{1,0} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Les calculs consistent ensuite essentiellement à développer en série le logarithme ($\epsilon^2 < 1$)

$$\log 1 + \epsilon = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (4.35)$$

On trouve

$$g_{\frac{x+l}{2}, \frac{y}{2}} - g_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} = \frac{-1}{4\pi} \left[\frac{2lx}{r^2} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2l^2x^2}{r^4} \right] + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (4.36)$$

Et

$$\langle H_1 H_2 \rangle_{pp}(x, y) = \frac{1}{16} + \frac{x^2}{\pi^2 r^4} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.37)$$

$$\text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) = \frac{x^2}{\pi^2 r^4} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.38)$$

Résultats

Finalement

$$\text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) = \frac{x^2}{\pi^2 r^4} + \frac{3x^6 - 23x^4 y^2 + 5x^2 y^4 - y^6}{\pi^2 r^{10}} + \mathcal{O}(r^{-5}) \quad (4.39a)$$

$$\text{Corr}_{HH_{pi}}(x, y) = \frac{y^2}{\pi^2 r^4} + \frac{2y^2(5x^4 - 10x^2 y^2 + y^4)}{\pi^2 r^{10}} + \mathcal{O}(r^{-6}) \quad (4.39b)$$

$$\text{Corr}_{HH_{ip}}(x, y) = \frac{-x^2}{\pi^2 r^4} - \frac{2x^2(x^4 - 10x^2 y^2 + 5y^4)}{\pi^2 r^{10}} + \mathcal{O}(r^{-5}) \quad (4.39c)$$

$$\text{Corr}_{HH_{ii}}(x, y) = \frac{-y^2}{\pi^2 r^4} - \frac{4x^2 y^2(3x^2 - 5y^2)}{\pi^2 r^{10}} + \mathcal{O}(r^{-5}) \quad (4.39d)$$

$$\text{Corr}_{HV_{pp}}(x, y) = \frac{xy}{\pi^2 r^4} + \frac{x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3}{\pi^2 r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.39e)$$

$$\text{Corr}_{HV_{pi}}(x, y) = \frac{-xy}{\pi^2 r^4} - \frac{y(x^2 - 2xy - y^2)}{\pi^2 r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.39f)$$

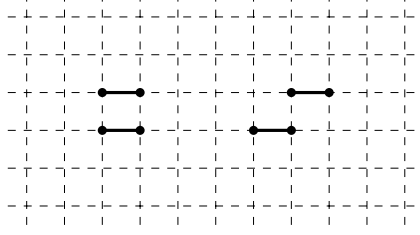
$$\text{Corr}_{HV_{ip}}(x, y) = \frac{-xy}{\pi^2 r^4} - \frac{x(x^2 + 2xy - y^2)}{\pi^2 r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.39g)$$

$$\text{Corr}_{HV_{ii}}(x, y) = \frac{xy}{\pi^2 r^4} + \frac{2xy(x - y)}{\pi^2 r^6} + \mathcal{O}(r^{-4}) \quad (4.39h)$$

Prenons le temps de faire quelques observations sur ces résultats.

- La première chose qui saute aux yeux est que les fonctions de corrélations dépendent fortement des parités des sous-réseaux sur lesquels sont situés les dimères. On le pressentait déjà en écrivant l'équation (4.13). Ce n'est pas un comportement usuel pour des fonctions de corrélation : dans les modèles sur réseau plus classiques comme celui de Ising, ou encore le modèle à 6 sommets, cette spécificité n'est pas présente. Mais le modèle de dimères est très différent de ces modèles à interactions entre voisins. L'interaction entre les dimères est plus complexe : elle ne se manifeste qu'à travers la condition géométrique globale de pavage du réseau. On peut néanmoins développer une idée intuitive du pourquoi les corrélations ont cette forme. Examinons la figure ci-dessous. Dans le cas de gauche, les dimères forment une structure compacte : il y a 8 sommets voisins mais il reste à chacun de ces sommets 3 possibilités pour former des liaisons. Dans le cas de droite, il y a toujours 8 sommets voisins, mais deux d'entre eux n'ont que 2 possibilités pour former des liaisons. L'idée

intuitive est donc que les configurations similaires à celle de gauche seront plus probables que celle de droite ne l'est.



Influence de la parité du sous-réseau

- Autre chose que l'on remarque immédiatement : les fonctions de corrélation décroissent de manière algébrique avec la distance. C'est un phénomène bien connu de physique statistique, qui nous indique que le choix de poids statistiques uniformes correspond à un point critique du modèle de dimères. Cela confirme ce à quoi l'on s'attendait au vu du lien entre l'énergie libre de ce modèle et celle de Ising à la température critique.
- Enfin, le terme réellement intéressant pour nous est le terme dominant, puisque nous sommes intéressés par la limite de très grande distance. Si les coefficients des différentes corrélations varient, la décroissance se fait par contre toujours en r^{-2} , l'inverse du carré de la distance. Toujours, sauf pour des directions privilégiées du réseau, à savoir les axes horizontaux et verticaux. Près de ceux-ci, les corrélations peuvent décroître en r^{-3} , voire en r^{-4} . On le remarque aisément à partir des équations (4.38) et (4.39a) par exemple : à proximité de l'axe vertical ($|y| \gg |x|$), elles vaudront

$$\text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) = \frac{x^2 - 1}{\pi^2 y^4} + \mathcal{O}(y^{-5}) \quad (4.40)$$

Chapitre 5

Fonctions de corrélation à deux points dans le cas deux-périodique

Nous passons maintenant à l'étude des fonctions de corrélation du réseau muni de poids deux-périodiques. Nous nous limiterons à nouveau à leur étude dans le plan, sans tenir compte des effets de bord. Nous verrons que les symétries que cela permet d'obtenir ne seront pas de trop. La majorité des calculs réalisés dans le cadre de ce mémoire l'ont été afin d'obtenir les résultats décrits à la fin de ce chapitre. Ceux-ci forment en quelque sorte la colonne vertébrale de ce travail.

Comme nous l'avions prédit, les étapes de raisonnement que nous allons suivre seront identiques à celles du chapitre 4. Nous nous y référerons donc régulièrement. En particulier, le théorème (4.6) reste d'application. Son interprétation aussi : nous aurons besoin de connaître deux types d'éléments de K^{-1} , la matrice de Kasteleyn inverse. D'une part les éléments associés à des sommets adjacents du réseau, d'autre part ceux associés à des sommets fort éloignés l'un de l'autre.

Trouver l'expression de K^{-1}

Rappelons l'expression indicielle de K pour nos conventions de poids et d'orientation de Kasteleyn, mais cette fois-ci avec notre notation habituelle de coordonnées : x la variable horizontale et y la variable verticale.

$$K_{(x,y),(x',y')} = \left\{ \delta_{x+1,x'} (a\delta_{x,pair} + b\delta_{x,impair}) - \delta_{x-1,x'} (a\delta_{x,impair} + b\delta_{x,pair}) \right\} \delta_{y,y'} \\ + (-1)^x \delta_{x,x'} \left\{ \delta_{y+1,y'} (a\delta_{y,pair} + b\delta_{y,impair}) - \delta_{y-1,y'} (a\delta_{y,impair} + b\delta_{y,pair}) \right\}$$

Utilisons la même astuce que précédemment pour en calculer l'inverse [16].

À taille finie

$$\begin{aligned}
K_{(x,y),(x',y')}^2 &= \sum_{(x'',y'')} K_{(x,y),(x'',y'')} K_{(x'',y''),(x',y')} \\
&= \{ab \delta_{x+2,x'} + ab \delta_{x-2,x'} - \delta_{x,x'}[a^2 + b^2 - a^2 \delta_{x,1} - a^2 \delta_{x,m}]\} \delta_{y,y'} \\
&\quad + \delta_{x,x'} \{ab \delta_{y+2,y'} + ab \delta_{y-2,y'} - \delta_{y,y'}[a^2 + b^2 \\
&\quad - a^2 \delta_{y,1} - (a^2 \delta_{n,pair} + b^2 \delta_{n,impair}) \delta_{y,n}]\}
\end{aligned}$$

où $1 \leq x \leq m$ et $1 \leq y \leq n$. Nous aurions à nouveau pu l'avoir directement à partir de l'interprétation en terme de chemins décrite au chapitre 4. Nous ignorons les termes de bord et laissons x et y parcourir les entiers pour obtenir

$$\begin{aligned}
K_{(x,y),(x',y')}^2 &= \{ab \delta_{x+2,x'} + ab \delta_{x-2,x'} - (a^2 + b^2) \delta_{x,x'}\} \delta_{y,y'} \\
&\quad + \delta_{x,x'} \{ab \delta_{y+2,y'} + ab \delta_{y-2,y'} - (a^2 + b^2) \delta_{y,y'}\}
\end{aligned}$$

Si l'expression de la matrice de Kasteleyn est visiblement plus complexe que dans le cas uniforme, nous constatons par contre avec plaisir que celle de son carré est remarquablement simple. En particulier, elle vérifie toujours

$$K^2 = K_{pair,pair}^2 \oplus K_{pair,impair}^2 \oplus K_{impair,pair}^2 \oplus K_{impair,impair}^2 \quad (5.1)$$

Nous l'interprétons en terme d'une version généralisée du Laplacien discret usuel. Par abus de notation, nous l'appellerons toujours Δ , et son inverse G .

$$K^2 = -\{\Delta_{pair,pair}^2 \oplus \Delta_{pair,impair}^2 \oplus \Delta_{impair,pair}^2 \oplus \Delta_{impair,impair}^2\} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x' - x, y' - y) &= 2(a^2 + b^2) \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} \\
&\quad - ab(\delta_{x+1,x'} + \delta_{x-1,x'}) \delta_{y,y'} \\
&\quad - ab \delta_{x,x'} (\delta_{y+1,y'} + \delta_{y-1,y'})
\end{aligned} \quad (5.3)$$

Et nous trouvons pour l'inverse de la matrice de Kasteleyn

$$\begin{cases} K_{(i,p),(p,p)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(p,p),(i,p)}^{-1}(x', y'; x, y) &= aG(\frac{x'-x+1}{2}, \frac{y'-y}{2}) - bG(\frac{x'-x-1}{2}, \frac{y'-y}{2}) \\ K_{(p,i),(i,i)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(i,i),(p,i)}^{-1}(x', y'; x, y) &= bG(\frac{x'-x+1}{2}, \frac{y'-y}{2}) - aG(\frac{x'-x-1}{2}, \frac{y'-y}{2}) \\ K_{(p,i),(p,p)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(p,p),(p,i)}^{-1}(x', y'; x, y) &= aG(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y+1}{2}) - bG(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y-1}{2}) \\ K_{(i,p),(i,i)}^{-1}(x, y; x', y') = -K_{(i,i),(i,p)}^{-1}(x', y'; x, y) &= aG(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y-1}{2}) - bG(\frac{x'-x}{2}, \frac{y'-y+1}{2}) \end{cases} \quad (5.4)$$

La dépendance des expressions en la parité des coordonnées est plus marquée que dans le cas uniforme. Ce n'est pas particulièrement surprenant : les divers sous-réseaux (p, p) , (p, i) , (i, p) et (i, i) sont tous équivalents dans le modèle uniforme, seule la différence de parité d'un sous-réseau par rapport à l'autre est significative. Les poids deux-périodiques, de leur côté, introduisent une

disparité entre ceux-ci. Les sommets d'un sous-réseau donné ne verrons pas les poids de la même façon que ceux des autres. Nous reviendrons sur cette problématique lors de l'étude des symétries. Notons simplement que l'équation (5.4) a été obtenue avec notre convention de poids introduite au chapitre 3. Une autre convention aurait donné lieu à une expression de K^{-1} qui aurait différé par l'échange de a et b en certains endroits.

Nous souhaitons maintenant calculer la nouvelle forme de G . Nous pouvons la dériver à nouveau à l'aide du développement en série de Fourier sur le problème de Green discret. Le calcul est tout à fait similaire, tant et si bien que nous ne le référons pas explicitement. Nous obtenons

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \frac{e^{i\theta(x-x')} e^{i\phi(y-y')}}{a^2 + b^2 - ab \cos \theta - ab \cos \phi} \quad (5.5)$$

Soient $\alpha = x' - x$ et $\beta = y' - y$. L'intégrale ne dépend toujours des coordonnées qu'à travers α et β . Par contre, pour a et b quelconques, celle-ci n'est plus divergente. Il n'y a donc pas lieu d'introduire $g := G(\alpha, \beta) - G(0, 0)$ comme on l'avait fait précédemment. On remarque avec plaisir que toutes les symétries que nous avons sont encore présentes :

$$G(\alpha, \beta) = G(\alpha, -\beta) = G(-\alpha, \beta) = G(-\alpha, -\beta) = G(\beta, \alpha) \quad (5.6)$$

Il nous suffit donc de trouver la fonction $G(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \geq \beta \geq 0$. Étant l'inverse du Laplacien généralisé, elle obéit à l'équation de Green discrète

$$-ab\{G(\alpha+1, \beta)+G(\alpha-1, \beta)+G(\alpha, \beta+1)+G(\alpha, \beta-1)\}+2(a^2+b^2)G(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha,0} \delta_{\beta,0}$$

Pour $\alpha = \beta = 0$, cela donne

$$-4abG(1, 0) + 2(a^2 + b^2)G(0, 0) = 1 \quad (5.7)$$

Pour avoir accès au comportement de K^{-1} à courte distance, et donc à la fonction de corrélation à un point, nous avons donc besoin de connaître $G(0, 0)$. Examinons l'équation plus générale

$$\begin{aligned} G(\alpha, \alpha) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta d\phi \frac{e^{i\alpha(\theta+\phi)}}{a^2 + b^2 - ab \cos \theta - ab \cos \phi} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta d\phi \frac{\cos \alpha(\theta + \phi)}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\theta+\phi}{2} \cos \frac{\theta-\phi}{2}} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\gamma d\rho \frac{\cos 2\alpha\gamma}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \cos \rho} \end{aligned}$$

Nous avons effectué les changements de variable $\gamma = \frac{\theta+\phi}{2}$ et $\rho = \frac{\theta-\phi}{2}$. Le domaine d'intégration change également, mais il est possible de montrer qu'il

est équivalent à l'ancien. Utilisons ensuite la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (5.8)$$

Elle se démontre sans difficulté en passant par le plan complexe et en utilisant le théorème des résidus. Grâce à elle nous arrivons à

$$\begin{aligned} G(\alpha, \alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\gamma \frac{\cos 2\alpha\gamma}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \gamma}} \\ &= \frac{(-1)^\alpha}{2\pi(a^2 + b^2)} \int_0^\pi d\varphi \frac{\cos 2\alpha\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Pour a et b quelconques, cette intégrale n'est soluble pour aucune valeur de α . Ce n'est pas une bonne nouvelle. Ce type d'intégrale est en fait bien connu des analystes : ce sont des intégrales elliptiques. L'annexe A en présente une introduction très informelle. Sa lecture est tout à fait optionnelle, et même presque déconseillée. En effet, ces intégrales elliptiques n'apparaîtront qu'à travers la fonction de corrélation à un point. Les calculs des fonctions de corrélation à deux points – qui forment le résultat important – se feront à l'aide de fonctions de Bessel, comme nous le verrons.

On identifie donc

$$G(0, 0) = \frac{1}{\pi(a^2 + b^2)} F\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \quad (5.9)$$

où F est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Celle-ci est traditionnellement notée K , mais cela aurait pu porter à confusion. Il vient immédiatement

$$G(1, 0) = \frac{1}{2\pi ab} F\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) - \frac{1}{4ab} \quad (5.10)$$

Et nous avons les résultats nécessaires pour calculer la fonction à un point. Remarquons qu'on peut de même trouver :

$$G(1, 1) = \frac{a^2 + b^2}{2\pi a^2 b^2} \left[F\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) - E\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \right] - \frac{1}{\pi(a^2 + b^2)} F\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)$$

où E est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce. Et ainsi de suite le long de la diagonale. Mais exprimer les $G(\alpha, \alpha)$ en fonction des intégrales elliptiques devient rapidement fort complexe, et la méthode ne se prête pas du tout à l'obtention du comportement à très longue distance.

Un tel comportement à longue distance a été extrait dans la littérature [21], dans le cadre du modèle de Ising. Il n'y est malheureusement que sous forme

d'un développement en série autour de $a = b$ (lorsqu'on le traduit dans le langage de notre modèle) et uniquement le long de la diagonale et des axes principaux. C'est très restreint, pourtant même sous ces conditions la dérivation est complexe : nous ne la retranscrivons certainement pas ici.

Les résultats de ce développement sont également repris dans l'annexe de [22]. Cet article servira de référence principale pour la fin de ce chapitre et le suivant. Un modèle de tas de sable (ASM) y est étudié, dans lequel on retrouve les mêmes ingrédients mathématiques qu'ici.

Soit

$$t = \frac{(a - b)^2}{2ab} \quad (5.11)$$

un paramètre qui mesure la distance au point critique $a = b$. En traduisant les formules dans le langage de notre modèle et en les généralisant à x, y positifs ou négatifs à l'aide des symétries, nous obtenons

- À proximité de l'axe horizontal : $|x| \gg |y|$

$$G_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} = \frac{1}{ab} \left\{ P_0(z) + \left[4P_2(z) + \frac{y^2}{2}(P_0(z) - P_0''(z)) \right] t + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6 + \dots} \quad (5.12)$$

- À proximité de l'axe vertical : $|y| \gg |x|$

$$G_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} = \frac{1}{ab} \left\{ P_0(z) + \left[4P_2(z) + \frac{x^2}{2}(P_0(z) - P_0''(z)) \right] t + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6 + \dots} \quad (5.13)$$

- À proximité de la diagonale : $y = \pm|x + k|$, et $|x| \gg |k|$

$$G_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} = \frac{1}{ab} \left\{ D_0(z) + \frac{\sqrt{2}}{2} k \frac{x}{|x|} D_0'(z) \sqrt{t} + \left[4D_2(z) + \frac{k^2}{4} D_0(z) \right] t + \mathcal{O}(\sqrt{t^3}) \right\} e^{zt/12 + \dots} \quad (5.14)$$

où z est appelée la "distance d'échelle", et prend pour valeurs $|x|\sqrt{t}$ près de l'axe horizontal, $|y|\sqrt{t}$ près de l'axe vertical et $|x|\sqrt{2t}$ près de la diagonale. C'est donc une mesure de la distance sur le réseau à l'ordre dominant, pondérée par une mesure de la distance au point critique. On a

$$P_0(z) = D_0(z) = \frac{1}{2\pi} K_0(z) \quad (5.15)$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. L'annexe B en regroupe les propriétés qui nous seront utiles dans ce travail. $D_2(z)$ et $P_2(z)$ sont des développements en série dont la forme est complexe. Heureusement, ils n'apparaîtront pas au premier ordre des calculs. Avec cela nous avons tous les ingrédients nécessaires au calcul des fonctions de corrélation.

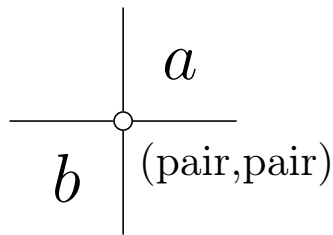
Notons que le fait que les formules ne soient valables qu'à proximité du cas uniforme ne nous dérange pas vraiment. Dans la limite d'échelle, nous ne considérerons de toute façon que l'entourage immédiat du point critique $a = b$. La restriction sur les directions est plus ennuyeuse. Dans le modèle uniforme, nos expressions étaient valables quelle que soit cette direction ; ici elles auront une portée beaucoup moins générale. Cette séparation en trois directions implique également que nous devrons calculer le triple de fonctions de corrélations par rapport au cas uniforme. Ce n'est pas particulièrement réjouissant.

Les symétries des fonctions de corrélation

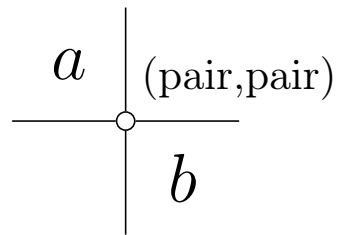
Concernant les symétries, la différence clé entre le modèle uniforme et le modèle deux-périodique se situe au niveau des translations. Le réseau n'est plus invariant sous $(x, y) \rightarrow (x + p, y + q)$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. À la place, nous avons l'invariance sous

- Translations $(x, y) \rightarrow (x + 2p, y + 2q)$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$

Les fonctions de corrélation ne dépendent plus seulement des différences de coordonnées entre les deux dimères, mais aussi directement de la parité de leurs sous-réseaux. Nous souhaitons toujours placer l'un de deux dimères à l'origine lors des calculs de corrélation. Pour ce faire, il nous faut tenir compte des quatre possibilités de choix d'origine, qui sont explicitement données sur les dessins ci-dessous.

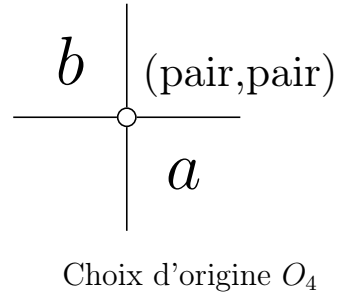
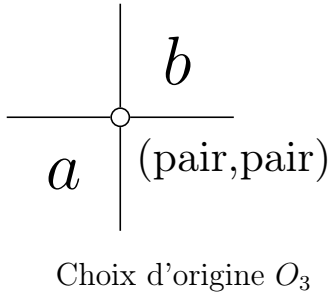


Choix d'origine O_1



Choix d'origine O_2

Notons que nous avons dérivé nos formules en choisissant l'origine O_1 . On remarque immédiatement que O_1 et O_3 ne diffèrent que par l'échange des poids



a et b , et pareillement pour O_2 et O_4 . Donc

$$\text{Corr}_{O_1,(a,b)}(x,y) = \text{Corr}_{O_3,(b,a)}(x,y) \quad (5.16)$$

$$\text{Corr}_{O_2,(a,b)}(x,y) = \text{Corr}_{O_4,(b,a)}(x,y) \quad (5.17)$$

$$(5.18)$$

Il n'y a donc déjà plus que deux origines potentiellement indépendantes.

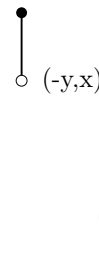
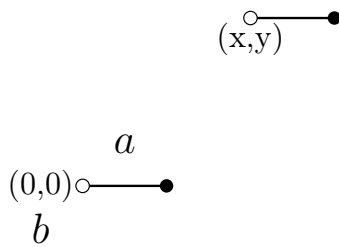
Hormis ces considérations, l'invariance sous les translations ne nous donne que des relations spécifiques à des parités données. Par exemple

$$\text{Corr}_{HH_{pp}}(x,y) = \text{Corr}_{HH_{pp}}(-x,-y) \quad (5.19)$$

- Rotations de

- $\frac{\pi}{2} : (x,y) \rightarrow (-y,x)$
- $\pi : (x,y) \rightarrow (-x,-y)$
- $\frac{3\pi}{2} : (x,y) \rightarrow (y,-x)$

Il faut maintenant être doublement précautionneux lors de l'étude des symétries : il s'agit de regarder aussi comment les poids statistiques se transforment. Le dessin ci-dessous nous le montre explicitement : l'origine y passe de la catégorie O_1 à O_2 sous la rotation.



En considérant tous les cas de figure attentivement, on obtient pour les rotations de $\pi/2$

$$\text{Corr}_{HH_{O_1}}(x, y) = \text{Corr}_{VV_{O_2}}(-y, x) \quad (5.20)$$

$$\text{Corr}_{HH_{O_2, (a, b)}}(x, y) = \text{Corr}_{VV_{O_1, (b, a)}}(-y, x) \quad (5.21)$$

$$\text{Corr}_{HV_{O_1}}(x, y) = \text{Corr}_{VH_{O_2}}(-y - 1, x) \quad (5.22)$$

$$\text{Corr}_{HV_{O_2, (a, b)}}(x, y) = \text{Corr}_{VH_{O_1, (b, a)}}(-y - 1, x) \quad (5.23)$$

Celles de π et $3\pi/2$ ajoutent à cela

$$\text{Corr}_{HH_{O_1, (a, b)}}(x, y) = \text{Corr}_{HH_{O_2, (b, a)}}(-x, -y) \quad (5.24)$$

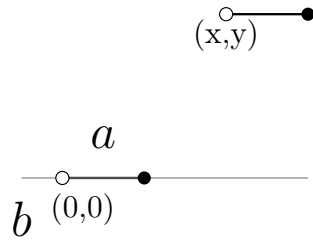
$$\text{Corr}_{HH_{O_1}}(x, y) = \text{Corr}_{VV_{O_1}}(y, -x) \quad (5.25)$$

$$\text{Corr}_{HV_{O_1, (a, b)}}(x, y) = \text{Corr}_{HV_{O_2, (b, a)}}(-x + 1, -y - 1) \quad (5.26)$$

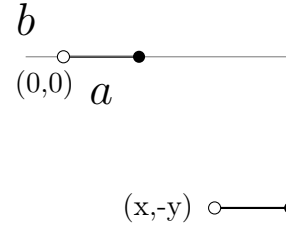
$$\text{Corr}_{HV_{O_1}}(x, y) = \text{Corr}_{VH_{O_1}}(y, -x + 1) \quad (5.27)$$

- Réflexions d'axe x : $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ ou d'axe y : $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Les réflexions peuvent également changer le type d'origine que l'on doit considérer, comme dans l'exemple ci-dessous.



Avant réflexion d'axe x



Après réflexion d'axe x

Nous tirons des deux types de réflexion les relations

$$\text{Corr}_{HH_{O_1}}(x, y) = \text{Corr}_{HH_{O_1}}(-x, y) \quad (5.28)$$

$$\text{Corr}_{HV}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(-x + 1, y) \quad (5.29)$$

En combinant les informations que l'on obtient grâce aux diverses symétries, nous arrivons à la conclusion suivante. Il y a six fonctions de corrélation indépendantes au lieu des cinq du cas uniforme. Nous pouvons nous contenter de calculer les fonctions de corrélation HH et HV pour notre choix d'origine O_1 . Les relations "constitutives" suivantes permettent ensuite d'obtenir les autres fonctions de corrélation

$$\text{Corr}_{HH_{O_2,(a,b)}}(x, y) = \text{Corr}_{HH_{O_1,(b,a)}}(-x, -y) \quad (5.30)$$

$$\text{Corr}_{HV_{O_2,(a,b)}}(x, y) = \text{Corr}_{HV_{O_1,(b,a)}}(x, -y - 1) \quad (5.31)$$

$$\text{Corr}_{VH}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(-y + 1, x) \quad (5.32)$$

$$\text{Corr}_{VV}(x, y) = \text{Corr}_{HH}(-y, x) \quad (5.33)$$

Il nous reste comme seules symétries sur les fonctions que l'on va calculer

$$\text{Corr}_{HH}(x, y) = \text{Corr}_{HH}(-x, y) \quad (5.34)$$

$$\text{Corr}_{HV}(x, y) = \text{Corr}_{HV}(-x + 1, y) \quad (5.35)$$

hormis certaines relations spécifiques comme (5.19). Nous constatons donc avec soulagement que les symétries restreignent toujours très fort le nombre de calculs à effectuer. Le prix à payer pour l'introduction des poids deux-périodiques se situe avant tout dans la quantité moindre de contraintes du type (5.34) vérifiées par les corrélations.

Les calculs de corrélation

Commençons par calculer les fonctions à un point. L'unique chose qui devrait influencer sur la probabilité de présence d'un dimère seul est son poids : a ou b . Les symétries impliquent toujours que les coordonnées elles-mêmes n'auront pas d'impact sur cette probabilité. Vérifions cela explicitement

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{pp}(x, y) &= K_{(x,y),(x+1,y)} K_{(x+1,y),(x,y)}^{-1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} F\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Il vient immédiatement

$$\langle H \rangle_{pp} = \langle H \rangle_{pi} = \langle V \rangle_{pp} = \langle V \rangle_{ip} \quad (5.37)$$

$$\langle H \rangle_{ip} = \langle H \rangle_{ii} = \langle V \rangle_{pi} = \langle V \rangle_{ii} \quad (5.38)$$

$$\langle H \rangle_{ip,(a,b)} = \langle H \rangle_{pp,(b,a)} \quad (5.39)$$

Soulignons en passant que notre expression (5.36) est beaucoup moins intuitive que précédemment : l'intégrale F est insoluble et il n'y a donc pas d'expression simple de la probabilité de présence d'un dimère pour des poids (a, b) généraux. On doit cependant retrouver la probabilité (4.33) du cas uniforme pour $a = b$. Dans cette limite, l'argument de l'intégrale elliptique F tend vers un. Celle-ci diverge dans ce cas, mais moins rapidement que $a^2 - b^2$ ne tend vers zéro. Le résultat est donc $1/4$, comme attendu.

Résultats à proximité de l'axe horizontal

Calculons explicitement l'une des fonctions à deux points à l'aide de (5.13), afin de montrer les détails du raisonnement. Nous écrirons ensuite les autres résultats sans justifications supplémentaires. Nous allons avoir besoin du développement en série de (5.13) autour de $x + l$, avec $|x| \gg |l|$

$$\begin{aligned} G_{\frac{x+l}{2}, \frac{y}{2}} &= \frac{1}{ab} \left\{ P_0(z) + l \frac{x}{|x|} P'_0(z) \sqrt{t} \right. \\ &\quad + \left[\frac{l^2}{2} P''_0(z) + 4P_2(z) + \frac{y^2}{2} (P_0(z) - P''_0(z)) \right] t \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\sqrt{t^3}) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned}$$

Remarquons déjà la présence du facteur $\text{signe}(x) = x/|x|$ qui provient de la valeur absolue contenue dans z . Ce type de facteur sera omniprésent dans les résultats, et se révélera difficile à interpréter à la limite d'échelle.

Nous aurons également besoin d'écrire $b(a, t)$ et $a(b, t)$. Pour cela, il nous suffit de reprendre l'équation (5.11). Soit $c = b/a$. Alors

$$c^2 - 2(t+1)c + 1 = 0 \quad (5.40)$$

C'est une équation quadratique, dont les deux racines sont réelles. Choisir la plus grande d'entre elles revient à poser $b > a$, la plus petite $a > b$. Posons $a > b$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} b &= af(t) = a\{1 - \sqrt{t}\sqrt{t+2} + t\} \\ a &= b\bar{f}(t) = b\{1 + \sqrt{t}\sqrt{t+2} + t\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Nous choisissons de calculer l'une des fonctions de corrélation mixtes.

$$\begin{aligned} \langle HV \rangle_{pp}(x, y) &= K_{(0,0),(1,0)} K_{(x,y),(x,y+1)} \det \begin{pmatrix} K_{(1,0),(0,0)}^{-1} & K_{(1,0),(x,y)}^{-1} \\ K_{(x,y+1),(0,0)}^{-1} & K_{(x,y+1),(x,y)}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= a^2 \begin{vmatrix} bG_{1,0} - aG_{0,0} & bG_{\frac{x}{2}, \frac{y+2}{2}} - aG_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} \\ bG_{\frac{x-2}{2}, \frac{y}{2}} - aG_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} & bG_{1,0} - aG_{0,0} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bG_{\frac{x-2}{2}, \frac{y}{2}} - aG_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} &= \frac{1}{a} \left\{ \left[-\sqrt{2}P_0(z) - 2 \frac{x}{|x|} P'_0(z) \right] \sqrt{t} + \mathcal{O}(t) \right\} e^{zt/6+\dots} \\ bG_{\frac{x}{2}, \frac{y+2}{2}} - aG_{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}} &= \frac{1}{a} \left\{ -\sqrt{2}P_0(z) \sqrt{t} + \mathcal{O}(t) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Corr}_{HV_{pp}}(x, y) = - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) + \sqrt{2} \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + \mathcal{O}(\sqrt{t^3}) \right\} e^{zt/3+\dots} \quad (5.42)$$

En faisant pareil dans chaque cas de figure, nous trouvons finalement

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - 2P_0'^2(z) \right] t + 2 \left[P_0^2(z) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2P_0(z) P_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.43a)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{pi}}(x, y) = & \left\{ 2P_0^2(z) t + 2\sqrt{2} \left[(1 - 2y) P_0^2(z) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2y P_0(z) P_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.43b)$$

$$\text{Corr}_{HH_{ip}}(x, y) = \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - 2P_0'^2(z) \right] t + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \quad (5.43c)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{ii}}(x, y) = & - \left\{ 2P_0^2(z) t + 4\sqrt{2} y \left[- P_0^2(z) \right. \right. \\ & \left. \left. + P_0(z) P_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.43d)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{pp}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) + \sqrt{2} \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[- \sqrt{2} y P_0^2(z) \right. \right. \\ & - (2y + 1) \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} y P_0(z) P_0''(z) \\ & \left. \left. + 2(y + 1) \frac{x}{|x|} P'_0(z) P_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.44a)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{pi}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[P_0^2(z) + \sqrt{2} \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[- \sqrt{2} y P_0^2(z) \right. \right. \\ & - (2y + 1) \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} (y - 1) P_0(z) P_0''(z) \\ & \left. \left. + 2y \frac{x}{|x|} P'_0(z) P_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.44b)$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{ip}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[- \sqrt{2} y P_0^2(z) \right. \right. \\
& + (2y - 1) \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} (y + 1) P_0(z) P''_0(z) \\
& \left. \left. + \sqrt{2} P_0'^2(z) - 2(y + 1) \frac{x}{|x|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots}
\end{aligned} \tag{5.44c}$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{ii}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[- \sqrt{2} y P_0^2(z) \right. \right. \\
& + (2y - 1) \frac{x}{|x|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} y P_0(z) P''_0(z) \\
& \left. \left. + \sqrt{2} P_0'^2(z) - 2y \frac{x}{|x|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots}
\end{aligned} \tag{5.44d}$$

Résultats à proximité de l'axe vertical

Nous ne referons pas de calcul explicite. Remarquons que la formule (5.13) découle simplement de (5.12) par la symétrie de G sous l'échange de ses arguments. Cela implique

$$\begin{aligned}
G_{\frac{x}{2}, \frac{y+h}{2}} = & \frac{1}{ab} \left\{ P_0(z) + h \frac{y}{|y|} P'_0(z) \sqrt{t} \right. \\
& + \left[\frac{h^2}{2} P_0''(z) + 4P_2(z) + \frac{x^2}{2} (P_0(z) - P_0''(z)) \right] t \\
& \left. + \mathcal{O}(\sqrt{t^3}) \right\} e^{zt/6+\dots}
\end{aligned}$$

Rappelons que nous avons ici $z = |y|\sqrt{t}$. Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) = & \left\{ - 2P_0^2(z) t + 2\sqrt{2} \left[P_0^2(z) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2P_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots}
\end{aligned} \tag{5.45a}$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HH_{pi}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[P_0(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P'_0(z) \right]^2 t + 2\sqrt{2} \left[P_0(z) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P'_0(z) \right]^2 \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots}
\end{aligned} \tag{5.45b}$$

$$\text{Corr}_{HH_{ip}}(x, y) = \left\{ 2 P_0^2(z) t + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \quad (5.45c)$$

$$\text{Corr}_{HH_{ii}}(x, y) = \left\{ -2 \left[P_0(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P'_0(z) \right]^2 t + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \quad (5.45d)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{pp}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[\sqrt{2} x P_0^2(z) \right. \right. \\ & - (2x - 1) \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) - \sqrt{2} x P_0(z) P''_0(z) \\ & \left. \left. + 2(x - 1) \frac{y}{|y|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.46a)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{pi}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[\sqrt{2} (x - 1) P_0^2(z) \right. \right. \\ & - (2x - 3) \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) - \sqrt{2} (x - 1) P_0(z) P''_0(z) - \sqrt{2} P_0'^2(z) \\ & \left. \left. + 2(x - 1) \frac{y}{|y|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.46b)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{ip}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[\sqrt{2} (1 - x) P_0^2(z) \right. \right. \\ & + (2x - 1) \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} (x - 1) P_0(z) P''_0(z) \\ & \left. \left. - 2x \frac{y}{|y|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.46c)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HV_{ii}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[P_0^2(z) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) \right] t + 2 \left[-\sqrt{2} x P_0^2(z) \right. \right. \\ & + (2x + 1) \frac{y}{|y|} P_0(z) P'_0(z) + \sqrt{2} x P_0(z) P''_0(z) \\ & \left. \left. - \sqrt{2} P_0'^2(z) - 2x \frac{y}{|y|} P'_0(z) P''_0(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/3+\dots} \end{aligned} \quad (5.46d)$$

Résultats à proximité de la diagonale

Les calculs sont un peu plus complexes près de la diagonale. À partir de (5.14), nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} G_{\frac{x+l}{2}, \frac{y+h}{2}} &= \frac{1}{ab} \left\{ D_0(z) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(k \frac{x}{|x|} + l \frac{x}{|x|} + h \frac{y}{|y|} \right) D'_0(z) \sqrt{t} \right. \\ &\quad + \left[\frac{(k \frac{x}{|x|} - l \frac{x}{|x|} + h \frac{y}{|y|})^2}{4} D_0(z) + 4D_2(z) \right. \\ &\quad \left. \left. + (k \frac{x}{|x|} + h \frac{y}{|y|}) l \frac{x}{|x|} \right] t + \mathcal{O}(\sqrt{t^3}) \right\} e^{zt/12+\dots} \end{aligned}$$

On observe une recrudescence des facteurs de signe $x/|x|$ et $y/|y|$ provenant du développement en série des valeurs absolues. Détail qui a son importance : le facteur k est affublé du signe $(x) = x/|x|$ du fait de notre définition $y = \pm|x+k|$. Nous aurions tout aussi bien pu définir $y = \pm x + k$. La transformation $k \rightarrow k \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|}$ relie ces deux choix. Rappelons que $z = \sqrt{2}|x|\sqrt{t}$ ici. On obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{pp}}(x, y) &= - \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - D_0'^2(z) \right] t + 4\sqrt{2} k \frac{x}{|x|} \right. \\ &\quad \left. D'_0(z) \left[D_0(z) - D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned} \quad (5.47a)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{pi}}(x, y) &= \left\{ 2 \left[D_0(z) - \frac{y}{|y|} D'_0(z) \right]^2 t - 2\sqrt{2} \left(k \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \left[D_0(z) - \frac{y}{|y|} D'_0(z) \right]^2 \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned} \quad (5.47b)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{ip}}(x, y) &= \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - D_0'^2(z) \right] t + 4\sqrt{2} k \frac{x}{|x|} \right. \\ &\quad \left. D'_0(z) \left[D_0(z) - D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned} \quad (5.47c)$$

$$\begin{aligned} \text{Corr}_{HH_{ii}}(x, y) &= - \left\{ 2 \left[D_0(z) - \frac{y}{|y|} D'_0(z) \right]^2 t - 2\sqrt{2} k \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right. \\ &\quad \left. \left[D_0(z) - \frac{y}{|y|} D'_0(z) \right]^2 \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots} \end{aligned} \quad (5.47d)$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{pp}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - \left(\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right) D_0(z) D'_0(z) - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} D_0'^2(z) \right] t \right. \\
& + \sqrt{2} k \left[- \left(1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0^2(z) + 2 \frac{x}{|x|} D_0(z) D'_0(z) + 2 D_0(z) D_0''(z) \right. \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0'^2(z) - 2 \frac{y}{|y|} D'_0(z) D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots}
\end{aligned} \tag{5.48a}$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{pi}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - \left(\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right) D_0(z) D'_0(z) - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} D_0'^2(z) \right] t \right. \\
& + \sqrt{2} \left(k + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) \left[- \left(1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0^2(z) + 2 \frac{x}{|x|} D_0(z) D'_0(z) + 2 D_0(z) D_0''(z) \right. \\
& \left. \left. + \left(1 - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0'^2(z) - 2 \frac{y}{|y|} D'_0(z) D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots}
\end{aligned} \tag{5.48b}$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{ip}}(x, y) = & - \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - \left(\frac{y}{|y|} + \frac{x}{|x|} \right) D_0(z) D'_0(z) + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} D_0'^2(z) \right] t \right. \\
& + \sqrt{2} \left[(k+1) \left(1 - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0^2(z) + 2(k-1) \frac{x}{|x|} D_0(z) D'_0(z) \right. \\
& - 2 \left(k - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0(z) D_0''(z) - (k-1) \left(1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0'^2(z) \\
& \left. \left. + 2(k-1) \frac{y}{|y|} D'_0(z) D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots}
\end{aligned} \tag{5.48c}$$

$$\begin{aligned}
\text{Corr}_{HV_{ii}}(x, y) = & \left\{ 2 \left[D_0^2(z) - \left(\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} \right) D_0(z) D'_0(z) + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} D_0'^2(z) \right] t \right. \\
& + \sqrt{2} \left[k \left(1 - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0^2(z) + 2 \frac{x}{|x|} \left(k-1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0(z) D'_0(z) \right. \\
& - 2k D_0(z) D_0''(z) - k \left(1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D_0'^2(z) \\
& \left. \left. + 2 \frac{y}{|y|} \left(k-1 + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \right) D'_0(z) D_0''(z) \right] \sqrt{t^3} + \mathcal{O}(t^2) \right\} e^{zt/6+\dots}
\end{aligned} \tag{5.48d}$$

Discussion

Nous avons affiché ces volumineux résultats de calcul de façon assez brute et rébarbative. S'ils sont écrits avec tant de détail, ce n'est pas tant pour le plaisir de lecture qu'à titre d'archive au cas où ils pourraient se révéler utiles à l'avenir. Il n'empêche qu'il y a plusieurs points d'intérêt dont nous souhaiterions discuter.

- L'équation (5.15) nous indiquait que les $P_0(z)$ et $D_0(z)$ étaient proportionnels à la fonction de Bessel $K_0(z)$. Au vu des résultats, nous constatons avec soulagement que nous n'avons affaire qu'à cette fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{t}^3)$. Les développements en série compliqués que sont $D_2(z)$ et $P_2(z)$ n'apparaissent en fait qu'à partir de l'ordre $\mathcal{O}(t^2)$. Nous n'aurons donc pas à nous en soucier plus avant.
- Seul le premier ordre des développements nous importe lorsque l'on s'intéresse au comportement à très longue distance. L'utilité principale de l'ordre sous-dominant que nous avons écrit se trouve dans la limite uniforme. En effet, pour $t \rightarrow 0$, nous devons retrouver les expressions que nous avons obtenues au chapitre 4 dans le cas uniforme. Il est important de prendre la peine de vérifier cela systématiquement afin de s'assurer de la cohérence de nos expressions. L'ordre sous-dominant nous permet alors d'augmenter de beaucoup notre confiance en la validité des résultats.

Calculons explicitement cette limite sur un exemple. Soit la fonction de corrélation mixte sur réseau (pair,pair) à proximité de la diagonale (5.48a). Les expressions de l'annexe B nous indiquent que la plupart des termes s'annulent lorsque $t \rightarrow 0$. Platement, on pourrait dire que les seuls termes qui contribuent sont ceux dont la somme des ordres de dérivées des K_0 est égale à la puissance de $\sqrt{t}$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \text{Corr}_{Hv_{pp}}(x, y) &= 2 \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} \lim_{t \rightarrow 0} D_0'^2(z) t + 2\sqrt{2}k \frac{y}{|y|} \\ &\quad \lim_{t \rightarrow 0} D_0'(z) D_0''(z) \sqrt{t}^3 + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 x^2} \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} - \frac{k}{4\pi^2} \frac{y}{|y||x|^3} + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{aligned}$$

Pour avancer, il faut se rappeler de la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xk + k^2 \quad \text{avec } |k| \ll |x|$$

À l'aide de développements en série nous arrivons à

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{Corr}_{Hv_{pp}}(x, y) = \frac{xy}{\pi^2 r^4} \left(1 - \frac{k}{x} + \frac{4xk}{r^2}\right) - \frac{ky}{\pi^2 r^4} + \mathcal{O}(r^{-4})$$

$$= \frac{xy}{\pi^2 r^4} + \mathcal{O}(r^{-4})$$

Il faut comparer ce résultat à (4.39e). Ils n'ont pas l'air tout à fait équivalents au premier coup d'oeil : la raison en est que le terme en r^{-3} de (4.39e) disparaît pour $|x| \sim |y|$.

On peut faire pareil (et on l'a fait) pour s'assurer que toutes les autres fonctions de corrélation sont bien en accord avec les résultats uniformes.

- L'expression asymptotique des fonctions de Bessel K_α à grande distance nous informe que les corrélations décroissent toutes en $e^{-r\sqrt{t}}$. La longueur de corrélation à proximité du cas uniforme est donc $\xi = t^{-1/2}$ par définition. Celle-ci donne une échelle de distance intrinsèque au système : lorsqu'on s'éloigne d'une distance de l'ordre de ξ , la corrélation diminue de l'ordre de $e^{-1} \simeq 3$. On observe bien qu'elle diverge lorsque t tend vers zéro. Dans cette limite, le système ne possède plus d'échelle de longueur intrinsèque : c'est ce qu'on appelle un point critique. Le modèle de dimères deux-périodique possède donc bien comme point critique $a = b$. Les fonctions de corrélation décroissent de façon algébrique en ce point et exponentielle ailleurs. Le paramètre t contrôle en fait la manière selon laquelle notre système approche du point critique.

Chapitre 6

Limite d'échelle et théorie des champs

Nous avons calculé dans le chapitre précédent toutes les fonctions de corrélation entre deux dimères sur le réseau carré deux-périodique. Nous avons par contre dû nous restreindre à un développement en série sur la distance le long du réseau et la distance au point critique, ainsi qu'à des directions privilégiées. Le but final de tout cela étant d'examiner le comportement à très grande distance et donc la limite d'échelle. Nous y voici.

Avant tout, soulignons que notre traitement et notre discussion de la limite d'échelle et de la théorie des champs que l'on peut y associer ne seront ni complets, ni rigoureux. La théorie du groupe de renormalisation qui sous-tend ces concepts et son application aux modèles sur réseau est fort complexe. Nous ne débattons donc pas de la validité ou de la pertinence des affirmations que nous allons faire. Nous référons simplement le lecteur à [23], duquel la discussion qui suit est essentiellement tirée, pour de plus amples détails.

Intuitivement, pour étudier le comportement à grande échelle de notre système, il nous suffit de le regarder de plus loin ! Les détails se brouilleraient et nous serions à même d'en examiner des portions de plus en plus grandes. Ou, de manière équivalente, nous pourrions compresser progressivement le système.

Pour formaliser cela mathématiquement, imaginons notre réseau comme étant plongé dans la variété $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'espace usuel à deux dimensions. Celui-ci est muni de sa notion euclidienne de distance. Introduisons alors le pas du réseau, que nous écrirons ϵ , un paramètre réel encodant la distance euclidienne entre deux sommets adjacents. Le réseau peut alors être vu comme un sous-ensemble de $\epsilon\mathbb{Z}^2$ plongé dans la variété $\mathbb{R}^2$. Dans notre cas il correspond même à l'ensemble $\epsilon\mathbb{Z}^2$, puisque nous nous posons dans la limite de volume infini. À titre d'exemple, en nous plaçant dans le contexte de la surface d'un

cristal réel, le pas du réseau s'identifierait à la distance entre deux atomes plus proches voisins.

Ces considérations font ressortir deux notions différentes de distance. D'une part la distance en termes de pas du réseau, avec laquelle nous avons travaillé jusqu'ici. D'autre part la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. C'est la distance réseau qui est significative : le modèle ne ressent pas la distance euclidienne.

Nous disions que pour étudier le système de loin, nous pouvions le compresser. Cela revient à faire diminuer progressivement le pas du réseau ϵ sans modifier la distance euclidienne. La limite d'échelle s'obtient en prenant $\epsilon \rightarrow 0$ tout en maintenant la distance euclidienne fixée, que nous identifierons alors à une distance macroscopique.

Dans cette limite d'échelle, le réseau tend vers le continuum $\mathbb{R}^2$ et nos observables sur celui-ci vers des champs définis en tout point de l'espace. On peut alors s'attendre à ce que notre modèle puisse être décrit par une théorie des champs.

La manière rigoureuse d'étudier la façon selon laquelle les observables sur réseau tendent vers des champs est à travers le groupe de renormalisation. Mais il est généralement impossible pour les modèles sur réseau d'en mener à bien les étapes jusqu'à leur terme, si bien que nous prenons la limite de manière plus libérale.

Nous suivons pour ce faire l'article concernant un tas de sable abélien [22], qui sert de référence principale. Soient r la distance macroscopique et d la distance réseau. Alors la limite d'échelle nous dit que $r = \epsilon d$ reste fixe, et donc que la distance réseau devient infinie. Dans le même temps, nous faisons tendre notre longueur de corrélation $\xi = 1/\sqrt{t}$ vers l'infini, c'est-à-dire que nous approchons asymptotiquement du point critique. En unités naturelles, la dimension de t est celle du carré d'une masse et nous posons donc

$$t = \epsilon^2 M^2 \tag{6.1}$$

Et nous avons par suite

$$z = Mr \tag{6.2}$$

qui est une quantité finie.

Les fonctions de corrélation tendent malgré tout à disparaître dans cette limite, même au point critique. La théorie de la renormalisation suggère que nos champs soient dotés de dimensions anormales Δ (ou dimensions d'échelles) de façon à ce que toutes nos corrélations ne s'annulent pas.

Quels sont ces champs ? Pour qu'une théorie des champs décrive la limite d'échelle de notre modèle, il faut qu'à chaque observable sur le réseau O l'on

puisse associer un champ Φ dans la théorie. On impose alors que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\sum_i \Delta_i} \left\langle \prod_{i=1}^n O_i\left(\frac{\vec{d}_i}{\epsilon}\right) \right\rangle_{\text{réseau}} = \left\langle \prod_{i=1}^n \Phi_i(\vec{r}) \right\rangle_{TDC} \quad (6.3)$$

C'est-à-dire que les limites des fonctions de corrélation sur le réseau doivent être égales aux fonctions de corrélation entre les champs.

Dans notre cas, les observables sur le réseau dont nous nous sommes souciés sont liées à la présence d'un dimère de type donné en un point donné. Nous associons donc naturellement à chaque type de dimère un champ. Les dimères horizontaux seront décrits par des champs que l'on notera ϕ_{pp}, ϕ_{pi} etc et les dimères verticaux par des champs appelés ψ_{pp}, ψ_{pi} etc. Les calculs des fonctions de corrélation des chapitres 4 et 5 nous indiquent de leur donner à tous une dimension anormale $\Delta = 1$. Formellement

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\chi_{HH_{pp}}\left(\frac{\vec{r}}{\epsilon}\right) - \langle H_{pp} \rangle \right] = \phi_{pp}(\vec{r}) \quad (6.4)$$

où χ est la fonction caractéristique du dimère, que nous avons introduite au chapitre 4. Par abus de notation, nous écrirons maintenant r pour la distance macroscopique et non plus la distance réseau ; de même x et y seront les coordonnées macroscopiques. En termes de coordonnées réseau, ces quantités seraient infinies.

À la limite d'échelle, nos résultats du chapitre 5 peuvent alors s'écrire de façon bien plus compacte sous forme de corrélations de champs.

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pp}(\vec{r}) \rangle = -\frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - 2K_0'^2(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \gg |y| \quad (6.5a)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pp}(\vec{r}) \rangle = -\frac{M^2}{2\pi^2} K_0^2(Mr) \quad \text{pour } |y| \gg |x| \quad (6.5b)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pp}(\vec{r}) \rangle = -\frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - K_0'^2(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \sim |y| \quad (6.5c)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pi}(\vec{r}) \rangle = \frac{M^2}{2\pi^2} K_0^2(Mr) \quad \text{pour } |x| \gg |y| \quad (6.6a)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pi}(\vec{r}) \rangle = \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ \left[K_0(Mr) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} K_0'(Mr) \right]^2 \right\} \quad \text{pour } |y| \gg |x| \quad (6.6b)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \phi_{pi}(\vec{r}) \rangle = \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ \left[K_0(Mr) - \frac{y}{|y|} K_0'(Mr) \right]^2 \right\} \quad \text{pour } |x| \sim |y| \quad (6.6c)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) + \sqrt{2} \frac{x}{|x|} K_0(Mr) K_0'(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \gg |y| \quad (6.7a)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} K_0(Mr) K_0'(Mr) \right\} \quad \text{pour } |y| \gg |x| \quad (6.7b)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - \left(\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|} \right) K_0(Mr) K_0'(Mr) \right. \\ \left. - \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} K_0'^2(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \sim |y| \end{aligned} \quad (6.7c)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - \sqrt{2} \frac{x}{|x|} K_0(Mr) K_0'(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \gg |y| \quad (6.8a)$$

$$\langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - \sqrt{2} \frac{y}{|y|} K_0(Mr) K_0'(Mr) \right\} \quad \text{pour } |y| \gg |x| \quad (6.8b)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{pp}(0) \psi_{pp}(\vec{r}) \rangle = - \frac{M^2}{2\pi^2} \left\{ K_0^2(Mr) - \left(\frac{y}{|y|} + \frac{x}{|x|} \right) K_0(Mr) K_0'(Mr) \right. \\ \left. + \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} K_0'^2(Mr) \right\} \quad \text{pour } |x| \sim |y| \end{aligned} \quad (6.8c)$$

Nous pouvons faire de même avec les autres fonctions de corrélation HH et HV, ainsi qu'avec les fonctions VV que l'on déduisait aisément à l'aide des symétries. Le résultat en est une série de fonctions de corrélations que la théorie des champs associée au modèle doit pouvoir décrire.

En écrivant explicitement toutes ces corrélations, on peut remarquer que les choix

$$\phi_{pi}(\vec{r}) = - \phi_{ii}(\vec{r}) \quad (6.9a)$$

$$\phi_{ip}(\vec{r}) = - \phi_{pp}(\vec{r}) \quad (6.9b)$$

$$\psi_{pi}(\vec{r}) = - \psi_{pp}(\vec{r}) \quad (6.9c)$$

$$\psi_{ip}(\vec{r}) = - \psi_{ii}(\vec{r}) \quad (6.9d)$$

satisfont à toutes les relations. D'autre part nos symétries sont bien entendu conservées à la limite d'échelle.

Comme on l’a dit, on ne peut pas réellement déduire la théorie des champs associée au point critique de notre modèle. On peut cependant essayer de la deviner sur base de considérations théoriques ou encore de liens avec d’autres modèles. Cela permet de faire émerger des théories candidates. Pour que l’une de ces théories soit la bonne, il faut que chaque observable sur le réseau puisse être décrite par un de ses champs. Ce doit a fortiori être le cas de nos expressions (6.5)-(6.8).

En fait, il existe une théorie des champs qui se trouve être notre candidate favorite [24] [25]. C’est une théorie des champs conforme logarithmique de charge centrale $c = -2$, décrite brièvement dans [22]. C’est également une théorie fermionique scalaire libre. Il a déjà été montré que sa version non-massive permettait de décrire les fonctions à deux points dans le cas uniforme. Or, nos résultats deux-périodiques peuvent être interprétés comme une perturbation massive du modèle uniforme et l’on s’attend par suite à ce que l’extension massive de la théorie des champs puisse décrire nos fonctions de corrélation.

Mais voilà, comme on l’a déjà souligné, ces fonctions de corrélation contiennent des facteurs de signe $x/|x|$ et $y/|y|$. Surtout, ceux-ci restent présent à la limite d’échelle, comme on peut le voir ci-dessus. Or, les fonctions de corrélation de notre théorie des champs perturbée sont censées être invariantes sous translations. Cela ne s’accorde pas à première vue avec la dépendance de nos expressions selon le quadrant considéré. Un des soucis qui se pose dans l’étude du problème est que nous n’avons d’expressions pour nos corrélations que le long de certaines directions privilégiées, et non dans tout le domaine.

Là où les corrélations du tas de sable [22] s’exprimaient assez naturellement à l’aide de cette théorie des champs massive, le cas présent est plus nébuleux. Cela demande des recherches supplémentaires afin d’y apporter des éclaircissements. Ce résultat peut sembler négatif au premier abord, mais il est toujours enrichissant de se trouver surpris lors de l’étude de problèmes physiques.

Annexe A

Les intégrales elliptiques

Cette annexe est tout à fait dispensable. Les fonctions elliptiques ne jouent un rôle que très marginal dans les calculs du chapitre 5, et aucun dans les autres chapitres. Le but de la présente est donc simplement d'en donner une introduction pour le moins informelle au lecteur qui n'en aurait jamais entendu parler et qui serait curieux d'en apprendre plus. La référence principale de toute l'annexe est [26].

Apparition en physique

Historiquement, l'intérêt pour les intégrales elliptiques a surtout été dû à la physique. Ces intégrales apparaissent naturellement lorsqu'on essaie de calculer la longueur d'arc d'une ellipse. C'est notamment un calcul important en astronomie, depuis la découverte des lois de Kepler.

Examinons cela. Une ellipse est donnée par les points dont la somme des distances à deux points fixes, nommés foyers, est constante. Pour simplifier les calculs, choisissons les coordonnées de sorte que l'abscisse parcoure le grand axe de l'ellipse, et l'ordonnée le petit axe, et que les foyers se situent en $(\pm c, 0)$. Si l'ellipse est de longueur $2a$ et de largeur $2b$, son équation caractéristique impose :

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

que l'on peut remettre sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La longueur d'arc d'une fonction différentiable est donnée par

$$L = \int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dans le premier quadrant, nous obtenons alors

$$L(u'; a, b) = \int_0^{u'} du \sqrt{\frac{1 - e^2 u^2}{1 - u^2}} = \int_0^{u'} du \frac{1 - e^2 u^2}{\sqrt{(1 - e^2 u^2)(1 - u^2)}}$$

où $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité et $u = \frac{x}{a}$. Cette intégrale se nomme **intégrale elliptique de deuxième espèce**. Celle-ci n'est en général pas soluble en terme de fonctions simples. La nomenclature provient donc précisément de là. À l'aide du changement de variable $u = \sin \theta$, cette intégrale peut être réécrite sous une forme plus compacte

$$L(\phi, e) = \int_0^\phi d\theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}$$

C'est la forme dite de Legendre de l'intégrale elliptique de deuxième espèce. La circonférence de l'ellipse est donnée par

$$4 L\left(\frac{\pi}{2}, e\right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}$$

Par conséquent, on appellera $L(\frac{\pi}{2}, e)$ "intégrale elliptique complète".

Des intégrales similaires apparaissent régulièrement en physique et en mathématiques. Un autre exemple en est donné par le calcul de la période d'oscillation d'un pendule. Habituellement, on simplifie les expressions en considérant de petits déplacements autour de l'équilibre ($\sin \theta \approx \theta$). Le calcul général nous amène en réalité à une intégrale de forme similaire à celle de l'ellipse :

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - e^2 z^2)}}$$

On retrouve de même cette intégrale lors du calcul de la longueur d'arc du lemniscate. Celle-ci est nommée **intégrale elliptique de première espèce**, ici écrite sous sa forme dite de Jacobi.

Définition formelle

On appelle intégrale elliptique toute fonction f qui peut être mise sous la forme

$$f(x) = \int_c^x dt R(t, \sqrt{P(t)})$$

où c est une constante, R une fonction rationnelle de ses arguments, et P un polynôme de degré 3 ou 4 dont les racines sont distinctes. En général, les intégrales de cette forme ne peuvent pas être exprimées uniquement à l'aide de fonctions élémentaires. Cependant, il est possible de démontrer que des

changements appropriés de coordonnées permettent de les écrire en termes uniquement d'intégrales rationnelles et de trois formes canoniques, appelées intégrales elliptiques de première, de deuxième et de troisième espèce. Sous leurs formes dites de Legendre (d'abord), et de Jacobi (ensuite), elles sont :

- Intégrales elliptiques de première espèce

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

- Intégrales elliptiques de deuxième espèce

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \int_0^{\sin \phi} dt \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}}$$

- Intégrales elliptiques de troisième espèce

$$\Pi(n, \phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{1 - n \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \phi} \frac{1}{1 - nt^2} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

Par convention, les intégrales elliptiques complètes s'écrivent

$$\begin{aligned} K(k) &= F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \\ E(k) &= E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \\ \Pi\left(n, \frac{\pi}{2}, k\right) &= \Pi(n, k) \end{aligned}$$

Comme on l'a dit, les intégrales elliptiques ne sont pas solubles analytiquement. Mais les mathématiciens ont pu trouver au cours du temps des relations entre les intégrales elliptiques incomplètes pour différentes bornes d'intégration. Une telle relation est donnée par le théorème d'addition d'Euler. Soit $f(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2)$. Les intégrales elliptiques de première espèce vérifient :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

avec

$$z = \frac{x\sqrt{f(y)} + y\sqrt{f(x)}}{1 - k^2 x^2 y^2}$$

Introduisons un autre concept mathématique. Un théorème d'addition pour une fonction $f(x)$ est une relation de la forme

$$f(x + y) = g(f(x), f(y))$$

telle qu'il en existe pour l'exponentielle ou les fonctions trigonométriques. Quel est le lien avec l'expression intégrale due à Euler ? Pour le voir, intéressons-nous à l'inverse des fonctions elliptiques incomplètes, c'est-à-dire envisageons la borne d'intégration comme une fonction de la valeur de l'intégrale. Par exemple, pour la première espèce,

$$x = \int_0^{sn(x,k)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Et on peut définir la fonction $sn(x, k)$ et étudier ses propriétés. On nommera de telles fonctions, inverses des intégrales elliptiques, les **fonctions elliptiques**. On peut alors réécrire la relation intégrale d'Euler sous forme d'un théorème d'addition sur la fonction elliptique associée :

$$sn(u+v, k) = \frac{sn(u)\sqrt{f(sn(v))} + sn(v)\sqrt{f(sn(u))}}{1 - k^2 sn^2(u)sn^2(v)}$$

Weierstrass a montré que toute fonction pour laquelle il existe un théorème d'addition algébrique est soit une fonction elliptique soit un cas limite de fonction elliptique (i.e. une fonction rationnelle, trigonométrique ou exponentielle).

Ce n'est pas tout. Si l'on étend les fonctions elliptiques au plan complexe ($u \in \mathbb{C}$), une autre propriété étonnante des fonctions elliptiques apparaît : elles sont doublement périodiques. Cette découverte a fait le lien entre les fonctions doublement périodiques et les intégrales elliptiques.

Pour cette raison historique, les fonctions méromorphes doublement périodiques du plan complexe sont appelées fonctions elliptiques.

Annexe B

La fonction de Bessel K_α

Contrairement à l'annexe précédente, celle-ci n'a pas pour but de fournir une introduction détaillée. Nous partirons du principe que le lecteur est familier avec les fonctions de Bessel. Même s'il ne l'est pas, l'idée en est très simple : ce sont des fonctions compliquées qui apparaissent régulièrement en physique et dont les nombreuses propriétés ont été étudiées en détail. Seule l'une d'entre elles nous intéresse dans le cadre de ce travail : la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce K_α . En effet, l'équation (5.15) nous indique que tous les termes dominants de nos fonctions de corrélation deux-périodiques – et la majorité des termes sous-dominants d'ailleurs – peuvent s'exprimer à l'aide de la fonction K_0 et de ses dérivées. Par conséquent, nous souhaitons regrouper ici les propriétés nécessaires à la discussion du chapitre 5. Notons en passant que les résultats ci-dessous sont tous repris sur Wikipédia, il n'y aura donc aucune référence à un quelconque article savant.

Soit donc la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce $K_\alpha(z)$. Limitons-nous à $z \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. On peut écrire cette fonction de manière compacte sous forme intégrale

$$K_\alpha(z) = \int_0^\infty du e^{-z \cosh u} \cosh \alpha u \quad (\text{B.1})$$

Nous avons besoin de connaître le comportement de K_0 et de ses dérivées pour un argument z très grand ou très petit. Il existe à cet effet la formule

$$K_\alpha(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\alpha^2 - 1}{8z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \right) \quad (z \gg 1) \quad (\text{B.2})$$

Et pour $z \ll \sqrt{\alpha + 1}$

$$K_\alpha(z) \sim \begin{cases} -\ln \frac{z}{2} - \gamma & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Avec cela nous avons toutes les propriétés nécessaires concernant K_0 . De plus, ses dérivées s'expriment facilement en fonction des K_α . On peut le prouver sans difficulté à partir de la forme intégrale (B.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} K_\alpha(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^\infty du e^{-z \cosh u} \cosh \alpha u \\ &= \int_0^\infty du \frac{\partial}{\partial z} e^{-z \cosh u} \cosh \alpha u \\ &= -\frac{1}{2} (K_{\alpha+1}(z) + K_{|\alpha-1|}(z)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Pour les plus rigoureux, il est possible d'utiliser le théorème de convergence dominée afin de passer de la première à la seconde ligne, c'est-à-dire différencier sous l'intégrale. Grâce à cela nous obtenons immédiatement

$$\lim_{z \rightarrow 0} K'_0(z) = -\frac{1}{z} \quad (\text{B.5})$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} K''_0(z) = \frac{1}{z^2} \quad (\text{B.6})$$

Ce sont là toutes les relations dont nous aurons besoin.

Bibliographie

- [1] Federico ARDILA et Richard P. STANLEY. *Tilings*. 2005. arXiv : [math/0501170](https://arxiv.org/abs/math/0501170) [math.CO]. URL : <https://arxiv.org/abs/math/0501170>.
- [2] Richard KENYON. *Lectures on Dimers*. 2009. arXiv : 0910.3129 [math.PR].
- [3] Daniel ŠTEFANKOVIČ, Eric VIGODA et John WILMES. « On Counting Perfect Matchings in General Graphs ». In : *LATIN 2018 : Theoretical Informatics*. 2018.
- [4] T. S. CHANG. « Statistical theory of the adsorption of double molecules ». In : *Proceedings of the Royal Society A*. 1939. DOI : <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0014>.
- [5] Ralph Howard FOWLER et George Stanley RUSHBROOKE. « An attempt to extend the statistical theory of perfect solutions ». In : *Transactions of The Faraday Society* 33 (1937).
- [6] Ole J. HEILMANN et Elliott H. LIEB. « Theory of Monomer-Dimer Systems ». In : *Statistical Mechanics : Selecta of Elliott H. Lieb*. Springer Berlin Heidelberg, 2004. DOI : 10.1007/978-3-662-10018-9_7.
- [7] Rodney J. BAXTER. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, 1982.
- [8] E.G.D. COHEN, J. DE BOER et Z.W. SALSBERG. « A cell-cluster theory for the liquid state. II ». In : *Physica* 21 (1954). DOI : [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(54\)91026-5](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(54)91026-5).
- [9] P. W. KASTELEYN. « Dimer Statistics and Phase Transitions ». In : *Journal of Mathematical Physics* 4 (1963).
- [10] P. W. KASTELEYN. « The statistics of dimers on a lattice : I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice ». In : *Physica* 27 (1961). DOI : 10.1016/0031-8914(61)90063-5.
- [11] Yacine IKHLEF et Jesper JACOBSON. *Lecture notes*. URL : <https://www.phys.ens.psl.eu/~jacobsen/AIMES/Dimers.pdf>.
- [12] H. N. V. TEMPERLEY et Michael E. FISHER. « Dimer problem in statistical mechanics-an exact result ». In : *The Philosophical Magazine : A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics* 6 (1961). DOI : 10.1080/14786436108243366.

- [13] Lars ONSAGER. « Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition ». In : *Phys. Rev.* 65 (1944). DOI : 10.1103/PhysRev.65.117.
- [14] Pierre LALONDE. « A non-commutative version of Jacobi's equality on the cofactors of a matrix ». In : *Discrete Mathematics* 158 (1996). DOI : [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(95\)00040-4](https://doi.org/10.1016/0012-365X(95)00040-4).
- [15] Sergio CARACCILO, Alan D. SOKAL et Andrea SPORTIELLO. « Algebraic/combinatorial proofs of Cayley-type identities for derivatives of determinants and pfaffians ». In : *Advances in Applied Mathematics* 50 (2013). DOI : 10.1016/j.aam.2012.12.001.
- [16] Vyatcheslav B. PRIEZZHEV et Philippe RUELLE. « Boundary monomers in the dimer model ». In : *Phys. Rev. E* 77 (2008). DOI : 10.1103/PhysRevE.77.061126.
- [17] William N. Anderson JR. et Thomas D. MORLEY. « Eigenvalues of the Laplacian of a graph ». In : *Linear and Multilinear Algebra* 18 (1985). DOI : 10.1080/03081088508817681.
- [18] Adrien PONCELET et Philippe RUELLE. « Multipoint correlators in the Abelian sandpile model ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2017 (2017). DOI : 10.1088/1742-5468/aa9a59.
- [19] S Y GRIGOREV, V S POGHOSYAN et V B PRIEZZHEV. « Three-leg correlations in the two-component spanning tree on the upper half-plane ». In : *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* 2009 (2009). DOI : 10.1088/1742-5468/2009/09/p09008.
- [20] Frank SPITZER. *Principles of Random Walk*. 2^e éd. Springer New York, NY, 1976.
- [21] Barry M. MCCOY et Tai Tsun WU. *The Two-Dimensional Ising Model*. Harvard University Press, 1973. DOI : doi : 10.4159/harvard.9780674180758.
- [22] Stéphane MAHIEU et Philippe RUELLE. « Scaling fields in the two-dimensional Abelian sandpile model ». In : *Phys. Rev. E* 64 (2001). DOI : 10.1103/PhysRevE.64.066130.
- [23] Philippe RUELLE. « Sandpile Models in the Large ». In : *Frontiers in Physics* 9 (2021). DOI : 10.3389/fphy.2021.641966.
- [24] N. IZMAILIAN, Vyatcheslav PRIEZZHEV et Philippe RUELLE. « Non-Local Finite-Size Effects in the Dimer Model ». In : *Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications* 3 (2007). DOI : 10.3842/SIGMA.2007.001.
- [25] Alexi MORIN-DUCHESNE, Jørgen RASMUSSEN et Philippe RUELLE. « Integrability and conformal data of the dimer model ». In : *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* 49.17 (2016). DOI : 10.1088/1751-8113/49/17/174002.
- [26] Vladimir G. TKACHEV. *Elliptic functions : introduction course*. URL : <https://users.mai.liu.se/vlatk48/teaching/lect2-agm.pdf>.

