

Faculté des sciences

Équité des plans de pension publique de type comptes notionnels

Auteur: **Estelle FONTAINE**
Promoteur: **Pierre DEVOLDER**
Lecteur: **Pierre ARS**
Année académique 2024–2025
Master [120] en sciences actuarielles

Résumé

Les inégalités socio-économiques, telles que les différences au niveau du revenu ou du niveau d'éducation, entraînent des écarts significatifs d'espérance de vie, constituant un problème majeur d'équité dans les systèmes de retraite. Les individus ayant une espérance de vie plus courte font le même effort de cotisation que les autres, mais perçoivent leurs prestations de retraite sur une durée plus courte, accentuant ainsi les inégalités existantes. Ces écarts de longévité persistent et continuent de se creuser, soulignant l'importance de repenser ces systèmes. Ce mémoire examine les plans de pension publique de type comptes notionnels et propose plusieurs pistes dans le but d'améliorer l'équité du système. Il inclut une application numérique permettant d'illustrer les résultats de ces différentes pistes.

Summary

Socio-economic inequalities, such as differences in income or education levels, lead to significant disparities in life expectancy, constituting a major equity issue in pension systems. Individuals with shorter life expectancies make the same contribution efforts as others but receive their pension benefits over a shorter period, thereby increasing existing inequalities. These longevity disparities persist and continue to widen, highlighting the importance of rethinking these systems. This master thesis examines Notional Defined Contribution (NDC) pension scheme and proposes several ways to improve the fairness of the system. It includes a numerical application to illustrate the results of these different approaches.

Remerciements

En préambule de ce mémoire, je tiens tout d’abord à remercier mon promoteur, le Professeur Pierre Devolder, pour son engagement et l’accompagnement constant dont j’ai bénéficié tout au long de ce travail. Sa disponibilité et sa bienveillance ont été une aide précieuse pour la bonne conduite de ce mémoire.

Ma reconnaissance va également à l’ensemble des professeurs que j’ai eu le privilège de rencontrer et d’écouter durant ces années de master.

Je remercie ma famille pour son soutien indéfectible et la confiance qu’elle me porte, ainsi que mon compagnon, qui m’a encore une fois montré que je pouvais toujours compter sur lui et qui m’a constamment encouragée. Je suis également reconnaissante envers mes amis sur qui je peux m’appuyer, et en particulier ceux qui ont consacré du temps à la relecture de ce mémoire.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Théorie des systèmes de pension de type comptes notionnels	2
2.1	Présentation des systèmes de pension de type comptes notionnels	2
2.2	Paramètres des systèmes en comptes notionnels	3
2.3	Capital notionnel et rente de retraite	3
2.4	Avantages et inconvénients	4
2.5	Effets redistributifs	4
3	Adaptation des taux de cotisation dans un système en comptes notionnels	6
3.1	Hypothèses et notations	6
3.2	Adaptation des cotisations inscrites sur le compte notionnel	7
3.2.1	Calcul des taux notionnels adaptés Π_j^{not}	7
3.2.2	Décroissance des Π_j^{not}	13
3.2.3	Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t	13
3.3	Adaptation des taux réels de cotisation	15
3.3.1	Détermination des taux Π_j^r	15
3.3.2	Croissance des taux Π_j^r	17
3.3.3	Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t	18
3.4	Limites	19
4	Système progressif	20
4.1	Système progressif en prestations définies	20
4.2	Système progressif pour les comptes notionnels	21
4.3	Adaptation des cotisations inscrites sur le compte notionnel	21
4.3.1	Détermination des taux $\Pi_i^{not,tr}$	21
4.3.2	Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t	25
4.4	Adaptation des cotisations réelles	26
4.4.1	Détermination des taux $\Pi_i^{r,tr}$	26
4.4.2	Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t	28
5	Application numérique	30
5.1	Hypothèses	30
5.2	Résultats	32
6	Conclusion	34
	Bibliographie	35
A	Annexes	36

1 Introduction

À l’heure actuelle, les systèmes de pension publique doivent faire face à des défis majeurs, notamment en termes d’évolution démographique. L’une des principales préoccupations concerne l’hétérogénéité des espérances de vie au sein d’une population. Des études ont mis en évidence une corrélation positive entre le revenu et l’espérance de vie à la retraite [AYUSO, BRAVO et HOLZMANN 2016]. Les individus percevant des revenus plus élevés ont tendance à vivre significativement plus longtemps, ce qui implique des disparités au niveau des prestations de retraite. Ce déséquilibre remet en cause l’équité des systèmes de retraite, en particulier dans les régimes définis en répartition, car les prestations sont fortement liées à l’espérance de vie à la retraite. Par conséquent, les individus des classes aisées vont percevoir plus longtemps des prestations de retraite étant donné qu’ils vivent, en moyenne, plus longtemps.

Les régimes de pension de type comptes notionnels ne sont pas à l’abri de ce problème [BOADO-PENAS, HABERMAN et NAKA 2022 ; HOLZMANN et al. 2017]. Le système actuel pénalise les personnes ayant une faible espérance de vie, correspondant à une carrière avec des revenus moins élevés. En effet, malgré des efforts comparables en termes de cotisations (taux de cotisation constant), les individus ayant une espérance de vie plus faible perçoivent des prestations de retraite pendant une plus courte période que les individus ayant une espérance de vie plus élevée. Le système profite donc aux individus vivant plus longtemps, ce qui amplifie les inégalités socio-économiques.

Le but de ce mémoire est d’explorer différentes méthodes afin d’améliorer l’équité des systèmes de comptes notionnels. Quatre approches seront étudiées, certaines adaptant les cotisations créditées sur le compte notionnel, d’autres corrigeant directement les cotisations réelles. Le projet proposera notamment de mettre en place un mécanisme progressif qui tiendra compte des écarts de longévité entre les individus. Ce mécanisme s’inspire de [DIAKITE 2023] en proposant un système progressif pour un régime en prestations définies.

Dans un premier temps, le mécanisme des comptes notionnels et ses paramètres clés seront présentés. Ses principaux avantages et inconvénients seront également abordés. Ensuite, quatre approches visant à améliorer l’équité des régimes en comptes notionnels seront développées. Celles-ci introduiront des facteurs correctifs qui affecteront soit les cotisations réelles, soit les cotisations enregistrées sur le compte notionnel. Pour terminer, une application numérique viendra illustrer les résultats théoriques obtenus.

2 Théorie des systèmes de pension de type comptes notionnels

Ce premier chapitre est destiné à la présentation théorique des plans de pension de type comptes notionnels. Le mécanisme et les principes fondamentaux seront présentés, de même que les formules actuarielles associées [DEVOLDER 2019 ; BÖRSCH-SUPAN 2006 ; HOLZMANN 2017 ; BOZIO et PIKETTY 2008].

Les principaux avantages ainsi que les limites des comptes notionnels seront également abordés.

2.1 Présentation des systèmes de pension de type comptes notionnels

Dans un régime en comptes notionnels, chaque agent compose, tout au long de sa carrière, un capital dit notionnel. Ce dernier est constitué des cotisations obligatoires qui sont fictivement capitalisées. Ce capital sera converti en une rente viagère au moment de la retraite. Cette capitalisation se fait sur base d'un taux d'intérêt dit notionnel, qui est lié à l'évolution de l'économie. Différents indicateurs peuvent être utilisés pour définir ce taux notionnel, tels que, par exemple, le taux de croissance du PIB ou le taux de croissance du revenu moyen.

Le financement des comptes notionnels se fait par répartition, ce qui signifie que les actifs du moment paient les prestations de retraite des pensionnés du moment. Le niveau de cotisation est explicitement défini via un taux de cotisation fixe. Par conséquent, le système de comptes notionnels est un système financé par répartition et en cotisations définies.

Cependant, les prestations sont calculées sur base d'une logique de capitalisation. Tout au long de sa carrière, les cotisations d'un actif sont capitalisées fictivement et constituent le capital notionnel. Contrairement aux systèmes de capitalisation, il n'y a donc pas d'épargne réelle. Les montants inscrits sur le compte notionnel servent uniquement de base pour le calcul des prestations de retraite. Le système en comptes notionnels offre donc une certaine solidarité intergénérationnelle (car système par répartition), tout en encourageant la responsabilité individuelle, étant donné que les prestations sont directement liées aux cotisations versées.

Il est également important de noter que tous les salaires de la carrière sont pris en compte dans le calcul des prestations. Dans certains systèmes en prestations définies, seuls les derniers salaires de la carrière sont intégrés dans ces calculs. Par conséquent, le système en comptes notionnels favorise les longues carrières avec des salaires stables plutôt que les carrières courtes avec des hausses salariales importantes en bout de parcours.

Les systèmes en comptes notionnels sont adoptés par plusieurs pays depuis la fin des années 90. La Suède, l'Italie, la Pologne ou encore la Lettonie font partie des pays fonctionnant avec un tel système.

2.2 Paramètres des systèmes en comptes notionnels

Les notations suivantes seront utilisées pour présenter les différentes formules relatives aux comptes notionnels :

- Π = Taux de cotisation fixe
- x_0 = Âge d'entrée dans le système
- x_r = Âge légal de retraite
- ω = Âge ultime de survie
- ${}_x p_{x_r}$ = Probabilité de survie jusqu'à l'âge x étant en vie à l'âge x_r
- r_x = Taux d'intérêt notionnel entre l'âge x et l'âge $x + 1$
- S^x = Salaire perçu par un individu d'âge x
- r = Taux notionnel d'actualisation
- γ = Taux d'indexation des retraites

2.3 Capital notionnel et rente de retraite

À l'âge x , un individu se voit attribuer, sur son compte notionnel, une cotisation égale à ΠS^x . Le calcul du capital notionnel revient à établir le montant d'une épargne fictive à l'âge de la retraite, cette épargne fictive étant égale à la somme de toutes les cotisations versées durant la vie active, capitalisées au taux d'intérêt notionnel. Le capital notionnel au moment de la retraite, noté CN^{x_r} , est alors donné par

$$CN^{x_r} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \Pi S^x \left(\prod_{y=x}^{x_r-1} (1 + r_y) \right) \quad (1)$$

Il est important de constater que la mortalité des individus n'est pas prise en considération dans l'équation (1).

Le taux d'intérêt notionnel est un paramètre clé du système. Comme mentionné précédemment, il se base sur des indicateurs économiques tels que la croissance du PIB ou la croissance de la masse salariale. En comparaison, en capitalisation classique, un tel taux est fixé sur base de rendements financiers d'actifs réels. Canoniquement, le taux d'intérêt notionnel est égal au produit du taux de croissance de la population et du taux de croissance du salaire individuel. Deux effets sont donc pris en compte au sein de ce taux, à savoir un effet démographique et un effet salarial.

Le capital notionnel est ensuite converti en rente. La première rente de retraite d'un individu, notée RR^{x_r} , est donnée par

$$RR^{x_r} = \frac{CN^{x_r}}{a^{x_r}} \quad (2)$$

où $a^{x_r} = \sum_{x=x_r}^{\omega} {}_x p_{x_r} \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r}$ est l'annuité de conversion.

La rente est calculée en une seule fois au moment du départ à la retraite. Elle tient automatiquement compte de la mortalité des individus via la probabilité de survie.

Il est commun d'indexer les prestations de retraite et les salaires via le même taux. Ainsi, le taux γ est souvent fixé comme étant le taux de croissance du salaire individuel.

2.4 Avantages et inconvénients

L'un des principaux avantages du système en comptes notionnels est l'existence d'une solidarité intergénérationnelle propre aux systèmes par répartition. Les cotisations des actifs financent les pensions des retraités.

Le système étant en contributions définies, le taux de cotisation est constant, ce qui permet une certaine stabilité financière. La charge de la pension est connue dès le départ.

Comme expliqué précédemment, tous les salaires de la carrière sont pris en compte, ce qui favorise les carrières stables et constitue un réel atout pour ce régime de retraite.

La transparence du système doit également être soulignée. En effet, la valeur du compte notionnel est une information dont dispose chaque agent. Un suivi tout au long de la carrière de l'évolution des droits acquis peut donc être fait par chaque individu.

Bien que le système présente de nombreux avantages, il possède également certaines limites. La capitalisation étant fictive, il peut être nécessaire de mettre en place des mécanismes d'ajustement parfois complexes nécessitent afin de garantir la viabilité du système.

De plus, l'entière des risques est supportée par les retraités. En effet, l'amélioration de l'espérance de vie a pour conséquence une baisse des prestations des générations futures. Cela provient de la constance du taux de cotisation.

2.5 Effets redistributifs

La conversion du capital notionnel en rente repose sur des tables de mortalité unisexes. Une discrimination n'est donc pas faite au niveau du sexe. Cependant, les femmes vivent en moyenne plus longtemps que les hommes. Ainsi, un transfert de richesse des hommes vers les femmes s'effectue. En effet, les individus ayant une espérance de vie plus courte financent, indirectement, les personnes vivant plus longtemps [BOADO-PENAS, HABERMAN et NAKA 2022].

L'espérance de vie est également différente en fonction du statut socio-économique. Un niveau de revenu ou d'éducation plus élevé implique une espérance de vie plus longue. Une redistribution des personnes à bas revenus vers celles à revenus élevés est donc présente.

Le système en comptes notionnels est donc moins avantageux pour les personnes avec une plus petite espérance de vie. Le même taux de cotisation que les individus ayant une longue espérance de vie leur est appliqué, mais ils profiteront moins longtemps de leurs prestations de retraite.

La suite du travail se focalise sur l'hétérogénéité en termes d'espérance de vie. Des facteurs adaptés sont introduits pour tenter de prendre en compte cette disparité.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour améliorer l'équité d'un tel système. Par exemple, l'article [BRAVO et CULOTTA 2025] propose une correction dite *a posteriori*. Au moment de la conversion du capital notionnel en rente, un ajustement est fait par rapport à l'espérance de vie. Une telle méthode peut créer de mauvaises surprises, voire être discriminante. En effet, les individus cotisent via un même taux tout au long de leur carrière mais, au moment de la retraite, leur rente va être augmentée ou diminuée.

Les méthodes envisagées dans ce travail relèvent d'une démarche dite *a priori*. En travaillant directement sur les taux de cotisation, une correction se fait déjà en cours de carrière. Ces dernières sont développées dans les chapitres suivants et permettent d'amener plus de continuité.

3 Adaptation des taux de cotisation dans un système en comptes notionnels

Afin d'améliorer l'équité du système en compte notionnels, deux approches sont envisagées dans ce travail. La première consiste à associer à chaque classe salariale j un taux de cotisation Π_j . La seconde approche est expliquée et développée dans le chapitre suivant.

Deux critères sont utilisés pour calibrer les coefficients. Le premier est l'équité interclasses, le but étant d'améliorer l'équité du système. Cette dernière sera atteinte lorsque le ratio entre la valeur actuelle des cotisations et la valeur actuelle des prestations est identique pour chaque agent. Le second critère correspond à l'équivalence actuarielle dans un système en répartition. Il s'agit d'un équilibre transversal. Il traduit le fait que, à chaque instant t , la totalité des flux entrants dans le système (cotisations) doit être égale à la totalité des flux sortants (prestations).

Ce chapitre va donc associer un taux de cotisation Π_j à chaque classe salariale.

3.1 Hypothèses et notations

Les différents paramètres et hypothèses nécessaires aux développements qui vont suivre sont :

- La période de contribution est notée N .
- L'âge d'entrée dans le système est noté x_0 et l'âge légal de retraite x_r .
- L'âge ultime de survie est noté ω .
- Il existe 3 classes d'agents distinctes, caractérisées par leur salaire. Le salaire de la classe j au temps t et à l'âge x est noté $S_j^{(x,t)}$.
- La fonction qui donne la taille de la population d'âge x au temps t est notée $L(x,t)$. Cette fonction est donnée par :

$$L(x,t) = \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \quad (3)$$

où $L_j(x,t) = \alpha_j L(x,t)$ est la taille de la population d'âge x au temps t dans la classe salariale j et où α_j est la proportion d'individus dans la classe j .

- La mortalité avant retraite est négligée et la population est dans un état stationnaire absolu. Ainsi, $\forall x < x_r$, la fonction de population est donnée par :

$$L(x,t) = L \quad (4)$$

- Au temps t , le salaire d'un individu d'âge x appartenant à la classe j est donné par

$$S_j^{(x,t)} = S_j^{(x_0,0)} (1 + s_j)^t (1 + g)^t \quad (5)$$

où g correspond à l'effet d'inflation et s_j est le taux de croissance de salaire de la classe j .

- Le facteur d'actualisation est noté r et est supposé constant dans le temps.
- Le taux d'indexation des retraites est noté γ et est supposé constant dans le temps.

La population est donc divisée en trois classes distinctes, caractérisées par leur salaire initial et l'évolution de celui-ci. Les salaires sont ordonnés de façon croissante selon les classes :

$$S_1^{(x,t)} < S_2^{(x,t)} < S_3^{(x,t)} \quad \forall (x,t) \quad (6)$$

Cette hiérarchie salariale se reflète au niveau de l'espérance de vie : les individus de la classe 1, celle avec les revenus les plus faibles, ont l'espérance de vie la plus courte, tandis que ceux de la classe 3, la plus privilégiée, vivent le plus longtemps. Ainsi, si l'espérance de vie de la classe j est notée e_j , cela se traduit par :

$$e_1 < e_2 < e_3 \quad (7)$$

3.2 Adaptation des cotisations inscrites sur le compte notionnel

Dans ce premier cas, les cotisations réelles restent inchangées, c'est-à-dire que tous les agents présents dans le système ont tous le même taux de cotisation Π . Cependant, les cotisations qui sont inscrites sur le compte notionnel vont dépendre de la classe salariale à laquelle appartient l'individu. Ainsi, pour inscrire les cotisations d'un individu de la classe j sur son compte notionnel, un taux Π_j est utilisé. À chaque classe j , un taux Π_j est donc associé. Les cotisations réelles sont donc déconnectées des cotisations inscrites.

Une décroissance de ces taux Π_j est prévue. En effet, pour rééquilibrer les écarts de salaires entre les différentes classes, il est attendu que la classe salariale ayant les revenus les plus bas se voit inscrire une cotisation plus élevée que celle qu'elle aurait eu avec le taux Π . Les individus des classes à revenus plus bas ont tendance à vivre moins longtemps et donc à toucher leurs prestations de retraite sur une période plus courte. Il est donc raisonnable de s'attendre à ce que ces individus perçoivent des rentes majorées. Le raisonnement inverse s'applique à la classe la plus aisée.

3.2.1 Calcul des taux notionnels adaptés Π_j^{not}

Valeur actuelle des cotisations

Une distinction est faite entre les cotisations réelles et celles inscrites sur le compte notionnel. Comme expliqué auparavant, deux approches sont envisagées dans le but de corriger les écarts de longévité entre les classes et donc d'améliorer l'équité du système. La première piste prévoit une adaptation des cotisations réelles et la seconde un ajustement des cotisations inscrites sur le compte notionnel.

Le taux de cotisation réel étant égal à Π pour tous les agents, la valeur actuelle des cotisations réelles de la classe salariale j est donnée par :

$$C_j^{réelles} = \sum_{t=0}^{N-1} \Pi S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \quad (8)$$

En utilisant l'équation (5), l'expression de $C_j^{réelles}$ peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_j^{réelles} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi S_j^0 (1+g)^t (1+s_j)^t (1+r)^{N-t} \\ &= \Pi S_j^0 (1+r)^N \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{(1+g)(1+s_j)}{(1+r)} \right)^t \end{aligned} \quad (9)$$

La somme intervenant ci-dessus est la somme des N premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{(1+g)(1+s_j)}{(1+r)}$, elle peut donc se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{(1+g)(1+s_j)}{(1+r)} \right)^t &= \frac{\left(\frac{(1+g)(1+s_j)}{(1+r)} \right)^N - 1}{\left(\frac{(1+g)(1+s_j)}{(1+r)} \right) - 1} \\ &= \frac{(1+g)^N (1+s_j)^N - (1+r)^N}{(1+r)^N} \frac{1+r}{(1+g)(1+s_j) - (1+r)} \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, la valeur actuelle des cotisations réelles de la classe j est donnée par :

$$\begin{aligned} C_j^{réelles} &= \Pi S_j^0 (1+r) \frac{(1+g)^N (1+s_j)^N - (1+r)^N}{(1+g)(1+s_j) - (1+r)} \\ &= \Pi \widehat{S}_j^N \end{aligned} \quad (11)$$

où $\widehat{S}_j^N := S_j^0 (1+r) \frac{(1+g)^N (1+s_j)^N - (1+r)^N}{(1+g)(1+s_j) - (1+r)}$.

Le facteur $\widehat{S}_j^N$ représente la somme de tous les salaires indexés et inflatés d'une carrière d'un individu de la classe j .

La valeur actuelle des cotisations inscrites sur le compte notionnel de la classe j , quant à elle, vaut :

$$\begin{aligned}
 C_j^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi_j^{not} S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\
 &= \Pi_j^{not} \sum_{t=0}^{N-1} S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\
 &= \Pi_j^{not} \widehat{S}_j^N
 \end{aligned} \tag{12}$$

Valeur actuelle des prestations

Au moment de la retraite, le capital notionnel d'un individu est converti en une rente de retraite via la formule suivante :

$$RR_j = \frac{C_j^{CN}}{a} \tag{13}$$

où $a = \sum_{x=x_r}^{\omega} x p_{x_r} \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r}$ est le facteur de conversion.

Ainsi, la valeur actuelle des prestations de la classe sociale j est donnée par :

$$\begin{aligned}
 B_j &= \sum_{x=x_r}^{\omega} RR_j x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\
 &= RR_j a_j \\
 &= \frac{C_j^{CN}}{a} a_j
 \end{aligned} \tag{14}$$

où $a_j = \sum_{x=x_r}^{\omega} x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r}$ est le facteur de conversion de la classe sociale j . Ce dernier, contrairement au facteur a , tient compte de la longévité de la classe j .

Critère d'équité

Dès lors que le ratio d'équité actuarielle est le même pour chaque individu, quelle que soit sa classe salariale, l'équité entre les classes sera atteinte. Ce ratio est défini comme étant le rapport entre la valeur actuelle des prestations et celle des cotisations réellement payées. Les taux adaptés Π_j^{not} sont donc solutions des conditions d'équité suivantes :

$$\frac{B_1}{C_1^{réelles}} = \frac{B_2}{C_2^{réelles}} = \frac{B_3}{C_3^{réelles}} \tag{15}$$

La première équation nous permet d'obtenir une expression du taux Π_2^{not} en fonction de Π_1^{not} :

$$\begin{aligned}
\frac{B_1}{C_1^{réelles}} = \frac{B_2}{C_2^{réelles}} &\Leftrightarrow \frac{RR_1 a_1}{C_1^{réelles}} = \frac{RR_2 a_2}{C_2^{réelles}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{C_1^{CN} a_1}{C_1^{réelles}} = \frac{1}{a} \frac{C_2^{CN} a_2}{C_2^{réelles}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\Pi_1^{not} \widehat{S_1^N} a_1}{\Pi \widehat{S_1^N}} = \frac{\Pi_2^{not} \widehat{S_2^N} a_2}{\Pi \widehat{S_2^N}} \\
&\Leftrightarrow \Pi_2^{not} = \frac{a_1}{a_2} \Pi_1^{not}
\end{aligned} \tag{16}$$

Le même raisonnement, appliqué à l'équation faisant intervenir les classes 1 et 3, permet d'obtenir l'expression de Π_3^{not} en fonction de Π_1^{not} :

$$\begin{aligned}
\frac{B_1}{C_1^{réelles}} = \frac{B_3}{C_3^{réelles}} &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \frac{C_1^{CN} a_1}{C_1^{réelles}} = \frac{1}{a} \frac{C_3^{CN} a_3}{C_3^{réelles}} \\
&\Leftrightarrow \Pi_3^{not} = \frac{a_1}{a_3} \Pi_1^{not}
\end{aligned} \tag{17}$$

Cette première piste suggère donc d'introduire un rapport d'annuités afin de traiter les écarts entre les différentes classes. Les taux adaptés se différencient du taux de cotisation de base par un rapport entre deux annuités, tenant compte des écarts de longévité.

Détermination de Π_1^{not}

Dans les expressions obtenues ci-dessus, les taux Π_2^{not} et Π_3^{not} dépendent du taux Π_1^{not} . Il reste donc à exprimer Π_1^{not} en fonction des paramètres du système.

À n'importe quel instant t , le montant total des cotisations réelles doit financer les prestations versées à ce même instant. Il s'agit du critère d'équivalence actuarielle de la répartition. Mathématiquement, cette condition d'équilibre budgétaire se traduit par :

$$Cotisations^{tot,t} = Prestations^{tot,t} \tag{18}$$

Le montant total des cotisations de la classe j est donné par :

$$\begin{aligned}
C_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)} \\
&= \Pi \alpha_j L \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}
\end{aligned} \tag{19}$$

En ce qui concerne le montant total des prestations de la classe j , il est égal à :

$$\begin{aligned}
B_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_r}^{\omega} L_j(x,t) RR_j^t x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\
&= \alpha_j L RR_j^t a_j \\
&= \alpha_j L \frac{C_j^{CN,t}}{a} a_j \\
&= \alpha_j L \frac{a_j}{a} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \Pi_j^{not} S_j^{(x,t)}
\end{aligned} \tag{20}$$

Ainsi, l'expression du taux Π_1^{not} peut être extraite de l'équation (18) :

$$\begin{aligned}
C^{tot,t} = B^{tot,t} &\Leftrightarrow \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)} = \sum_{x=x_r}^{\omega} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) RR_j^t x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\
&\Leftrightarrow \Pi L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} = \frac{L}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \Pi_j^{not} S_j^{(x,t)} \\
&\Leftrightarrow \Pi \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \Pi_j^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \\
&\Leftrightarrow \Pi \bar{S} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \Pi_j^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}
\end{aligned} \tag{21}$$

où $\bar{S} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}$.

Le membre de droite de l'équation (21) se développe de la manière suivante :

$$\frac{1}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \Pi_j^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} = \frac{1}{a} (\alpha_1 a_1 \Pi_1^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \alpha_2 a_2 \Pi_2^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 a_3 \Pi_3^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)}) \tag{22}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{cases} \Pi_2^{not} &= \frac{a_1}{a_2} \Pi_1^{not} \\ \Pi_3^{not} &= \frac{a_1}{a_3} \Pi_1^{not} \end{cases} \quad (23)$$

, l'équation (22) devient

$$\begin{aligned} \Pi \bar{S} &= \frac{1}{a} (\alpha_1 a_1 \Pi_1^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \alpha_2 a_2 \frac{a_1}{a_2} \Pi_1^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 a_3 \frac{a_1}{a_3} \Pi_1^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)}) \\ &= \frac{a_1 \Pi_1^{not}}{a} (\sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}) \\ &= \frac{a_1 \Pi_1^{not}}{a} \bar{S} \end{aligned} \quad (24)$$

Le taux Π_1^{not} découle donc des valeurs des paramètres Π , a et a_1 :

$$\Pi_1^{not} = \frac{\Pi \bar{S} a}{a_1 \bar{S}} = \frac{\Pi a}{a_1} \quad (25)$$

L'équation ci-dessus permet d'exprimer Π_2^{not} et Π_3^{not} en fonction des paramètres Π , a_2 et a_3 :

$$\begin{cases} \Pi_2^{not} &= \frac{a}{a_2} \Pi \\ \Pi_3^{not} &= \frac{a}{a_3} \Pi \end{cases} \quad (26)$$

Ces résultats étaient attendus. En effet, dans le cas où aucune distinction salariale n'est faite entre les individus, un unique taux de cotisation est utilisé. Si tous les agents sont soumis à une même table de mortalité, les rapports d'annuités disparaissent dans les équations ci-dessus. Les trois taux Π_j^{not} sont alors confondus et égaux à Π . Autrement dit, plus aucune distinction en termes de longévité n'est faite et le cas de base est retrouvé.

3.2.2 Décroissance des Π_j^{not}

Les taux Π_j^{not} obtenus sont, comme attendu, décroissants. En effet,

$$\begin{aligned}\Pi_1^{not} > \Pi_2^{not} &\iff \Pi_1^{not} > \Pi_1^{not} \frac{a_1}{a_2} \\ &\iff a_2 > a_1\end{aligned}\tag{27}$$

cette dernière inégalité étant vérifiée car l'espérance de vie de la classe sociale 2 est plus élevée que celle de la classe sociale 1.

De la même manière,

$$\begin{aligned}\Pi_2^{not} > \Pi_3^{not} &\iff \Pi_1^{not} \frac{a_1}{a_2} > \Pi_1^{not} \frac{a_1}{a_3} \\ &\iff a_3 > a_1\end{aligned}\tag{28}$$

Cette décroissance est logique étant donné qu'elle permet aux classes ayant une plus petite espérance de vie d'obtenir une rente plus élevée, le taux de cotisation réelle (et donc les efforts de contribution) restant le même pour tous les agents.

3.2.3 Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t

Le but de cette section est de comparer, à un instant t , le montant total des cotisations affectées au compte notionnel et les cotisations réellement payées. Étant donné le caractère notionnel, ces deux montants ne seront peut-être pas exactement identiques. Ils doivent tout de même être proches, car il serait surprenant que le montant inscrit s'écarte fortement du montant réellement payé.

Au temps t , le montant total des cotisations réelles de la classe j est donné par :

$$C_j^{réelles,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)}\tag{29}$$

Par conséquent, au temps t , le total des cotisations effectives vaut :

$$\begin{aligned}C^{réelles,tot} &= C_1^{réelles,t} + C_2^{réelles,t} + C_3^{réelles,t} \\ &= \Pi L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \\ &= \Pi L \bar{S}\end{aligned}\tag{30}$$

où $\bar{S} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}$.

Le montant total des cotisations inscrites de la classe j , quant à lui, vaut :

$$C_j^{CN,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi_j^{not} S_j^{(x,t)} \quad (31)$$

Au temps t , le total des cotisations inscrites sur le compte notionnel est donc donné par :

$$\begin{aligned} C^{CN,tot} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \alpha_j L \Pi_j^{not} S_j^{(x,t)} \\ &= L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi_j^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \end{aligned} \quad (32)$$

Le rapport entre le total des cotisations réelles et le total des cotisations inscrites sur le compte notionnel vaut :

$$\frac{C^{CN,tot}}{C^{réelles,tot}} = \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi_j^{not} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}}{\Pi \bar{S}} \quad (33)$$

Les équations (25) et (26) procurent les valeurs des différents taux Π_j^{not} et permettent donc de réécrire le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{C^{CN,tot}}{C^{réelles,tot}} &= \frac{1}{\Pi \bar{S}} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\Pi a}{a_j} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \\ &= \frac{a}{\bar{S}} \sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j}{a_j} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j}{a_j} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}}{\sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j}{a} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}} \end{aligned} \quad (34)$$

Ce quotient n'est donc pas obligatoirement égal à 1, ce qui signifie que le montant total des cotisations réelles ne correspond pas au montant total des cotisations inscrites. Cependant, il est important de remarquer que la seule différence entre le numérateur et le dénominateur provient de l'annuité. Lorsqu'aucune distinction n'est faite entre les individus, le rapport est bien égal à 1. De plus, les annuités différenciées a_j n'étant pas très éloignées de l'annuité a , le quotient reste tout de même proche de 1.

3.3 Adaptation des taux réels de cotisation

La deuxième piste envisagée dans ce chapitre consiste à supposer que le taux de cotisation réel d'un agent est différent selon la classe à laquelle il appartient. Le taux de cotisation réel d'un individu de la classe salariale j est noté Π_j^r . En ce qui concerne les cotisations inscrites sur le compte notionnel, c'est le taux Π qui est utilisé pour tous les individus, aucune distinction n'étant faite au niveau de la classe salariale.

Une telle approche suggère que les taux Π_j^r sont plus élevés pour les classes ayant un salaire plus élevé. En effet, le but étant d'améliorer l'équité, il est attendu que les classes plus aisées cotisent davantage que les classes à bas revenus.

3.3.1 Détermination des taux Π_j^r

Valeur actuelle des cotisations

Le taux Π est employé pour calculer les cotisations inscrites sur le compte notionnel de tous les agents. Ainsi, la valeur actuelle des cotisations inscrites sur le compte notionnel de la classe sociale j est donnée par :

$$\begin{aligned} C_j^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\ &= \Pi \widehat{S}_j^N \end{aligned} \quad (35)$$

Pour rappel, la notation $\widehat{S}_j^N$ a été introduite dans la section précédente et représente la somme de tous les salaires de la carrière d'un individu de la classe j , indexés et inflatés.

Pour cette approche, chaque classe salariale j a son propre taux de cotisation Π_j^r . La valeur actuelle des cotisations réelles de la classe j vaut donc :

$$\begin{aligned} C_j^{réelles} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi_j^r S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\ &= \Pi_j^r \widehat{S}_j^N \end{aligned} \quad (36)$$

Valeur actuelle des prestations

La valeur actuelle des prestations de la classe sociale j est, comme dans la section précédente (équation (14)), donnée par :

$$B_j = \frac{C_j^{CN}}{a} a_j$$

Critère d'équité

Les taux Π'_j doivent satisfaire la condition d'équité (15). La première équation nous fournit une expression du taux Π'_2 en fonction de Π'_1 :

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{C_1^{réelles}} = \frac{B_2}{C_2^{réelles}} &\Leftrightarrow \frac{\Pi \widehat{S}_1^N a_1}{a \Pi'_1 \widehat{S}_1^N} = \frac{\Pi \widehat{S}_2^N a_2}{a \Pi'_2 \widehat{S}_2^N} \\ &\Leftrightarrow \Pi'_2 = \frac{a_2}{a_1} \Pi'_1 \end{aligned} \quad (37)$$

Le même raisonnement fournit l'expression de Π'_3 :

$$\Pi'_3 = \frac{a_3}{a_1} \Pi'_1 \quad (38)$$

Détermination de Π'_1

L'équation budgétaire (18) permet, à nouveau, de déterminer Π'_1 et de l'exprimer via les paramètres de notre système.

Dans ce cas-ci, le montant total des cotisations réelles de la classe j est donné par :

$$C_j^{tot,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi'_j S_j^{(x,t)}$$

Le montant total des prestations de la classe j est égal à :

$$\begin{aligned} B_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_r}^{\omega} L_j(x,t) RR_j^t x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\ &= \alpha_j L \frac{C_j^{CN,t}}{a} a_j \end{aligned} \quad (39)$$

Ainsi, l'expression du taux Π'_1 découle de :

$$\begin{aligned} C^{tot,t} = B^{tot,t} &\Leftrightarrow \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \Pi'_j S_j^{(x,t)} = \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \frac{C_j^{CN}}{a} a_j \\ &\Leftrightarrow L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi'_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} = \frac{L}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \end{aligned} \quad (40)$$

Le membre de gauche se réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi_j^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} &= \alpha_1 \Pi_1^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \alpha_2 \Pi_2^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 \Pi_3^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)} \\
&= \alpha_1 \Pi_1^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \alpha_2 \frac{a_2}{a_1} \Pi_1^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 \frac{a_3}{a_1} \Pi_1^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)} \\
&= \frac{\Pi_1^r}{a_1} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}
\end{aligned} \tag{41}$$

où la dernière égalité découle des équations (37) et (38).

Le taux Π_1^r est donc défini de la manière suivante :

$$\Pi_1^r = \frac{a_1}{a} \Pi \tag{42}$$

À nouveau, un rapport d'annuités apparaît. Pour les mêmes raisons que précédemment, la présence de ce rapport était prévisible. Lorsque la même mortalité s'applique à tous les agents, ce rapport est égal à 1 et donc les taux Π_j^r seront tous égaux et auront pour valeur Π . Le cas de base sera alors récupéré.

Il est également important de constater que le rapport d'annuités de l'équation (42) n'est autre que l'inverse de celui apparaissant dans l'équation (25).

Les taux Π_2^r et Π_3^r , quant à eux, sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \Pi_2^r = \frac{a_2}{a} \Pi \\ \Pi_3^r = \frac{a_3}{a} \Pi \end{cases} \tag{43}$$

3.3.2 Croissance des taux Π_j^r

Contrairement au cas précédent où les taux adaptés obtenus étaient décroissants, ceux de cette approche doivent être croissants. Effectivement, les taux adaptés de cette section viennent modifier les cotisations réelles dans le but de permettre aux classes à bas revenus de cotiser moins tout en gardant un même niveau de cotisations inscrites sur le compte notionnel. Pour compenser cette diminution, les classes à salaires plus élevés doivent donc cotiser un peu plus.

Cette croissance des taux Π_j^r est bien vérifiée :

$$\begin{aligned}
\Pi_1^r < \Pi_2^r &\iff \Pi_1^r \frac{a_2}{a_1} < \Pi_1^r \\
&\iff a_1 < a_2
\end{aligned} \tag{44}$$

et

$$\begin{aligned}\Pi_2^r < \Pi_3^r &\iff \Pi_1^r \frac{a_2}{a_1} < \Pi_1^r \frac{a_3}{a_1} \\ &\iff a_2 < a_3\end{aligned}\tag{45}$$

3.3.3 Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t

Au temps t , le montant total des cotisations réellement payées de la classe j est donné par :

$$C_j^{réelles,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi_j^r S_j^{(x,t)}\tag{46}$$

Par conséquent, au temps t , le total des cotisations réelles vaut :

$$C^{réelles,tot} = L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \Pi_j^r \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}\tag{47}$$

Le montant total des cotisations inscrites de la classe j , quant à lui, vaut :

$$C_j^{CN,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)}\tag{48}$$

Au temps t , le total des cotisations inscrites sur le compte notionnel est donc donné par :

$$C^{CN,tot} = \Pi L \bar{S}\tag{49}$$

où $\bar{S} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}$.

Les équations (37), (38) et (42) procurent les valeurs des différents taux Π_j^r et permettent donc de réécrire le quotient entre le montant total des cotisations réellement payées et les cotisations inscrites sous la forme :

$$\frac{C^{CN,tot}}{C^{réelles,tot}} = \frac{\sum_{j=1}^3 a \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}}{\sum_{j=1}^3 a_j \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}}\tag{50}$$

Comme à la section 3.2.3, lorsque les annuités a_j sont toutes égales à a (aucune distinction faite entre les individus au niveau du salaire), ce quotient vaut 1.

3.4 Limites

La méthode développée dans ce chapitre permet d'améliorer l'équité du système étant donné qu'elle atténue le transfert de richesse des individus à faible espérance de vie vers ceux à plus longue espérance. Toutefois, elle présente deux limites. Premièrement, elle demeure partiellement discriminatoire, dans la mesure où un taux est associé à chaque classe. Deuxièmement, elle est marquée par le manque de continuité. L'association d'un taux à chaque classe complique l'insertion de nouvelles classes intermédiaires. En réalité, le nombre de classes salariales étant largement supérieur à trois, il peut donc être difficile d'appliquer cette méthode en pratique.

4 Système progressif

Comme expliqué précédemment, l'inconvénient de l'approche développée dans la section 3 est le manque de continuité.

Une approche travaillant avec des tranches de salaires serait plus adaptée. Cela permet de faciliter l'intercalation de nouvelles classes et, par conséquent, d'être plus conforme à la réalité.

4.1 Système progressif en prestations définies

Les régimes à prestations définies n'échappent pas aux inégalités liées aux écarts d'espérance de vie au sein d'une même génération. Les agents à revenus plus faibles fournissent le même effort de cotisation que les plus aisés, mais perçoivent leurs prestations de retraite sur une plus courte durée car ils vivent moins longtemps. Pour lutter contre cette injustice, l'article (DIAKITE 2023) propose d'élaborer un système progressif.

Le but de cette section est d'expliquer le mécanisme de ce système progressif dans un régime à prestations définies et de présenter les résultats obtenus.

L'idée d'un tel système se base sur l'introduction d'une formule de pension progressive. Dans un régime en prestations définies classique, la pension d'un individu à l'âge de retraite x_r est proportionnelle au salaire :

$$P^{x_r} = \frac{\delta}{N} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S^{(x,t)} \quad (51)$$

où δ est le taux de remplacement cible.

Le système progressif consiste à remplacer le salaire $S^{(x,t)}$ par une transformation progressive de celui-ci. Des tranches de salaire correspondant à l'écart entre les salaires de deux classes consécutives sont introduites, et la pension à la retraite est alors donnée par :

$$P^{x_r} = \frac{\delta}{N} \sum_{i=1}^j \lambda_i (\widehat{S_i^N} - \widehat{S_{i-1}^N}) \quad (52)$$

Chaque coefficient λ_i pondère une tranche de salaire. Les deux critères utilisés pour déterminer ces coefficients sont l'équilibre actuariel en répartition et l'équité interclasses.

Ce système progressif permet de considérablement neutraliser les inégalités implicites de prestations entre les différents niveaux de revenus. Grâce à l'introduction des coefficients λ_i , le ratio entre les valeurs actualisées des prestations et des cotisations est uniformisé pour l'ensemble des classes salariales. Cette amélioration est réalisée tout en garantissant l'équilibre financier du système, puisque le taux de cotisation et le taux de remplacement sont ajustés de manière à respecter les contraintes d'un système en répartition.

L'application numérique présentée dans l'article montre que la progressivité n'est pas uniforme. Certaines tranches se voient attribuer un taux λ_i plus important que d'autres.

4.2 Système progressif pour les comptes notionnels

L'objectif de cette section est de développer un système progressif, dont le principe vient d'être présenté dans la section précédente, mais pour les comptes notionnels.

Des taux adaptés s'appliquant à une tranche salariale, c'est-à-dire à une différence entre les salaires de deux classes voisines (classe j et classe $j + 1$), sont déterminés.

Contrairement à ce qui a été développé auparavant, il n'y a pas de raison d'avoir une croissance ou une décroissance de ces nouveaux taux. Un taux s'applique à une tranche de salaires, c'est-à-dire à un écart de salaires entre deux classes. Un taux n'est donc plus associé à une classe.

Comme dans la section 3, deux cas sont traités. Dans le premier cas, les cotisations réelles sont identiques pour tous les agents du système, mais les cotisations inscrites sur le compte notionnel sont adaptées en fonction du salaire de l'individu. Dans le second cas, les cotisations réelles sont modifiées, tenant compte des différentes classes salariales tandis que ce qui est noté sur le compte notionnel n'est pas corrigé.

Les hypothèses et notations de ce chapitre sont les mêmes que celles exposées à la section 3.1.

4.3 Adaptation des cotisations inscrites sur le compte notionnel

4.3.1 Détermination des taux $\Pi_i^{not, tr}$

Valeur actuelle des cotisations

La valeur actuelle des cotisations réelles est donnée par :

$$\begin{aligned} C_j^{réelles} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi S_j^t (1+r)^{N-t} \\ &= \Pi \widehat{S_j^N} \end{aligned} \tag{53}$$

Les cotisations attribuées, quant à elles, sont adaptées. Un caractère progressif est introduit via un taux correctif noté $\Pi_j^{not,tr}$. Ce taux permet d'articuler le montant crédité sur le compte notionnel en fonction de la classe salariale de l'individu. La première classe salariale, c'est-à-dire celle avec les revenus les plus bas, ne perçoit que le salaire de sa propre tranche. Un seul taux intervient donc pour cette classe. La seconde classe, quant à elle, couvre deux tranches de salaires. Ses cotisations comportent donc deux parties et font intervenir deux taux correctifs. Enfin, la troisième classe, la plus aisée, est concernée par toutes les tranches. Ses cotisations sont donc soumises aux trois taux.

Les valeurs actuelles des cotisations inscrites des différentes classes deviennent donc :

$$\begin{cases} C_1^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi_1^{not,tr} S_1^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\ C_2^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \left(\Pi_1^{not,tr} S_1^{(x,t)} + \Pi_2^{not,tr} (S_2^{(x,t)} - S_1^{(x,t)}) \right) (1+r)^{N-t} \\ C_3^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \left(\Pi_1^{not,tr} S_1^{(x,t)} + \Pi_2^{not,tr} (S_2^{(x,t)} - S_1^{(x,t)}) + \Pi_3^{not,tr} (S_3^{(x,t)} - S_2^{(x,t)}) \right) (1+r)^{N-t} \end{cases} \quad (54)$$

Le système ci-dessus est équivalent à :

$$\begin{aligned} C_j^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) (1+r)^{N-t} \\ &= \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} (\widehat{S_i^N} - \widehat{S_{i-1}^N}) \end{aligned} \quad (55)$$

où $S_0^{(x,t)}$ est défini comme étant égal à 0.

Valeur actuelle des prestations

L'équation (14) reste valable pour la valeur actuelle des prestations :

$$B_j = \frac{C_j^{CN}}{a} a_j$$

Critère d'équité

Les taux correctifs doivent, à nouveau, satisfaire la condition d'équité interclasses donnée par le système (15).

La résolution de la première équation permet d'exprimer le coefficient $\Pi_2^{not,tr}$ en fonction de $\Pi_1^{not,tr}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{B_1}{C_1^{réelles}} &= \frac{B_2}{C_2^{réelles}} \iff \frac{\frac{C_1^{CN}}{a} a_1}{\Pi \widehat{S_1^N}} = \frac{\frac{C_2^{CN}}{a} a_2}{\Pi \widehat{S_2^N}} \\
&\iff \frac{1}{a} \frac{\Pi_1^{not,tr} \widehat{S_1^N} a_1}{\widehat{S_1^N}} = \frac{1}{a} \frac{(\Pi_1^{not,tr} \widehat{S_1^N} + \Pi_2^{not,tr} (\widehat{S_2^N} - \widehat{S_1^N})) a_2}{\widehat{S_2^N}} \\
&\iff \Pi_1^{not,tr} a_1 \widehat{S_2^N} = \Pi_1^{not,tr} a_2 \widehat{S_1^N} + \Pi_2^{not,tr} a_2 (\widehat{S_2^N} - \widehat{S_1^N}) \\
&\iff \Pi_2^{not,tr} = \frac{a_1 \widehat{S_2^N} - a_2 \widehat{S_1^N}}{a_2 (\widehat{S_2^N} - \widehat{S_1^N})} \Pi_1^{not,tr}
\end{aligned} \tag{56}$$

De manière similaire, le coefficient $\Pi_3^{not,tr}$ peut être exprimé en fonction de $\Pi_1^{not,tr}$:

$$\begin{aligned}
\frac{B_1}{C_1^{réelles}} &= \frac{B_3}{C_3^{réelles}} \iff \frac{\frac{C_1^{CN}}{a} a_1}{\Pi \widehat{S_1^N}} = \frac{\frac{C_3^{CN}}{a} a_3}{\Pi \widehat{S_3^N}} \\
&\iff \Pi_3^{not,tr} = \frac{1}{(\widehat{S_3^N} - \widehat{S_2^N})} \left(\frac{a_1}{a_3} \widehat{S_3^N} - \frac{a_1}{a_2} \widehat{S_2^N} \right) \Pi_1^{not,tr}
\end{aligned} \tag{57}$$

Dans le cas où tous les a_i sont égaux à a , les facteurs multiplicatifs devant $\Pi_1^{not,tr}$ disparaissent des équations (56) et (57). Les $\Pi_i^{not,tr}$ sont alors tous égaux et le cas de base, où un unique taux de cotisation est utilisé, est retrouvé.

Détermination de $\Pi_1^{not,tr}$

Au temps t , le montant total des cotisations doit être égal au montant total des prestations. Le taux $\Pi_1^{not,tr}$ doit donc satisfaire l'équation (40).

Le montant total des cotisations de la classe j au temps t est donné par :

$$\begin{aligned}
C_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)} \\
&= \Pi \alpha_j L \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}
\end{aligned} \tag{58}$$

En ce qui concerne le montant total des prestations de la classe j , il est égal à :

$$\begin{aligned}
B_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_r}^{\omega} L_j(x,t) RR_j^t x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\
&= \alpha_j L \frac{C_j^{CN,t}}{a} a_j \\
&= \alpha_j L \frac{a_j}{a} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)})
\end{aligned} \tag{59}$$

Ainsi, l'expression du taux $\Pi_1^{not,tr}$ découle de la résolution de l'équation (18) :

$$\begin{aligned}
C^{tot,t} = B^{tot,t} &\Leftrightarrow \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)} = \sum_{x=x_r}^{\omega} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) RR_j^t x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\
&\Leftrightarrow \Pi L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} = \frac{L}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \\
&\Leftrightarrow \Pi \bar{S} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \\
&\Leftrightarrow \Pi \bar{S} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^3 \Pi_i^{not,tr} \sum_{j=i}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)})
\end{aligned} \tag{60}$$

où $\bar{S} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_i^{(x,t)}$.

Ainsi, le taux de cotisation Π peut s'écrire sous la forme :

$$\Pi = \frac{\sum_{i=1}^3 \Pi_i^{not,tr} b_i}{a \bar{S}} \tag{61}$$

où $b_i = \sum_{j=i}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)})$.

Grâce aux équations (56) et (57), la valeur de $\Pi_1^{not,tr}$ peut être extraite :

$$\begin{aligned}
\Pi a \bar{S} &= \Pi_1^{not,tr} b_1 + \Pi_2^{not,tr} b_2 + \Pi_3^{not,tr} b_3 \Leftrightarrow \Pi a \bar{S} = \Pi_1^{not,tr} (b_1 + b_2 A + b_3 B) \\
&\Leftrightarrow \Pi_1^{not,tr} = \frac{\Pi a \bar{S}}{b_1 + b_2 A + b_3 B}
\end{aligned} \tag{62}$$

avec

$$\begin{cases} A := \frac{a_1 \widehat{S_2^N} - a_2 \widehat{S_1^N}}{a_2 (\widehat{S_2^N} - \widehat{S_1^N})} \\ B := \frac{\frac{a_1}{a_3} \widehat{S_3^N} - \frac{a_1}{a_2} \widehat{S_2^N}}{\widehat{S_3^N} - \widehat{S_2^N}} \end{cases} \tag{63}$$

Les coefficients A et B sont les facteurs correctifs multiplicatifs dans les équations (56) et (57).

4.3.2 Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t

Cette section compare, à un instant t , le montant total des cotisations affectées au compte notionnel et des cotisations réellement payées. À nouveau, il est possible que ces deux valeurs ne coïncident pas, mais elles devraient être proches.

Au temps t , le montant total des cotisations réelles de la classe j est donné par :

$$C_j^{réelles,t} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \Pi S_j^{(x,t)} \quad (64)$$

Par conséquent, au temps t , le total des cotisations réelles vaut :

$$C^{réelles,tot} = \Pi L \bar{S} \quad (65)$$

$$\text{où } \bar{S} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}.$$

Le montant total des cotisations inscrites de la classe j vaut :

$$C_j^{CN,t} = L_j(x,t) \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \quad (66)$$

Au temps t , le total des cotisations inscrites sur le compte notionnel est alors donné par :

$$\begin{aligned} \frac{C^{CN,tot}}{L} &= \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{i=1}^j \Pi_i^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \\ &= \alpha_1 \Pi_1^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \alpha_2 \left(\Pi_1^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \Pi_2^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_2^{(x,t)} - S_1^{(x,t)}) \right) + \\ &\quad \alpha_3 \left(\Pi_1^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + \Pi_2^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_2^{(x,t)} - S_1^{(x,t)}) + \Pi_3^{not,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_3^{(x,t)} - S_2^{(x,t)}) \right) \end{aligned} \quad (67)$$

En utilisant le fait que $\Pi_2^{not,tr} = A \Pi_1^{not,tr}$ et $\Pi_3^{not,tr} = B \Pi_1^{not,tr}$ avec A et B définis par le système (63), il en découle que :

$$\frac{C^{CN,tot}}{L} = \Pi_1^{not,tr} \left((1 - (\alpha_2 + \alpha_3)A) \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + ((\alpha_2 + \alpha_3)A - \alpha_3 B) \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 B \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)} \right) \quad (68)$$

Le rapport entre le total des cotisations inscrites et le total des cotisations réellement payées vaut :

$$\frac{C^{CN,tot}}{C^{relles,tot}} = \frac{\Pi_1^{not,tr} \left((1 - (\alpha_2 + \alpha_3)A) \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + ((\alpha_2 + \alpha_3)A - \alpha_3 B) \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 B \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)} \right)}{\Pi \bar{S}} \quad (69)$$

Plus les annuités a_i se rapprochent les unes des autres (et donc de a), plus A et B tendent vers 1, ce qui rapproche le numérateur de $\bar{S}$. Par conséquent, dans ces conditions, le quotient tend vers 1.

4.4 Adaptation des cotisations réelles

La dernière piste présentée adapte, dans le cadre d'un système progressif, les cotisations réelles en introduisant un taux $\Pi_j^{r,tr}$ pour chaque classe j . Le taux Π , quant à lui, sera commun à tous les individus pour reporter les cotisations sur le compte notionnel.

4.4.1 Détermination des taux $\Pi_i^{r,tr}$

Valeur actuelle des cotisations

Les cotisations réelles sont adaptées. Un taux correctif $\Pi_j^{r,tr}$ est appliqué à chaque tranche de salaires. Comme dans le cas précédent, la première classe salariale ne sera concernée que par un seul taux, la deuxième par deux taux et la classe la plus aisée par les trois taux. La valeur actuelle des cotisations réelles est alors donnée par :

$$\begin{aligned} C_j^{réelles} &= \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) (1+r)^{N-t} \\ &= \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} (\widehat{S_i^N} - \widehat{S_{i-1}^N}) \end{aligned} \quad (70)$$

La valeur actuelle des cotisations inscrites sur le compte notionnel, n'étant pas modifiées, est donnée par :

$$\begin{aligned} C_j^{CN} &= \sum_{t=0}^{N-1} \Pi S_j^{(x,t)} (1+r)^{N-t} \\ &= \Pi \widehat{S_j^N} \end{aligned} \quad (71)$$

Valeur actuelle des prestations

La valeur actuelle des prestations est toujours donnée par l'équation (14) :

$$B_j = \frac{C_j^{CN}}{a} a_j$$

Critère d'équité

Les taux $\Pi_j^{r,tr}$ doivent, encore une fois, satisfaire le système (15).

L'expression du coefficient $\Pi_2^{r,tr}$ en fonction de $\Pi_1^{r,tr}$ résulte de la première équation :

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{C_1^{réelles}} = \frac{B_2}{C_2^{réelles}} &\iff \frac{1}{a} \frac{\Pi \widehat{S}_1^N a_1}{\Pi_1^{not,tr} \widehat{S}_1^N} = \frac{1}{a} \frac{\Pi \widehat{S}_2^N a_2}{\Pi_1^{r,tr} \widehat{S}_1^N + \Pi_2^{r,tr} (\widehat{S}_2^N - \widehat{S}_1^N)} \\ &\iff (\Pi_1^{r,tr} \widehat{S}_1^N + \Pi_2^{r,tr} (\widehat{S}_2^N - \widehat{S}_1^N)) a_1 = a_2 \widehat{S}_2^N \Pi_1^{r,tr} \\ &\iff \Pi_2^{r,tr} = \Pi_1^{r,tr} \frac{a_2 \widehat{S}_2^N - a_1 \widehat{S}_1^N}{a_1 (\widehat{S}_2^N - \widehat{S}_1^N)} \end{aligned} \quad (72)$$

Le coefficient $\Pi_3^{r,tr}$ peut être exprimé en fonction de $\Pi_1^{r,tr}$ via un développement analogue :

$$\Pi_3^{r,tr} = \Pi_1^{r,tr} \frac{a_3 \widehat{S}_3^N - a_2 \widehat{S}_2^N}{a_1 (\widehat{S}_3^N - \widehat{S}_2^N)} \quad (73)$$

Dans les équations (72) et (73), le facteur multiplicatif de $\Pi_1^{r,tr}$ vaut 1 lorsque les annuités a_i sont toutes les mêmes, ce qui permet de récupérer le cas de base.

Détermination de $\Pi_1^{r,tr}$

Afin que le montant total des cotisations soit égal au montant total des prestations au temps t , le taux $\Pi_1^{r,tr}$ doit satisfaire l'équation (18).

Le montant total des cotisations de la classe j au temps t est donné par :

$$\begin{aligned} C_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_0}^{x_r-1} L_j(x,t) \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \\ &= \alpha_j L \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) \end{aligned} \quad (74)$$

Le montant total des prestations de la classe j est égal à :

$$\begin{aligned} B_j^{tot,t} &= \sum_{x=x_r}^{\omega} L_j(x,t) \frac{C_j^{CN,t}}{a} {}_x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r} \\ &= \alpha_j L \frac{a_j}{a} \Pi \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \end{aligned} \quad (75)$$

La résolution de l'équation (18), exprimant l'égalité entre les cotisations totales et les prestations totales au temps t , permet d'obtenir l'expression de $\Pi_1^{r,tr}$:

$$\begin{aligned} C^{tot,t} = B^{tot,t} &\Leftrightarrow \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) = \sum_{x=x_r}^{\omega} \sum_{j=1}^3 L_j(x,t) RR_j x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r}\right)^{x-x_r} \\ &\Leftrightarrow L \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)}) = \frac{\Pi L}{a} \sum_{j=1}^3 \alpha_j a_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)} \end{aligned} \quad (76)$$

Le taux de base Π est donc donné par :

$$\Pi = \frac{\sum_{j=1}^3 a_j \alpha_j \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)})}{\sum_{j=1}^3 a_j \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}} \quad (77)$$

En posant $b'_i = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{(x,t)} - S_{i-1}^{(x,t)})$ et en utilisant les équations (72) et (73), le numérateur de l'équation précédente (77) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{i=1}^j \Pi_i^{r,tr} b'_i &= \alpha_1 \Pi_1^{r,tr} b'_1 + \alpha_2 (\Pi_1^{r,tr} b'_1 + \Pi_2^{r,tr} b'_2) + \alpha_3 (\Pi_1^{r,tr} b'_1 + \Pi_2^{r,tr} b'_2 + \Pi_3^{r,tr} b'_3) \\ &= \alpha_1 \Pi_1^{r,tr} b'_1 + \alpha_2 (\Pi_1^{r,tr} b'_1 + \Pi_1^{r,tr} A' b'_2) + \alpha_3 (\Pi_1^{r,tr} b'_1 + \Pi_1^{r,tr} A' b'_2 + \Pi_1^{r,tr} B' b'_3) \\ &= \Pi_1^{r,tr} (b'_1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + b'_2 A' (\alpha_2 + \alpha_3) + b'_3 B' \alpha_3) \\ &= \Pi_1^{r,tr} (b'_1 + b'_2 A' (\alpha_2 + \alpha_3) + b'_3 B' \alpha_3) \end{aligned} \quad (78)$$

avec

$$\begin{cases} A' &:= \frac{a_2 \widehat{S_2^N} - a_1 \widehat{S_1^N}}{a_1 (\widehat{S_2^N} - \widehat{S_1^N})} \\ B' &:= \frac{a_3 \widehat{S_3^N} - a_2 \widehat{S_2^N}}{a_1 (\widehat{S_3^N} - \widehat{S_2^N})} \end{cases} \quad (79)$$

Les coefficients A' et B' sont les facteurs correctifs multiplicatifs dans les équations (72) et (73).

Le taux $\Pi_1^{r,tr}$ est donc donné par :

$$\Pi_1^{r,tr} = \frac{\Pi \sum_{j=1}^3 a_j \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}}{a (b'_1 + b'_2 A' (\alpha_2 + \alpha_3) + b'_3 B' \alpha_3)} \quad (80)$$

4.4.2 Comparaison des cotisations inscrites et des cotisations réelles à un instant t

Cette section s'intéresse à la comparaison du montant total des cotisations inscrites et de celui des cotisations réellement payées au temps t .

Par un raisonnement similaire à celui de la section 4.3.2, les valeurs des montants totaux sont obtenus :

$$\frac{C^{réelles,tot}}{L} = \Pi_1^{r,tr} \left((1 - (\alpha_2 + \alpha_3)A') \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_1^{(x,t)} + ((\alpha_2 + \alpha_3)A' - \alpha_3 B') \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_2^{(x,t)} + \alpha_3 B' \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_3^{(x,t)} \right) \quad (81)$$

et

$$C^{CN,tot} = \Pi L \bar{S} \quad (82)$$

où $\bar{S} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{(x,t)}$.

La conclusion est donc similaire à celle de la section 4.3.2. Plus les annuités sont proches les unes des autres, plus le montant total réellement payé tend vers le montant total inscrit.

5 Application numérique

À présent, les résultats obtenus aux sections 3 et 4 sont appliqués à des données numériques afin d'évaluer concrètement le comportement des formules obtenues. Les objectifs sont d'examiner si les différents taux adaptés s'écartent significativement du taux de cotisation fixe, d'observer l'ampleur des écarts entre ces taux selon les classes et de mesurer les différences éventuelles entre les méthodes présentées.

Le code utilisé dans cette section est présenté en annexe.

5.1 Hypothèses

L'étude *Mortality by Socio-economic Category in the United States* de [BARBIERI 2021] fournit des taux de mortalité pour la population américaine. Elle propose des tables de mortalité détaillées, ventilées par groupe socio-économique (quintiles) et par année (1982 jusque 2019).

Les hypothèses suivantes sont faites et s'inspirent de [DIAKITE, DEVOLDER et MENZIETTI 2025] :

- Les salaires initiaux de chacune des trois classes, exprimés en dollars (\$), sont issus de [US CENSUS BUREAU 2024], qui fournit les revenus moyens américains par quintile. Les salaires retenus sont ceux de l'année 1979 et le salaire de la classe 2 est obtenu en prenant la moyenne des salaires des quintiles 2, 3 et 4 :

$$S_1^0 = 4010$$

$$S_2^0 = 16833.33$$

$$S_3^0 = 43270$$

- Les taux de croissance de salaire s_j de chaque classe sont donnés par :

$$s_1 = 1\%$$

$$s_2 = 1,5\%$$

$$s_3 = 2\%$$

- L'effet de l'inflation est capturé par $g = 2.5\%$.
- Le taux d'indexation des retraites est fixé à $\gamma = 2.5\%$.
- Le taux d'actualisation est fixé à $r = 2\%$.
- Le taux de cotisation de base du régime est fixé à $\Pi = 20\%$.
- L'âge d'entrée dans le système est donné par $x_0 = 25$ et celui de l'âge légal de retraite par $x_r = 65$.
- L'âge ultime de survie est fixé à $\omega = 100$.
- La taille de la population à l'entrée est donnée par $L = 100000$.

- La proportion d'individus dans les classes 1 et 3 est donnée par $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.2$, et celle de la classe 2 par $\alpha_2 = 0.6$. Ainsi, le premier quintile de la distribution des salaires correspond à la classe des bas salaires. Les quintiles 2, 3 et 4 représentent la classe des salaires moyens. Le cinquième quintile décrit la classe des salaires les plus élevés.
- Il n'y pas de mortalité avant la retraite.

Le première étape consiste à calculer les annuités a_j de chacune des trois classes ainsi que l'annuité a , permettant de disposer d'une référence sans distinction de revenu.

Les probabilités de décès q_x sont fournies par l'étude, elles représentent la probabilité de décéder entre l'âge x et l'âge $x + 1$. Un choix est fait de travailler avec les probabilités de l'année 2019, cette année étant la plus récente des données.

La probabilité de survie entre l'âge x et l'âge $x + 1$, notée p_x , est égale à $1 - q_x$. L'évolution des probabilités de survie de chacune des trois classes pour les âges après la retraite est illustrée à la Figure 1.

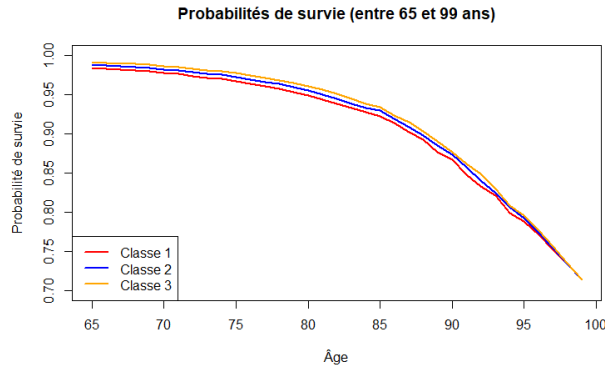


Figure 1. Probabilités de survie (entre 65 et 99 ans)

Plus les revenus d'une classe sont élevés, plus sa probabilité de survie est grande. L'écart entre les classes est plus marqué pour les âges proches de 65, que pour les âges voisins de l'âge ultime.

Pour rappel, l'annuité a_j de la classe j est donnée par :

$$a_j = \sum_{x=x_r}^{\omega} x p_{x_r}^j \left(\frac{1+\gamma}{1+r} \right)^{x-x_r}$$

où $x p_{x_r}^j = \prod_{k=0}^{x-x_r-1} p_{x_r+k}^j$.

Les probabilités de décès q_x utilisées pour la deuxième classe ont été obtenues en faisant la moyenne des probabilités de décès par âge des quintiles 2, 3 et 4.

En plus des cinq quintiles, les probabilités q_x sont aussi données pour l'ensemble de la population, sans distinction faite au niveau du revenu, permettant ainsi de calculer l'annuité a .

Les différentes annuités obtenues sont reprises à la Table 1.

a	a_1	a_2	a_3
21.49148	20.24102	21.53511	22.78019

Table 1. Annuités

Plus la classe est aisée, plus son espérance de vie est élevée, ce qui se traduit par une annuité plus grande. Les annuités a et a_2 ont des valeurs très proches, reflétant la position moyenne de la deuxième classe.

5.2 Résultats

Les valeurs des taux adaptés Π_j^{not} de la section 3.2 sont présentées à la Table 2.

Π_1^{not}	Π_2^{not}	Π_3^{not}
21,2356%	19.9595%	18.8686%

Table 2. Taux Π_j^{not}

Ces taux sont proches du taux de cotisation de base $\Pi = 20\%$, le plus proche étant, comme attendu, celui de la deuxième classe. De plus, la décroissance des taux est bien observée. Les cotisations inscrites au compte notionnel de la classe aux revenus les plus faibles dépassent celles qui résulteraient de l'utilisation du taux Π , permettant de compenser leur espérance de vie plus courte.

Les résultats de la section 3.3, quant à eux, sont repris à la Table 3.

Π_1^r	Π_2^r	Π_3^r
18.8336%	20.0406%	21.1993%

Table 3. Taux Π_j^r

À nouveau, ces taux sont proches de 20%, en particulier le taux Π_2^r . Les taux sont croissants, donnant l'occasion à la classe la moins aisée de cotiser moins tout en maintenant ses cotisations inscrites au compte notionnel au même niveau que les autres classes.

Les résultats de la section 4.3, portant sur l'adaptation des cotisations inscrites dans un système progressif sont repris à la Table 4.

$\Pi_1^{not,tr}$	$\Pi_2^{not,tr}$	$\Pi_3^{not,tr}$
21.2423%	19.6184%	18.2909%

Table 4. Taux $\Pi_j^{not,tr}$

Les valeurs oscillent autour du taux de base de 20%, et sont similaires à celles de la Table 2. Pour les deuxième et troisième classes, les taux sont légèrement inférieurs à ceux de la Table 2, tandis que le taux de la classe la moins aisée est négligemment plus élevé. Bien qu'une décroissance ne soit pas forcément attendue, elle est observée dans ce cas-ci.

Finalement, la Table 5 fournit les taux de la section 4.4, section dans laquelle les cotisations réelles sont adaptées.

$\Pi_1^{r,tr}$	$\Pi_2^{r,tr}$	$\Pi_3^{r,tr}$
18.8307%	20.3623%	21.8124%

Table 5. Taux $\Pi_j^{r,tr}$

Les valeurs se situent, à nouveau, aux alentours de 20% et une croissance est observée même si elle n'est pas imposée par le cadre théorique.

Lorsque les cotisations réelles sont adaptées, les coefficients correctifs du système progressif sont similaires à ceux obtenus avec la méthode consistant à associer un taux à chaque classe. Le système progressif présentant plus de continuité et étant plus réaliste, il est préférable de s'y concentrer.

6 Conclusion

L'espérance de vie d'un individu est fortement liée à sa classe socio-économique, de sorte que les personnes disposant d'un revenu plus faible vivent, en moyenne, moins longtemps que les autres. Ce problème se reflète dans les systèmes de pension, étant donné que les personnes à plus faible espérance de vie perçoivent leurs prestations de retraite sur une période plus courte, alors qu'elles ont effectué le même effort de cotisation jusqu'à leur retraite. Dans ce travail, l'hétérogénéité des espérances de vie est analysée dans le cadre des plans de pension publique de type comptes notionnels. La population est répartie en trois classes salariales afin de tenir compte de cette disparité et quatre approches sont envisagées dans le but d'améliorer l'équité de ces systèmes.

Dans la section 2, le mécanisme des comptes notionnels est présenté. Les avantages ainsi que les effets redistributifs qui lui sont inhérents sont expliqués. Un transfert de richesse des personnes à faible espérance de vie vers les personnes à plus longue espérance de vie est observé.

La section 3 propose une première méthode pour améliorer l'équité. Un taux de cotisation est associé à chaque classe salariale, permettant ainsi de prendre en compte les inégalités d'espérance de vie. Deux cas distincts sont considérés, le premier adaptant directement les cotisations réelles et le second corrigeant les cotisations inscrites sur le compte notionnel. Ces taux sont calibrés de manière à ce que le ratio des valeurs actuelles des cotisations réellement payées et des prestations soit le même pour chacune des classes. Bien que l'équité soit améliorée, ce système reste compliqué à appliquer en pratique au vu de son manque de continuité. Un système progressif est ensuite présenté à la section 4. Un taux est à présent associé à une tranche de salaire et non plus à une classe. Une telle approche apporte davantage de continuité et de réalisme. Deux cas sont à nouveau traités, le premier portant sur l'adaptation des cotisations réellement payées et le second sur la modification des cotisations inscrites.

Les différentes méthodes sont finalement appliquées numériquement afin d'évaluer les changements dans les taux de cotisation et de permettre une comparaison entre les approches. Les taux obtenus dans chacun des cas se situent aux alentours du taux de cotisation de base et la différence entre la première approche et le système progressif est peu significative.

Il est important de noter que les valeurs obtenues dépendent des hypothèses démographiques et économiques considérées. Seules trois classes sont considérées dans ce travail, ce qui peut paraître peu réaliste. Des modèles plus détaillés, intégrant davantage de classes et des conditions de mortalité plus réalistes, pourraient être explorés pour affiner l'analyse.

Bibliographie

- AYUSO, Mercedes, Jorge Miguel BRAVO et Robert HOLZMANN (2016). *On the Heterogeneity in Longevity among Socioeconomic Groups : Scope, Trends, and Implications for Earnings-Related Pension Schemes*. Discussion Paper 10060. IZA – Institute of Labor Economics.
- BARBIERI, Magali (2021). *Mortality by Socioeconomic Category in the United States*. Rapp. tech. Society of Actuaries. URL : <https://www.soa.org/resources/research-reports/2020/us-mort-rate-socioeconomic/#data>.
- BOADO-PENAS, MC, Steven HABERMAN et Poontavika NAKA (2022). “Fairness and annuity divisors for notional defined contribution pension schemes”. In : *Journal of Pension Economics and Finance* 21.2, p. 143-167. DOI : 10.1017/S1474747220000311.
- BÖRSCH-SUPAN, Axel H. (2006). “What Are NDC Systems? What Do They Bring to Reform Strategies?” In : *Pension Reform : Issues and Prospects for Non-Financial Defined Contribution (NDC) Schemes*. Sous la dir. d’HOLZMANN, Robert et PALMER, Edward. Washington, DC : The World Bank, p. 35-53.
- BOZIO, Antoine et Thomas PIKETTY (2008). *Pour un nouveau système de retraite : des comptes individuels de cotisations financés par répartition*. Paris : Éditions ENS rue d’Ulm.
- BRAVO, Jorge Miguel et Fabrizio CULOTTA (2025). “Differential Longevity, Fairness, and Redistribution in NDC Pension Schemes : The Case of the Italian Annuity Divisor”. In : Under review.
- DEVOLDER, Pierre (2019). *Nouveaux horizons des retraites : des comptes notionnels à la répartition par points*. Belgique : Wolters Kluwer, p. 46-135.
- DIAKITE, Keivan (2023). “Essay on the fairness of public pension systems”. Thèse de doct. Université catholique de Louvain.
- DIAKITE, Keivan, Pierre DEVOLDER et Massimiliano MENZIETTI (2025). “Inter and Intra-generational fairness for public pension systems in multi-population mortality models”. Article non publié (In press).
- HOLZMANN, Robert (2017). *The ABCs of Nonfinancial Defined Contribution (NDC) Schemes*. Rapp. tech. IZA Policy Paper No. 130. Publié dans *International Social Security Review*, Vol. 70, No. 3, 2017. Bonn, Germany : IZA Institute of Labor Economics.
- HOLZMANN, Robert et al. (2017). *NDC Schemes and Heterogeneity in Longevity : Proposals for Redesign*. Rapp. tech. IZA Discussion Paper No. 11193. Publié dans : R. Holzmann, E. Palmer, R. Palacios, S. Sacchi (éds.), *Progress and Challenges of Nonfinancial Defined Contribution Pension (NDC) Schemes*, Volume 1, Washington, D.C. : The World Bank. IZA Institute of Labor Economics.
- US CENSUS BUREAU (mars 2024). *Household Income Quintiles*. <https://taxpolicycenter.org/statistics/household-income-quintiles>.

A Annexes

Cette annexe contient le code R utilisé pour obtenir les résultats de la section 5.

```
#PARAMETRES

#Ages

N=40 #période de contribution
x_0=25 # ge d'entrée
x_r=65 # ge légal de retraite
omega=100 # ge ultime

#Salaires

S_1_init=4010
S_2_init=(9960+16430+24110)/3
S_3_init=43270

#Taux

gamma=0.025 #taux d'indexation des retraites
g=0.025 #inflation
r=0.02 #taux d'actualisation
#gamma, r et g sont supposés constants dans le temps

s_1=0.01 #s_i=taux de croissance de salaire de la classe i
s_2=0.015
s_3=0.02

taux_base=0.2

#Population

L=100000 #taille de la population
alpha_1=0.2 #alpha_i=proportion d'individus dans la classe i
alpha_2=0.6
alpha_3=0.2

#TABLES DE MORTALITÉ

#Données
```



```

library(readxl)
library(dplyr)
data<- read_excel("mort-socioeconomic-lifetables-quintile.xlsx",
  sheet = "single year of age",skip=6)
data_selected <- data %>% select(1, 2, 3, 4, 10)
View(data_selected)

data_selected$Age <- as.numeric(as.character(data_selected$Age))

data_filtered <- data_selected[data_selected$Sex == "b" & !is.na(
  data_selected$Age)
                                & data_selected$Year==2019 &
                                data_selected$Age >= 65 & data_
                                selected$Age <= 99,]

#On ne fait pas de distinction entre les genres donc on ne prend
  que les lignes où "Sex=b"
#Hypothèse : Il n'y pas de mortalité avant la retraite -> On
  considère seulement les ges 65 à 100.

#PROBABILITÉS DE SURVIE

library(tidyr)

qx_table <- data_filtered %>%
  select(Age, Quintile, qx) %>%
  pivot_wider(names_from = Quintile, values_from = qx)

qx_moyen <- rowMeans(qx_table[, c("2","3","4")], na.rm = TRUE) #
  moyenne des 3 classes centrales

qx1 <- qx_table[,c("1")] #classe 1
qx3 <- qx_table[,c("5")] #classe 3

px1 <- 1-qx1
px1<- px1[,1]
px2 <- 1-qx_moyen
px3 <- 1-qx3
px3<- px3[,1]

ages<-c(65:99)
plot(ages, px1, type = "l", col = "red", ylim = c(0.7, 1),

```

```

      xlab = " ge ", ylab = "Probabilité de survie", main="
      Probabilités de survie (entre 65 et 99 ans)",lwd=2)
lines(ages, px2, type = "l", col = "blue",lwd=2)
lines(ages, px3, type = "l", col = "orange",lwd=2)
legend("bottomleft", legend = c("Classe 1","Classe 2","Classe 3"),
      col = c("red","blue","orange"), lty = 1,lwd=2)

px_xr_1 <- c(1,cumprod(px1))
px_xr_2 <- c(1,cumprod(px2))
px_xr_3 <- c(1,cumprod(px3))

qx_all <- qx_table[,c("NA")] #sans distinction de classe
px_all <- 1-qx_all
px_all <- px_all[,1]
px_xr_all <- c(1,cumprod(px_all))

#ANNUITÉS

n_years <- length(px_xr_1)
discount_factors <- ((1 + gamma) / (1 + r))^(0:(n_years-1))

a_1 <- sum(px_xr_1 * discount_factors)
a_1

a_2 <- sum(px_xr_2 * discount_factors)
a_2

a_3 <- sum(px_xr_3 * discount_factors)
a_3

a_all <- sum(px_xr_all * discount_factors)
a_all

#ADAPTATION TAUX DE COTISATION

#Cotisations inscrites adaptées
Pi_1_not<-taux_base*(a_all/a_1)
Pi_2_not<-Pi_1_not*(a_1/a_2)
Pi_3_not<-Pi_1_not*(a_1/a_3)
Pi_not<-c(Pi_1_not, Pi_2_not, Pi_3_not)
#Les Pi_i_not sont décroissants

```

```

#Cotisations réellement payées adaptées
Pi_1_r<-taux_base*(a_1/a_all)
Pi_2_r<-Pi_1_r*(a_2/a_1)
Pi_3_r<-Pi_1_r*(a_3/a_1)
Pi_r<-c(Pi_1_r, Pi_2_r, Pi_3_r)
#Les Pi_i_r sont croissants

#SYSTEME PROGRESSIF

#Salaires
S_1_N = S_1_init*(1+r)*((1+g)**N*(1+s_1)**N-(1+r)**N)/((1+g)*(1+s_1)-(1+r))
S_2_N = S_2_init*(1+r)*((1+g)**N*(1+s_2)**N-(1+r)**N)/((1+g)*(1+s_2)-(1+r))
S_3_N = S_3_init*(1+r)*((1+g)**N*(1+s_3)**N-(1+r)**N)/((1+g)*(1+s_3)-(1+r))

Sbar <- function(x0, xr, g, sj, S0, alpha) {
  n <- xr - x0 # nombre de termes
  res <- 0

  for (i in 1:3) {
    taux <- (1 + sj[i]) * (1 + g)
    somme_geo <- (taux**n - 1) / (taux - 1)
    res <- res + alpha[i] * S0[i] * somme_geo
  }
  return(res)
}
S_bar<-Sbar(x_0,x_r,g,c(s_1,s_2,s_3),c(S_1_init,S_2_init,S_3_init),c(alpha_1,alpha_2,alpha_3))

#Cotisation inscrites adaptées

somme_geo<-function(x_0,x_r,sj,g,S0){ #fonction qui calcule \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_i^{(x,t)} pour chaque i \in {1,2,3}
  n<-x_r-x_0
  somme_vec<-c(0,0,0)
  for (i in 1:3){
    taux <- (1 + sj[i]) * (1 + g)
    somme_vec[i] <- S0[i]*(taux**n - 1) / (taux - 1)
  }
}

```

```

    }
    return(somme_vec)
}
somme_geo_vec<-somme_geo(x_0,x_r,c(s_1,s_2,s_3),g,c(S_1_init,S_2_
    init,S_3_init))

bi <- function(somme_geo_vec, alpha, a) { #b_i=\sum_{j=i}^{\{3\}} \
    alpha_j ~ a_j ~\sum_{x=x_0}^{x_r-1} (S_i^{\{(x,t)\}}-S_{i-1}^{\{(x,t)\}}))

    diff_somme<-c(somme_geo_vec[1],0,0)
    for (i in 2:3){
        diff_somme[i]<-somme_geo_vec[i]-somme_geo_vec[i-1]
    }

    b <- c(0,0,0)
    for(i in 1:3) {
        for (j in i:3) {
            coeff <- alpha[j] * a[j]
            b[i]<-b[i]+coeff*diff_somme[i]
        }
    }
    return(b)
}

b_i<-bi(somme_geo_vec,c(alpha_1,alpha_2,alpha_3),c(a_1,a_2,a_3))

A<-(a_1*S_2_N-a_2*S_1_N)/(a_2*(S_2_N-S_1_N)) #facteur
    multiplicatif pour Pi_2^{\{not,tr\}}
B<-((a_1/a_3)*S_3_N-(a_1/a_2)*S_2_N)/(S_3_N-S_2_N) #facteur
    multiplicatif pour Pi_3^{\{not,tr\}}

Pi_1_not_tr<-(taux_base*a_all*S_bar)/(b_i[1]+b_i[2]*A+b_i[3]*B)
Pi_2_not_tr<-Pi_1_not_tr*A
Pi_3_not_tr<-Pi_1_not_tr*B
Pi_i_not_tr<-c(Pi_1_not_tr,Pi_2_not_tr,Pi_3_not_tr)

#Vérification
verif<-(Pi_1_not_tr*b_i[1]+Pi_2_not_tr*b_i[2]+Pi_3_not_tr*b_i[3])/
    (a_all*S_bar)

#Cotisations réelles adaptées

```

```

bi_prime<-c(somme_geo_vec[1], somme_geo_vec[2]-somme_geo_vec[1],
  somme_geo_vec[3]-somme_geo_vec[2]) #b_i^{'}= \sum_{x=x_0}^{x_r-1}(S_i^{\{(x,t)\}}-S_{i-1}^{\{(x,t)\}})

num_pi_1_r_tr <- function(somme_geo_vec, alpha, a) { #num=\sum_{j=1}^3 a_j \alpha_j \sum_{x=x_0}^{x_r-1} S_j^{\{(x,t)\}}
  num<-0
  for(j in 1:3) {
    coeff <- alpha[j] * a[j] * somme_geo_vec[j]
    num<-num+coeff
  }
  return(num)
}
num_pi_1<-num_pi_1_r_tr(somme_geo_vec,c(alpha_1,alpha_2,alpha_3),c(a_1,a_2,a_3))

A_prime<-(a_2*S_2_N-a_1*S_1_N)/(a_1*(S_2_N-S_1_N)) #facteur multiplicatif pour \Pi_2^{\{r,tr\}}
B_prime<-(a_3*S_3_N-a_2*S_2_N)/(a_1*(S_3_N-S_2_N)) #facteur multiplicatif pour \Pi_3^{\{r,tr\}}

Pi_1_r_tr<-taux_base*num_pi_1/(a_all*(bi_prime[1]+bi_prime[2]*A_prime*(alpha_2+alpha_3)+bi_prime[3]*B_prime*alpha_3))
Pi_2_r_tr<-A_prime*Pi_1_r_tr
Pi_3_r_tr<-B_prime*Pi_1_r_tr
Pi_i_r_tr<-c(Pi_1_r_tr,Pi_2_r_tr,Pi_3_r_tr)

#Vérification

num_verif_func<-function(bi_prime, alpha, pi_i_r_tr_vec) {
  num<-0
  for(j in 1:3) {
    for (i in 1:j) {
      num<-num+pi_i_r_tr_vec[i]*bi_prime[i]*alpha[j]
    }
  }
  return(num)
}
num_verif<-num_verif_func(bi_prime,c(alpha_1,alpha_2,alpha_3),pi_i_r_tr_vec)

verif<-a_all*num_verif/num_pi_1

```

