

Faculté des sciences

Inégalité de Sobolev fractionnaire

Auteure : Léonie Staquet

Promoteur : Augusto Ponce

Lecteurs : Heiner Olbermann et Tom Claeys

Année académique 2021-2022

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Inégalité de Sobolev fractionnaire

Léonie Staquet
Promoteur : Augusto Ponce
Lecteurs : Heiner Olbermann, Tom Claeys

Mémoire de master
Juin 2022

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon promoteur, le Professeur Augusto Ponce, pour ce mémoire. Merci de m'avoir proposé ce sujet duquel j'ai énormément appris, ainsi que pour vos nombreux conseils et votre investissement.

Je remercie également mes camarades et amis pour ces cinq années, avec un merci spécial à Antoine pour le partage toujours précieux de ses connaissances de l'analyse. Merci aussi à toutes les personnes ayant pris le temps de relire, ne serait-ce que partiellement, ce travail.

Finalement, merci à Thomas, Pia ainsi qu'à mes parents pour leurs relectures et leur soutien durant toute la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	9
1 Inégalité de Sobolev	13
1.1 Rappels et résultats sur les espaces de Sobolev	13
1.2 Introduction des espaces de Sobolev fractionnaires et premier résultat . .	20
1.3 Connexion avec les espaces de Sobolev	25
2 Le gradient fractionnaire	35
2.1 Introduction et propriétés du gradient fractionnaire	35
2.2 Convergence vers le gradient classique	41
2.3 La formule de représentation	44
3 Inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire	53
3.1 Le cas $p > 1$	53
3.2 Le cas $p = 1$	58
3.3 Contre-exemple à l'inégalité de Sobolev fractionnaire en dimension 1 . . .	75
Conclusion	83

Introduction

Durant les années 1930, l'étude de solutions à des équations aux dérivées partielles amena à considérer des espaces de fonctions L^p -intégrables, de dérivées faibles jusqu'à un certain ordre k également L^p -intégrables. Ces classes de fonctions apparurent comme particulièrement appropriées pour la formulation de ce type de problèmes, permettant de considérer la différentiabilité en un sens moins strict que le sens fort classique, mais plus spécifique que celui des distributions. Ces espaces sont aujourd'hui connus sous le nom d'*espaces de Sobolev*, et dénotés $W^{k,p}$ pour rappeler le caractère faible, *weak* en anglais, de la dérivabilité.

Lorsque que l'on considère des espaces de Sobolev définis sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, une difficulté apparaît : celle de donner un sens à des équations aux dérivées partielles avec conditions au bord. En effet, les éléments de $W^{k,p}(\Omega)$ étant des fonctions de l'espace $L^p(\Omega)$, donc définies à des ensembles négligeables près, il ne fait pas sens de parler d'une restriction au bord $\partial\Omega$. Cette difficulté peut être contournée via la *théorie des traces*, lorsque le bord $\partial\Omega$ est suffisamment régulier. On a alors l'existence d'un unique opérateur linéaire continu T , étendant l'opérateur de restriction classique pour les fonctions lisses, et associant à toute fonction $W^{1,p}$, un élément de $L^p(\partial\Omega)$. Les *espaces de Sobolev fractionnaires* $W^{s,p}$, où s est cette fois un nombre non entier, apparaissent alors naturellement lors de l'étude des propriétés de cet opérateur. En effet, pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Nous présentons dans ce mémoire une construction de ces espaces en tant qu'espaces des fonctions L^p , pour lesquelles une quantité appelée *semi-norme de Gagliardo* est finie.

L'objectif principal de ce travail est le suivant. Selon le théorème d'immersion de Sobolev, les fonctions des espaces de Sobolev classiques sont plus intégrables qu'espéré lorsque l'exposant p est strictement inférieur à la dimension n de l'espace. Plus précisément, on a l'inclusion des espaces de Sobolev $W^{1,p}$ dans L^{p^*} , où $p^* = \frac{np}{n-p}$ est l'*exposant critique de Sobolev*. Ce résultat est une conséquence directe de l'inégalité suivante,

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p,$$

pour tout $u \in W^{1,p}$. L'idée de ce travail est d'étudier les résultats analogues qu'il est possible d'obtenir dans les espaces de Sobolev fractionnaires, lorsque $sp < n$. Pour ce faire, nous suivons l'approche exposée dans le livre *Elliptic PDEs, measures and capacities* de A. Ponce [14, section 15.2], où différents résultats et références sont mentionnés, sans le détail des démonstrations.

Nous débutons le premier chapitre par quelques rappels sur les espaces de Sobolev, dans le but d'exposer l'inégalité de Sobolev. Nous y présentons la démonstration de ce théorème, afin de mettre en évidence les différences avec les techniques de preuves utilisées dans le cas fractionnaire. Nous introduisons alors les espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}$, définis comme les espaces de fonctions L^p -intégrables, dont la semi-norme de Gagliardo $[\cdot]_{s,p}$ est finie. Comme nous le verrons, il est possible de récupérer l'inégalité de Sobolev pour cette semi-norme de manière relativement immédiate, via une démonstration présentée dans [14]. Nous verrons alors plus précisément comment ces espaces peuvent être vus comme espaces intermédiaires entre les espaces L^p et $W^{1,p}$, et comment il est possible de récupérer la norme classique sur $W^{1,p}$, en étudiant la limite pour s tendant vers 1 dans la semi-norme de Gagliardo.

Le chapitre 2 est consacré à l'introduction d'un *gradient fractionnaire* ∇^s d'ordre $0 < s < 1$, objet jouant le rôle de gradient dans le contexte des espaces de Sobolev fractionnaires. Nous étudions différentes propriétés de celui-ci, telles que sa dérivabilité et son intégrabilité. Comme nous le verrons, l'appellation de gradient fractionnaire est notamment motivée par le fait qu'il est possible de récupérer le gradient usuel en faisant tendre s vers 1. D'autre part, cet objet vérifie une *formule de représentation*, permettant d'exprimer une fonction via son gradient fractionnaire. Cette propriété jouera un rôle clef dans les démonstrations étudiées au chapitre suivant.

Dans le chapitre 3, on se demande alors s'il est possible de récupérer l'inégalité de Sobolev pour ce gradient fractionnaire, c'est-à-dire, de montrer

$$\|\varphi\|_{\frac{np}{n-sp}} \leq C \|\nabla^s \varphi\|_p.$$

Nous commençons par traiter le cas où $p > 1$. L'idée clef consiste à établir l'estimation suivante pour le *noyau de Riesz* $I_s(x) = \frac{1}{|x|^{n-s}}$,

$$\|I_s * f\|_{\frac{np}{n-sp}} \leq C \|f\|_p,$$

où $C > 0$, $f \in L^1 \cap L^p$ et $p > 1$. Ce théorème fut initialement démontré en 1938 par S. L. Sobolev, dans [12]. Nous suivons ici la démonstration exposée dans [13] par E. M. Stein. En couplant ce résultat appliqué à $|\nabla^s \varphi|$, avec la formule de représentation, nous serons alors en mesure de comparer la norme L^{p^*} d'une fonction φ avec la norme L^p de son gradient fractionnaire et ainsi obtenir l'inégalité de Sobolev fractionnaire souhaitée. Dans une section suivante, nous présentons un contre-exemple permettant de mettre en évidence le fait que la formule pour le noyau de Riesz n'est pas vérifiée dans le cas où $p = 1$. Nous étudions alors l'obtention d'un résultat analogue concernant le *noyau de Riesz à valeur vectorielle* $\vec{I}_s(x) = \frac{x}{|x|^{n-s+1}}$. Plus précisément, on souhaite obtenir l'estimation suivante,

$$\|\vec{I}_s * \vec{f}\|_{\frac{np}{n-sp}} \leq C \|\vec{f}\|_p. \quad (0.1)$$

Pour ce faire, nous nous inspirons de l'article [10] de A. Schikorra, D. Spector et J. Van Schaftingen. Ceux-ci y présentent une estimation concernant la *transformée de Riesz*

à valeur vectorielle. Cette preuve repose sur le fait que cet opérateur est à rotationnel nul, propriété également vérifiée par notre gradient fractionnaire. Dans l'objectif de garder ce texte accessible sans trop s'appuyer sur l'analyse harmonique, nous avons adapté directement cette démonstration à notre contexte. Nous terminons ce chapitre par un contre-exemple montrant que l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire n'est pas vérifiée en dimension 1, lorsque $p = 1$. Celui-ci s'inspire du contre-exemple à l'équation (0.1) présenté dans [10]. Nous avons voulu apporter ici une démonstration directe au fait que l'inégalité de Sobolev fractionnaire n'est pas valable dans ce cas.

Pour l'ensemble de ce mémoire, nous avons souhaité prendre soin de détailler les démonstrations et résultats exposés, dans l'objectif de faciliter leur compréhension et d'éviter d'éventuelles imprécisions. Les objets et résultats utilisés sont introduits explicitement, et une référence est mentionnée lorsque nous faisons le choix d'omettre une démonstration. Nous prouvons certains résultats énoncés sans preuve dans la littérature, notamment certaines propriétés vérifiées par le gradient fractionnaire. Nous adaptons également des démonstrations, énoncées dans des contextes analogues, aux objets qui nous intéressent, sur base d'indications du promoteur de ce mémoire, le Professeur Augusto Ponce.

Chapitre 1

Inégalité de Sobolev

1.1 Rappels et résultats sur les espaces de Sobolev

Nous commençons par quelques rappels et résultats sur les espaces de Sobolev classiques, dans l'objectif d'introduire l'inégalité de Sobolev. L'idée est de motiver le contexte dans lequel celle-ci apparaît, ainsi qu'examiner la démonstration du théorème. Nous pourrions alors par la suite observer en quoi celle-ci diffère du cas fractionnaire. Afin d'éviter de trop nous attarder dans les espaces de Sobolev, nous énonçons un certain nombre des résultats de cette section sans démonstration. Nous nous basons principalement sur [15] et [16] pour ces rappels.

Les espaces de Sobolev font intervenir une notion affaiblie de différentiabilité. Afin de définir plus précisément celle-ci, nous introduisons les notations suivantes. Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Considérons d'abord des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour $1 \leq i \leq n$, on écrit $\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ et

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \varphi.$$

Nous considérons alors des fonctions localement intégrables, non nécessairement lisses, auxquelles nous pouvons associer une notion de différentiabilité faible.

Définition 1.1. Soient $u, v \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$. On dit que v est la dérivée faible d'ordre α de u si l'équation suivante est vérifiée pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \partial^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} v \varphi.$$

Lorsque $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, les dérivées faibles coïncident avec les dérivées fortes usuelles jusqu'à l'ordre k . Cela se vérifie à l'ordre 1 via une intégration par parties et en utilisant le fait que φ est à support compact. Le résultat se généralise par induction [16, Section 6.1.]. Pour cette raison, lorsque la dérivée faible d'ordre α de $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ existe, on note $v = \partial^\alpha u$.

L'espace de Sobolev d'ordre (k, p) correspond à l'ensemble des fonctions p -intégrables, dont les dérivées faibles jusqu'à l'ordre k sont également p -intégrables. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 1.2. Soient $k \in \mathbb{N}_*$ et $1 \leq p < +\infty$. On définit l'espace de Sobolev d'ordre (k, p) sur $\mathbb{R}^n$, noté $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, comme

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha u \text{ existe et appartient à } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } |\alpha| \leq k\}.$$

On munit l'espace $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarquons qu'il est important que la somme ci-dessus commence à 0, afin que la quantité $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ définisse effectivement une norme.

On peut en fait définir les espaces de Sobolev sur des ouverts Ω quelconques de $\mathbb{R}^n$ de manière tout à fait similaire. Pour l'ensemble de ce mémoire, nous nous restreignons au cas $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sauf mention du contraire et tant que le contexte ne prête pas à confusion, nous écrivons donc $W^{k,p}$, L^p et C_c^∞ , en omettant la mention de $\mathbb{R}^n$. De la même manière, nous préférons la notation $\|\cdot\|_{k,p}$ pour désigner la norme de Sobolev sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons aux espaces $W^{1,p}$, c'est-à-dire au cas où les dérivées faibles ne sont considérées qu'à l'ordre 1. Dans ce contexte, on note $\nabla u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour désigner le gradient fractionnaire défini comme

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_n u).$$

Nous souhaitons associer une norme p au gradient, regroupant l'information des normes p des différentes dérivées faibles. Pour un champ de vecteur quelconque $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on peut définir la norme L^p de ν comme la norme L^p de sa norme euclidienne. Plus précisément, on pose

$$\|\nu\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n \nu_i^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

En particulier, on obtient la définition suivante de la norme L^p du gradient :

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avec cette notation, l'espace $W^{1,p}$ se réécrit comme

$$W^{1,p} = \{u \in L^p : \|\nabla u\|_p < +\infty\}.$$

Remarque 1.3. Certaines références telles que [15] définissent la norme L^p du gradient comme $\left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Ces deux normes sont en réalité équivalentes. En effet,

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(n \max_i \{|\partial_i u|^2\} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq n^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^p = C_1 \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p, \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} n \max_i \{|\partial_i u|^p\} = n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\max_i \{|\partial_i u|^2\} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_i |\partial_i u|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = C_2 \|\nabla u\|_p^p, \end{aligned}$$

où $C_2 > 0$. En particulier, puisque $\|u\|_{1,p}^p = \|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p$, on peut écrire

$$\|u\|_p^p + \frac{1}{C_1} \|\nabla u\|_p^p \leq \|u\|_{1,p}^p \leq \|u\|_p^p + C_2 \|\nabla u\|_p^p. \quad (1.1)$$

Une propriété fondamentale des espaces de Sobolev est la densité des fonctions lisses. Il existe différents résultats de densité concernant les espaces $W^{k,p}$ [16, Chapitre 6]. On énonce ici le théorème suivant.

Théorème 1.4. [15, théorème 1.2] *Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace C_c^∞ est dense dans $W^{1,p}$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,p}$.*

En utilisant ce théorème de densité, nous sommes en mesure de montrer que lorsque $1 \leq p < n$, les fonctions de Sobolev sont en réalité plus intégrables qu'espéré. Plus précisément, on a l'incusion de $W^{1,p}$ dans un certain espace L^q , pour un exposant $q > p$. Il s'agit du résultat connu sous le nom d'inégalité de Sobolev. Celui-ci permet de contrôler la norme q de tout fonction $u \in W^{1,p}$ par la norme p de son gradient, c'est-à-dire, d'établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p \quad (1.2)$$

pour tout $u \in W^{1,p}$. Ceci implique alors directement l'inclusion $W^{1,p} \subset L^q$. Montrons que si un tel résultat est vérifié pour un exposant $q \geq 1$, ce q est unique et exprimable explicitement en fonction de p et n . Pour $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous définissons

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Nous allons appliquer l'équation (1.2) à u_λ . Via le changement de variable $y = \lambda x$, on calcule

$$\|u_\lambda\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^{-n} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_q$$

et

$$\|\nabla u_\lambda\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lambda^p |\nabla u(\lambda x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_p.$$

Ainsi, on doit avoir pour tout $\lambda > 0$,

$$\|u\|_q \leq C \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|\nabla u\|_p.$$

Si l'on suppose $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$, on obtient une contradiction en faisant tendre λ vers 0. Ainsi, $1 + \frac{n}{q} = \frac{n}{p}$, c'est-à-dire :

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

Pour $1 \leq p < n$, on appelle alors *exposant critique de Sobolev*, l'exposant p^* vérifiant

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Observons que puisque $n > p$, on a $\frac{n}{n-p} > 1$ et donc, $p^* > p$.

Nous consacrons le reste de cette section à la démonstration de l'inégalité de Sobolev. Avant d'arriver à ce théorème, nous introduisons deux résultats intermédiaires suivants. Rappelons tout d'abord *l'inégalité de Hölder généralisée* [16, proposition 4.2.3].

Proposition 1.5 (Inégalité de Hölder généralisée). *Soient $1 < p_1, \dots, p_k < +\infty$ tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = 1$$

et $f_1 \in L^{p_1}, \dots, f_k \in L^{p_k}$. Alors, $\prod_{j=1}^k f_j \in L^1$ et

$$\left\| \prod_{j=1}^k f_j \right\|_1 \leq \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{p_j}.$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, nous notons $\hat{x}_j$ pour désigner le vecteur x privé de sa j^{e} composante :

$$\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Pour démontrer l'inégalité de Sobolev, il nous reste à introduire le lemme suivant.

Lemme 1.6. Soient $n \geq 2$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions positives appartenant à $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \left(\prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Alors, $f \in L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. On procède par induction. Si $n = 2$, on a immédiatement par le théorème de Fubini,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_2) f_2(x_1) \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x_2) \, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2(x_1) \, dx_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons le résultat vrai pour $n \geq 2$ et prenons $f_1, \dots, f_{n+1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Fixons x_{n+1} . Par hypothèse de récurrence, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j(\hat{x}_j) \, d\hat{x}_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Toujours pour x_{n+1} fixé, on a par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_{n+1})^{\frac{n+1}{n}} \, dx_1 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j)^{\frac{1}{n}} \, dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}_{n+1}) \, dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{n+1}(\hat{x}_{n+1}) \, dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j(\hat{x}_j) \, d\hat{x}_j \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

En intégrant l'équation selon x_{n+1} , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x_1, \dots, x_{n+1})^{\frac{n+1}{n}} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ \leq \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j(\hat{x}_j) d\hat{x}_j \right)^{\frac{1}{n}} dx_{n+1}. \end{aligned}$$

En appliquant alors l'inégalité de Hölder généralisée et en élevant chaque membre de l'équation à la puissance $\frac{n}{n+1}$, nous obtenons finalement

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n+1}}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \|f_{n+1}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n+1}} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx \right)^{\frac{1}{n+1}},$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat souhaité.

Théorème 1.7 (Inégalité de Sobolev). *Soit $1 \leq p < n$. Il existe une constante $C > 0$ dépendant de n et p telle que pour tout $u \in W^{1,p}$,*

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p. \quad (1.3)$$

En particulier, on a l'inclusion suivante,

$$W^{1,p} \subset L^{p^*}.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'équation (1.3) pour $\varphi \in C_c^1$ et $p = 1$, c'est-à-dire, montrons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq C \|\nabla \varphi\|_1. \quad (1.4)$$

Soit $1 \leq j \leq n$. Par le théorème fondamental de l'analyse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_j} |\partial_j \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_j \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| dt. \end{aligned}$$

Posons

$$f_j(\hat{x}_j) := \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_j \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| dt.$$

Ainsi, puisque $|\varphi(x)| \leq f_j(\hat{x}_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$|\varphi(x)| \leq \left(\prod_{j=1}^n f_j(\hat{x}_j) \right)^{\frac{1}{n}} := f(x).$$

En appliquant le lemme précédent, on a

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n}}.$$

Or, par définition,

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_j \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| \, dt \, d\hat{x}_j \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(x)| \, dx = \|\nabla \varphi\|_1. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le résultat pour $p = 1$ en prenant $C = 1$. Nous étendons celui-ci à $\varphi \in C_c^\infty$ pour $1 < p < n$ comme suit. Prenons $\varphi \in C_c^\infty$ et $\alpha > 1$. Puisque $|\varphi|^\alpha \in C_c^1$, nous avons par la première partie de la preuve

$$\|\varphi\|_{\frac{n\alpha}{n-1}}^\alpha \leq \|\nabla |\varphi|^\alpha\|_1 = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\alpha-1} |\nabla \varphi(x)| \, dx.$$

L'inégalité de Hölder nous donne

$$\|\varphi\|_{\frac{n\alpha}{n-1}}^\alpha \leq \alpha \|\varphi\|_{\frac{(\alpha-1)p}{p-1}}^{\alpha-1} \|\nabla \varphi\|_p.$$

On choisit α de façon à ce que $\frac{n\alpha}{n-1} = \frac{(\alpha-1)p}{p-1}$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{n-1}{n-p}p$, et on obtient

$$\|\varphi\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \alpha \|\nabla \varphi\|_p,$$

ce qui nous donne le théorème pour $\varphi \in C_c^\infty$. On peut alors utiliser la densité des fonctions C_c^∞ pour étendre le théorème à $u \in W^{1,p}$. En effet, prenons une suite de fonctions u_n dans C_c^∞ , convergeant vers u dans $W^{1,p}$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_{1,p}$, cela implique l'existence d'une sous-suite u_{n_k} convergeant ponctuellement presque partout vers u . Ainsi, par le lemme de Fatou,

$$\|u\|_{p^*} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{p^*} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C \|\nabla u_n\|_p = C \|\nabla u\|_p,$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Comme nous l'avons constaté dans la démonstration, il suffit de montrer le théorème dans le cas $p = 1$, et le résultat découle facilement pour les exposants p supérieurs. Nous

verrons par la suite que dans les espaces de Sobolev fractionnaires, la situation est traitée assez différemment. Là encore, nous séparerons la démonstration selon que p soit plus grand ou égal à 1, mais il n'existe à ce jour pas d'argument permettant de déduire un cas de l'autre.

1.2 Introduction des espaces de Sobolev fractionnaires et premier résultat

Nous introduisons maintenant les espaces de Sobolev fractionnaires d'ordre $0 < s < 1$. L'ensemble de cette section se base sur [14, Section 15.2].

Définition 1.8. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $0 < s < 1$. L'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est défini comme l'ensemble

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n) : [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} < +\infty \right\},$$

où

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \right)^p \frac{dx dy}{|x - y|^n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

est appelée semi-norme de Gagliardo.

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on peut définir l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ de manière complètement similaire à la définition précédente. Cette fois encore, nous nous restreignons au cas $\Omega = \mathbb{R}^n$ et noterons donc dans la suite $W^{s,p}$ et $[u]_{s,p}$, par souci de lisibilité.

Remarque 1.9. Il est également possible de définir des espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, $s > 1$. Ceci demande de faire apparaître les dérivées d'ordres entiers inférieurs à s dans la semi-norme de Gagliardo, comme présenté dans [5, chapitre 4.6] ou [6]. Nous ne traitons pas ce cas dans ce travail.

Remarquons que la quantité $[.]_{s,p}$ définit effectivement une semi-norme. En effet,

$$[\lambda u]_{s,p} = |\lambda| [u]_{s,p}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire

$$[u + v]_{s,p} \leq [u]_{s,p} + [v]_{s,p}$$

découle de l'inégalité de Minkowski pour la mesure $\frac{dx dy}{|x - y|^n}$. Cette quantité ne définit pas une norme, puisque la semi-norme de toute fonction constante est nulle.

Remarque 1.10. En définissant la quantité

$$\|u\|_{s,p} := \left(\|u\|_p^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

on obtient cette fois une norme. Alors, l'espace $W^{s,p}$ munit de celle-ci est un espace de Banach. Ce résultat est démontré dans [5, proposition 4.24].

Nous souhaitons obtenir un résultat analogue à l'inégalité de Sobolev pour $[\cdot]_{s,p}$, établissant l'inclusion de $W^{s,p}$ dans un certain espace L^q , pour $q > p$. C'est-à-dire, nous souhaitons prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_q \leq C[u]_{s,p} \quad (1.5)$$

pour tout $u \in W^{s,p}$. Nous allons voir qu'il est possible d'établir un tel résultat lorsque $sp < n$. De la même manière qu'en Section 1.1, montrons que si l'équation (1.5) est vérifiée pour $q \geq 1$, cet exposant est uniquement déterminé par s , p et n . En effet, appliquons ce résultat à u_λ pour $\lambda > 0$. Alors, via les changements de variable $z = \lambda x$ et $w = \lambda y$, on a

$$\begin{aligned} \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_q &= \|u_\lambda\|_q \leq [u_\lambda]_{s,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(\lambda x) - u(\lambda y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda^{s - \frac{2n}{p} + \frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z) - u(w)|^p}{|z - w|^{sp+n}} dz dw \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lambda^{s - \frac{2n}{p} + \frac{n}{p}} [u]_{s,p}. \end{aligned}$$

Nécessairement, on doit donc avoir

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0.$$

Lorsque $sp < n$, on appelle alors exposant critique fractionnaire, l'exposant p_s^* , vérifiant

$$\frac{1}{p_s^*} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n},$$

c'est-à-dire,

$$p_s^* = \frac{np}{n - sp}.$$

Remarquons que puisque $sp < n$,

$$p_s^* = \frac{n}{n - sp} p > p.$$

Nous souhaitons maintenant démontrer que l'équation (1.5) est effectivement vérifiée pour $q = p_s^*$. Différentes preuves de ce résultat peuvent être trouvées dans [5] ou [6]. Nous

nous basons dans cette section sur la démonstration étonnamment simple présentée dans [14, proposition 15.5], communiquée par H. Brezis.

Commençons par introduire la définition suivante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la troncature $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $s \in \mathbb{R}$ par

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq k, \\ k & \text{si } s > k, \\ -k & \text{si } s < -k. \end{cases}$$

Alors, on a le lemme suivant.

Lemme 1.11. *Soient $0 < s < 1$, $1 \leq p < \frac{n}{s}$ et $u \in W^{s,p}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $u_k := T_k(u)$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$u_k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |u(x)| \leq k, \\ k & \text{si } u(x) > k, \\ -k & \text{si } u(x) < -k. \end{cases}$$

Alors, $u_k \in W^{s,p}$ et

$$[u_k]_{s,p} \leq [u]_{s,p}.$$

Démonstration. Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|u_k(x)| \leq |u(x)|$ et donc, $u_k \in L^p$ puisque $u \in L^p$. De plus, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et pour tout k ,

$$|T_k(s) - T_k(t)| \leq |s - t|.$$

Ainsi, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq |u(x) - u(y)|.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx,$$

d'où l'on déduit le résultat attendu. □

On obtient le théorème suivant.

Théorème 1.12. *Si $1 \leq p < \frac{n}{s}$, alors on a l'inclusion $W^{s,p} \subset L^{p_s^*}$. En effet, il existe une constante $C_{n,p} > 0$ qui ne dépend que de n et p telle que pour toute fonction $u \in W^{s,p}$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\|u\|_{p_s^*} \leq C_{n,p} [u]_{s,p}.$$

Démonstration. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a par l'inégalité triangulaire

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(y)|. \quad (1.6)$$

Soit $r > 0$. Pour rappel, la notation suivante est utilisée pour désigner l'intégrale moyenne de u sur la boule centrée en x de rayon r ,

$$\oint_{B(x,r)} u(y) \, dy := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) \, dy,$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. En passant à l'intégrale et en divisant par $|B(x,r)|$ dans l'équation (1.6), nous avons alors

$$|u(x)| = \oint_{B(x,r)} |u(x)| \, dy \leq \oint_{B(x,r)} |u(x) - u(y)| \, dy + \oint_{B(x,r)} |u(y)| \, dy.$$

On cherche à estimer les deux termes du membre de droite. On applique l'inégalité de Hölder sur le premier terme et on obtient

$$\begin{aligned} \oint_{B(x,r)} |u(x) - u(y)| \, dy &\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \left(\int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} 1 \, dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &= \left(\oint_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\oint_{B(x,r)} \frac{r^{sp+n}}{|x-y|^{sp+n}} |u(x) - u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On utilise également l'inégalité de Hölder sur le deuxième terme et on a pour tout $1 \leq q < +\infty$,

$$\oint_{B(x,r)} |u(y)| \, dy \leq \left(\oint_{B(x,r)} |u(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En regroupant ces deux estimations et en notant ω_n la mesure de Lebesgue de la boule unité sur $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left(\oint_{B(x,r)} \frac{r^{sp+n}}{|x-y|^{sp+n}} |u(x) - u(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\oint_{B(x,r)} |u(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= r^s \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{B(x,r)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{n}{q}} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{B(x,r)} |u(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq r^s \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + r^{-\frac{n}{q}} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Considérons d'abord le cas où u est bornée. Par hypothèse, $u \in L^p$. En choisissant $p < q < +\infty$, on a donc $u \in L^q$. Puisque $u \in W^{s,p}$, on déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, le membre de droite de l'inégalité est fini. Choisissons $r > 0$ tel que

$$r^s \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy \right)^{\frac{1}{p}} = r^{-\frac{n}{q}} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On trouve

$$r = \left[\left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy \right)^{\frac{-1}{p}} \right]^{\frac{1}{s + \frac{n}{q}}}.$$

En revenant à l'équation (1.7), on obtient alors

$$|u(x)| \leq C_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy \right)^{\frac{1}{p} \frac{s}{s + \frac{n}{q}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy \right)^{\frac{\frac{s}{q}}{s + \frac{n}{q}}},$$

où l'expression a été réécrite de manière à ce que $C_{n,p} > 0$ regroupe les facteurs constants et ne dépende pas de s . Puisque $p_s^* > p$, on peut choisir $q = p_s^*$ et l'exposant du premier facteur devient $\frac{1}{p_s^*}$. Afin d'obtenir l'estimation désirée, on élève à la puissance p_s^* et on intègre selon x chaque membre de l'inégalité. On obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p_s^*} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^{p_s^*} dy \right)^{\frac{sp}{n}},$$

et donc

$$\|u\|_{L^{p_s^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p_s^*} dx \right)^{\frac{1 - \frac{sp}{n}}{p_s^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}} = C[u]_{s,p}.$$

Ceci établit l'inégalité désirée pour les fonctions bornées. On étend maintenant le résultat au cas des fonctions u non bornées. Considérons la suite des troncatures $u_k = T_k(u)$ introduites au lemme 1.11. Pour tout k , u_k est bornée et puisque $u_k \in W^{s,p}$ par le lemme 1.11, il existe par la première partie de la preuve une constante C dépendant de n et p telle que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p_s^*} dx \right)^{\frac{1}{p_s^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.8)$$

pour tout k . Observons que par le lemme 1.11,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'autre part, $(|u_k|^{p_s^*})_k$ converge ponctuellement vers $|u|^{p_s^*}$ et donc, par le lemme de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p_s^*} dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^{p_s^*} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{p_s^*}{p}}$$

Ainsi,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p_s^*} dx \right)^{\frac{1}{p_s^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

1.3 Connexion avec les espaces de Sobolev

On peut maintenant se demander en quel sens les espaces de Sobolev classiques $W^{1,p}$ peuvent être retrouvés à partir de $W^{s,p}$. Une approche naturelle est d'essayer de remplacer s par 1 dans la semi-norme de Gagliardo $[u]_{s,p}$. Cependant, cette tentative échoue puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{p+n}} dx dy < +\infty$$

implique u constante presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Puisque l'on considère des fonctions $u \in W^{s,p}$ et donc L^p -intégrables sur $\mathbb{R}^n$, on déduit que u est nulle presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Nous démontrerons ce résultat en fin de section, au corollaire 1.17.

Il est néanmoins possible de retrouver la norme du gradient sur $W^{1,p}$ à partir de la semi-norme de Gagliardo. Lorsque $p > 1$, on peut en effet compenser cette croissance trop grande lorsque $s \rightarrow 1$, via l'ajout d'un facteur $1 - s$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

$$\lim_{s \nearrow 1} (1 - s) [u]_{s,p}^p = C \|\nabla u\|_p^p \quad (1.9)$$

avec $C > 0$ indépendante de u . Cette formule, due à Bourgain, Brezis et Mironescu [1], sera démontrée dans la suite de cette section, à la proposition 1.16. Observons que puisque la constante obtenue au théorème 1.12 ne dépend pas de s , ceci ne nous permet pas de retrouver l'inégalité de Sobolev classique à partir du théorème 1.12.

Remarque 1.13. Le cas où $s \searrow 0$ a été étudié par V. Maz'ya et T. Shaposhnikova dans [8]. Un résultat analogue à la formule de Bourgain-Brezis-Mironescu y est établi, permettant cette fois de retrouver $\|u\|_p$ à partir de sa semi-norme de Gagliardo, via un facteur de correction s .

Nous nous consacrons à l'obtention de deux résultats établissant les espaces de Sobolev fractionnaires en tant qu'espaces intermédiaires entre les espaces de Sobolev classiques

et les espaces de Lebesgue. Nous commençons par une estimation concernant la semi-norme de Gagliardo, mettant celle-ci en lien avec les normes usuelles sur les espaces $W^{1,p}$ et L^p .

Proposition 1.14. *Soient $0 < s < 1$ et $1 \leq p < +\infty$. Il existe une constante $C > 0$ dépendant de n et p telle que pour tout $u \in W^{1,p}$,*

$$[u]_{s,p} \leq \frac{C}{s^{\frac{1}{p}}(1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u\|_p^{1-s} \|\nabla u\|_p^s.$$

Démonstration. Par densité des fonctions C_c^∞ dans $W^{1,p}$, il suffit de montrer le résultat pour toute fonction lisse à support compact. Supposons en effet le théorème vérifié dans ce cas. Pour tout $u \in W^{1,p}$, il existe une suite de fonctions u_n dans C_c^∞ tendant vers u pour la norme $\|\cdot\|_{1,p}$ et ponctuellement presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par hypothèse,

$$[u_n]_{s,p} \leq \frac{C}{s^{\frac{1}{p}}(1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u_n\|_p^{1-s} \|\nabla u_n\|_p^s.$$

Par convergence dans $W^{1,p}$ et par le lemme de Fatou, on a alors

$$\begin{aligned} [u]_{s,p} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} [u_n]_{s,p} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{s^{\frac{1}{p}}(1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u_n\|_p^{1-s} \|\nabla u_n\|_p^s \\ &= \frac{C}{s^{\frac{1}{p}}(1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u\|_p^{1-s} \|\nabla u\|_p^s. \end{aligned}$$

Considérons $u \in C_c^\infty$ et $r > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} [u]_{s,p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Traisons d'abord le cas où $|x - y| > r$. Observons que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)|^p &\leq (|u(x)| + |u(y)|)^p \leq (2 \max\{|u(x)|, |u(y)|\})^p \\ &\leq 2^p (|u(x)|^p + |u(y)|^p). \end{aligned}$$

Alors, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \\
\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx + 2^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Via le changement de variable $z = x - y$ et en notant σ_{n-1} la surface de la sphère de dimension $n - 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dy dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|z|^{sp+n}} dz dx \\
&= \sigma_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \left(\int_r^\infty \frac{1}{t^{sp+n}} t^{n-1} dt \right) dx = \sigma_{n-1} \frac{1}{sp} r^{-sp} \|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Par symétrie, on a le même résultat pour le terme de droite de l'équation (1.11) et ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \leq \frac{C_1}{s} r^{-sp} \|u\|_p^p,$$

où $C_1 > 0$ ne dépend pas de s .

On suppose maintenant $|x - y| \leq r$. Par le théorème fondamental,

$$\begin{aligned}
u(x) - u(y) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} u(y + t(x - y)) dt \\
&= \int_0^1 \nabla u(y + t(x - y)) \cdot (x - y) dt.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, on a donc

$$|u(x) - u(y)|^p \leq \int_0^1 |\nabla u(y + t(x - y))|^p dt |x - y|^p.$$

Alors, via les changements de variable $z = x - y$ et $w = y + tz$ et par le théorème de

Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u(y + tz)|^p dt \frac{1}{|z|^{p(s-1)+n}} dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |\nabla u(w)|^p dt dw \left(\int_{|z| \leq r} \frac{1}{|z|^{p(s-1)+n}} dz \right) \\
&= \|\nabla u\|_p^p \left(\int_{|z| \leq r} \frac{1}{|z|^{p(s-1)+n}} dz \right).
\end{aligned}$$

Or, par intégration radiale, on a

$$\int_{|z| \leq r} \frac{1}{|z|^{p(s-1)+n}} dz = \sigma_{n-1} \int_0^r \frac{1}{t^{p(s-1)+n}} t^{n-1} dt = C_2 \frac{r^{(1-s)p}}{1-s}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \leq \frac{C_2}{1-s} r^{(1-s)p} \|\nabla u\|_p^p.$$

En rassemblant nos deux estimations et en revenant à l'équation (1.10), on obtient pour tout $r > 0$

$$[u]_{s,p}^p \leq \frac{C_1}{s} r^{-sp} \|u\|_p^p + \frac{C_2}{1-s} r^{(1-s)p} \|\nabla u\|_p^p.$$

Choisissons $r > 0$ vérifiant

$$\frac{C_1}{s} r^{-sp} \|u\|_p^p = \frac{C_2}{1-s} r^{(1-s)p} \|\nabla u\|_p^p. \quad (1.12)$$

On trouve

$$r^p = C_3 \frac{1-s}{s} \|u\|_p^p \frac{1}{\|\nabla u\|_p^p},$$

où $C_3 > 0$. En insérant dans l'équation (1.12), on obtient

$$[u]_{s,p}^p \leq 2 \frac{C_1}{s} r^{-sp} \|u\|_p^p = C_4 \left(\frac{\|u\|_p^p}{s} \right)^{1-s} \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{1-s} \right)^s,$$

avec $C_4 > 0$. Remarquons que pour $0 < a, b < 1$, on a

$$a = e^{\log(a)} \leq e^{b \log(a)} = a^b$$

et donc,

$$\frac{1}{s^{(1-s)}} \frac{1}{(1-s)^s} \leq \frac{1}{s(1-s)}.$$

Ainsi,

$$[u]_{s,p}^p \leq C_4 \frac{1}{s(1-s)} \|\nabla u\|_p^{sp} \|u\|_p^{p(1-s)}.$$

En élevant les deux membres de l'équation à la puissance $\frac{1}{p}$, on obtient la formule attendue. $\square$

On cherche maintenant à obtenir la formule de Bourgain-Brezis-Mironescu. Nous rappelons pour ce faire la notion de famille régularisante [16, Section 4.3]. Prenons $\rho \in C_c^\infty$ à support dans la boule unité tel que $\rho \geq 0$ et

$$\int_{B(0,1)} \rho = 1.$$

On peut par exemple définir explicitement

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$c = \int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} dx.$$

Alors, on construit une famille régularisante, ou d'approximations de l'identité, en posant pour $r > 0$,

$$\rho_r(x) := \frac{1}{r^n} \rho\left(\frac{x}{r}\right).$$

Remarquons que pour tout $r > 0$, le support de ρ_r est inclus dans la boule $B(0,r)$ et que

$$\int_{B(0,r)} \rho_r = 1.$$

La semi-norme de Gagliardo diminue par convolution avec les approximations de l'identité. En effet, on a le lemme suivant.

Lemme 1.15. *Soient $0 < s < 1$ et $u \in W^{s,p}$. Alors, pour tout $r > 0$, on a*

$$[\rho_r * u]_{s,p} \leq [u]_{s,p}.$$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned}
[\rho_r * u]_{s,p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\rho_r * u(x) - \rho_r * u(y)|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(z) u(x - z) - \rho_r(z) u(y - z) dz|^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x - z) - u(y - z)| \rho_r(z) dz \right)^p}{|x - y|^{sp+n}} dx dy
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Jensen, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x - z) - u(y - z)| \rho_r(z) dz \right)^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x - z) - u(y - z)|^p \rho_r(z) dz.$$

Alors,

$$[\rho_r * u]_{s,p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x - z) - u(y - z)|^p}{|x - y|^{sp+n}} \rho_r(z) dz dx dy.$$

On procède aux changements de variable $x = w + z$ et $y = \xi + z$, et on obtient finalement

$$\begin{aligned}
[\rho_r * u]_{s,p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(w) - u(\xi)|^p}{|w - \xi|^{sp+n}} \rho_r(z) dz dw d\xi \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_r(z) dz \right) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(w) - u(\xi)|^p}{|w - \xi|^{sp+n}} dw d\xi = [u]_{s,p}^p. \quad \square
\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de faire le lien entre la semi-norme de Gagliardo et la norme sur $W^{1,p}$. On peut en fait établir une condition d'appartenance à $W^{1,p}$ via $[\cdot]_{s,p}$, pour $p > 1$, de la manière suivante.

Proposition 1.16. *Soient $1 < p < +\infty$ et $u \in L^p$. Alors, $u \in W^{1,p}$ si et seulement si*

$$\liminf_{s \nearrow 1} (1 - s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} < +\infty. \quad (1.13)$$

Dans ce cas, on a l'existence de $C > 0$ dépendant de n et p tel que

$$\lim_{s \nearrow 1} (1 - s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} = C \|\nabla u\|_p. \quad (1.14)$$

Démonstration. Si $u \in W^{1,p}$, alors $\|\nabla u\|_p$ est finie et par la proposition 1.14, on a pour tout $0 < s < 1$

$$(1 - s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} \leq \frac{C}{s^{\frac{1}{p}}} \|u\|_p^{1-s} \|\nabla u\|_p^s,$$

où $C > 0$. On déduit l'équation (1.13) en passant à la limite $s \nearrow 1$.

Montrons l'implication inverse. Supposons ainsi

$$\liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} < +\infty.$$

Il existe une constante $K > 0$ telle que pour toute fonction lisse $v \in C^\infty$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $R > 0$,

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy = K^p |\nabla v(x)|^p, \quad (1.15)$$

Nous acceptons ce résultat sans démonstration, mais nous démontrerons en Section 2.2 un résultat analogue (théorème 2.5). Alors, en intégrant et en élevant chaque côté de l'égalité à la puissance $\frac{1}{p}$, on a par le lemme de Fatou,

$$K \|\nabla v\|_{L^p(B(x,R))} \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [v]_{W^{s,p}(B(x,R))} \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [v]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce résultat étant vérifié pour tout $R > 0$, on a par le théorème de convergence dominée

$$K \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [v]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

En appliquant ce résultat à $v = \rho_r * u \in C_c^\infty$, on déduit du lemme 1.15

$$K \|\nabla(\rho_r * u)\|_p \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [\rho_r * u]_{s,p} \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p}.$$

Le lemme de fermeture [14, proposition 4.10] implique que puisque la suite des convolutions $\rho_r * u \in C_c^\infty$ converge faiblement vers u ,

$$\|\nabla u\|_p \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \|\nabla(\rho_r * u)\|_p.$$

Alors,

$$K \|\nabla u\|_p \leq \liminf_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p}. \quad (1.16)$$

On a ainsi $u \in W^{1,p}$, ce qui prouve la première partie de la proposition.

Montrons alors l'équation (1.14), c'est-à-dire, montrons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} = C \|\nabla u\|_p$$

pour tout $u \in W^{1,p}$. Par l'équation (1.16), cela revient à trouver $C > 0$ telle que

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} \leq C \|\nabla u\|_p.$$

Nous utilisons la densité des fonctions lisses à support compact dans $W^{1,p}$ (proposition

1.4). Prenons donc $\varphi \in C_c^\infty$. Par l'équation (1.15), nous avons

$$\int_{B(0,R)} \lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy dx = K^p \int_{B(0,R)} |\nabla \varphi(x)|^p dx.$$

pour tout $R > 0$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $y \in B(x, R)$, il existe ξ appartenant au segment $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\nabla \varphi(\xi) \cdot (x - y)| \leq |\nabla \varphi(\xi)| |x - y| \leq \|\nabla \varphi\|_\infty |x - y|.$$

Puisque $\varphi \in C_c^\infty$, il existe une constante C_1 telle que $\|\nabla \varphi\|_\infty \leq C_1$. On en déduit que φ est lipschitzienne. Ainsi,

$$\begin{aligned} (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy &\leq (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{C_1}{|x-y|^{sp+n-p}} dy \\ &= (1-s) \int_{B(0,R)} \frac{C_1}{|z|^{sp+n-p}} dz. \end{aligned}$$

Par intégration radiale, on a alors

$$\begin{aligned} (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy &\leq C_1 (1-s) \int_0^R \frac{1}{t^{sp+1-p}} dt \\ &= C_1 \frac{1-s}{p-sp} R^{p-sp} = C_1 \frac{R^{p(1-s)}}{p}. \end{aligned}$$

Le membre de droite étant borné uniformément en s , on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(0,R)} \int_{B(x,R)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy dx = K^p \int_{B(0,R)} |\nabla \varphi(x)|^p dx.$$

Cette limite étant vérifiée pour tout $R > 0$, on obtient

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [\varphi]_{s,p} = K \|\nabla \varphi\|_p. \quad (1.17)$$

Par l'inégalité triangulaire pour la semi-norme de Gagliardo, nous avons

$$[u]_{s,p} \leq [\varphi]_{s,p} + [u - \varphi]_{s,p}.$$

De plus, par la proposition 1.14, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$[u - \varphi]_{s,p} \leq \frac{C_2}{s^{\frac{1}{p}} (1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u - \varphi\|_p^{1-s} \|\nabla(u - \varphi)\|_p^s.$$

Rappelons que par l'équation (1.1), il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$\|u - \varphi\|_p^p + C_3 \|\nabla(u - \varphi)\|_p^p \leq \|u - \varphi\|_{1,p}^p.$$

En particulier,

$$\|u - \varphi\|_p^p \leq \|u - \varphi\|_{1,p}^p \quad \text{et} \quad C_3^{\frac{1}{p}} \|\nabla(u - \varphi)\|_p^p \leq \|u - \varphi\|_{1,p}^p.$$

De plus, $s^{\frac{-1}{p}} \leq 2^p$ pour tout $\frac{1}{2} \leq s$. Ainsi, en considérant $\frac{1}{2} \leq s$, on en déduit l'existence de $C_4 > 0$ tel que

$$[u]_{s,p} \leq [\varphi]_{s,p} + \frac{C_4}{(1-s)^{\frac{1}{p}}} \|u - \varphi\|_{1,p}.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité par $(1-s)^{\frac{1}{p}}$ et en utilisant l'équation (1.17), on obtient une constante $C > 0$ telle que

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} \leq K \|\nabla \varphi\|_p + C_3 \|u - \varphi\|_{1,p}.$$

On prend alors une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans C_c^∞ convergeant vers u dans $W^{1,p}$. On obtient

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{s,p} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (K \|\nabla \varphi_n\|_p + C_4 \|u - \varphi_n\|_{1,p}) = K \|\nabla u\|_p.$$

Ceci conclut la démonstration. □

La proposition 1.16 est fausse pour $p = 1$. Cependant, J. Dávila a établi dans [4] un résultat analogue dans ce cas, valable pour les fonctions à variation bornée.

Comme annoncé précédemment, nous terminons ce chapitre par la preuve du résultat suivant [14, exercice 15.3].

Corollaire 1.17. *Soit $u \in L^p$. Alors, si*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{p+n}} dx dy < +\infty,$$

il existe $C > 0$ tel que $u = C$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Observons que les calculs effectués au lemme 1.15 restent valables pour $s = 1$. Ainsi, par l'inégalité de Jensen on a, pour tout $r > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x - y|^{p+n}} dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{p+n}} dx dy < +\infty.$$

Fixons $r > 0$ et $R > 0$. Rappelons que puisque $\rho_r * u \in C^\infty$, l'équation suivante est vérifiée,

$$K^p |\nabla(\rho_r * u)(x)|^p = \lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(x,R)} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy.$$

Par le lemme de Fatou, on en déduit

$$K \|\nabla \rho_r * u\|_{L^p(B(0,r))}^p \leq \lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(x,R)} \int_{B(x,R)} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy dx.$$

De plus, pour $y \in B(x, R)$, on a $|x-y| \leq R^{1-s}|x-y|^s$ et donc,

$$\frac{|(\rho_r * u)(x) - \rho_r * u(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} \leq R^{(1-s)p} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x-y|^{p+n}}.$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} K^p \|\nabla(\rho_r * u)\|_{L^p(B(0,r))}^p &\leq \lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{B(x,R)} \int_{B(x,R)} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x-y|^{sp+n}} dy dx \\ &\leq \lim_{s \nearrow 1} (1-s) R^{(1-s)p} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\rho_r * u)(x) - (\rho_r * u)(y)|^p}{|x-y|^{p+n}} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Ce résultat étant vérifié pour tout $R > 0$, on en déduit que $\|\nabla(\rho_r * u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$ et donc, $\nabla(\rho_r * u) = 0$ sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $\rho_r * u$ est constante sur $\mathbb{R}^n$, d'où l'on déduit que u est constante presque partout sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

Chapitre 2

Le gradient fractionnaire

Dans le contexte des espaces de Sobolev $W^{1,p}$ présentés en Section 1.1, nous avons naturellement travaillé avec la norme p du gradient plutôt qu'avec la norme $\|\cdot\|_{1,p}$. L'inégalité de Sobolev nous avait alors donné une estimation faisant intervenir celle-ci. On peut alors se demander si dans le cadre des espaces de Sobolev fractionnaires, il est possible d'introduire un objet jouant le rôle d'un gradient fractionnaire d'ordre s , qui tendrait vers le gradient classique pour s tendant vers 1. Ce chapitre est consacré à la construction d'un tel objet, que nous définissons comme dans [14, section 15.2], ainsi qu'à l'étude de ses propriétés. Nous nous restreignons aux fonctions lisses à support compact, ce qui nous permettra par la suite de manipuler plus facilement notre gradient. Cette hypothèse est raisonnable, puisque l'espace C_c^∞ est dense dans $W^{s,p}$. Ce résultat est démontré dans [5, proposition 4.27].

2.1 Introduction et propriétés du gradient fractionnaire

Soient $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty$. Observons que la semi-norme de Gagliardo de φ s'obtient en calculant la norme L^p du champ de vecteur

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^s} \frac{x - y}{|x - y|}, \quad (2.1)$$

par rapport à la mesure $\frac{dx dy}{|x - y|^n}$. Dans cette idée, nous considérons le *gradient fractionnaire d'ordre s* , $\nabla^s \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ comme

$$\nabla^s \varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy.$$

Vérifions que cet objet est bien défini, c'est-à-dire, vérifions que la norme de l'intégrant est d'intégrale finie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ceci est une conséquence directe de la proposition suivante.

Proposition 2.1. Soit $0 < s < 1$. Pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \leq C \|\varphi\|_\infty^{1-s} \|\nabla \varphi\|_\infty^s.$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy = \int_{B(x,r)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy.$$

Considérons d'abord le cas où l'on intègre en dehors de la boule $B(x, r)$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \frac{|\varphi(x)| + |\varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \frac{2\|\varphi\|_\infty}{|x - y|^{n+s}} dy. \end{aligned}$$

En procédant au changement de variable $z = x - y$ et par intégration radiale, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy &\leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \frac{1}{|z|^{n+s}} dz \\ &= 2\sigma_{n-1} \|\varphi\|_\infty \int_r^\infty \frac{t^{n-1}}{t^{n+s}} dt = 2\sigma_{n-1} \|\varphi\|_\infty \frac{r^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

On considère maintenant le cas où l'on intègre sur la boule $B(x, r)$. Puisque $\varphi \in C_c^\infty$, on a par le théorème des accroissements finis

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy &\leq \|\nabla \varphi\|_\infty \int_{B(x,r)} \frac{1}{|x - y|^{n+s-1}} dy \\ &= \|\nabla \varphi\|_\infty \int_{B(0,r)} \frac{1}{|z|^{n+s-1}} dz \\ &= \sigma_{n-1} \|\nabla \varphi\|_\infty \int_0^r \frac{1}{t^s} dt = \sigma_{n-1} \frac{r^{1-s}}{1-s} \|\nabla \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

En regroupant nos estimations, nous avons ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \leq 2\sigma_{n-1} \|\varphi\|_\infty \frac{r^{-s}}{s} + \sigma_{n-1} \frac{r^{1-s}}{1-s} \|\nabla \varphi\|_\infty.$$

Finalement, en choisissant r tel que

$$2\sigma_{n-1} \|\varphi\|_\infty \frac{r^{-s}}{s} = \sigma_{n-1} \frac{r^{1-s}}{1-s} \|\nabla \varphi\|_\infty,$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{2(1-s)}{s} \frac{\|\varphi\|_\infty}{\|\nabla\varphi\|_\infty},$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \leq \sigma_{n-1} \frac{2^{2-s}}{(1-s)^s s^{1-s}} \|\varphi\|_\infty^{1-s} \|\nabla\varphi\|_\infty^s.$$

On en déduit le résultat souhaité. $\square$

On définit les *dérivées partielles fractionnaires d'ordre s* , $\partial_j^s \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ comme

$$\partial_j^s \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x_j - y_j}{|x - y|} dy.$$

Le gradient fractionnaire correspond alors au champ de vecteur regroupant les dérivées partielles fractionnaires, c'est-à-dire :

$$\nabla^s = (\partial_1^s, \dots, \partial_n^s).$$

Observons que la proposition 2.1 implique l'existence d'une constante C telle que

$$|\nabla^s \varphi(x)| \leq C$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En particulier, $\nabla^s \varphi \in L^\infty$.

Nous verrons dans la section suivante en quel sens nous pouvons récupérer le gradient classique à partir de $\nabla^s \varphi$. Nous nous intéressons tout d'abord à l'étude de l'intégrabilité et différentiabilité du gradient fractionnaire.

Remarquons que le gradient fractionnaire n'est pas à support compact. Cependant, la proposition suivante permet de contrôler sa décroissance à l'infini.

Proposition 2.2. *Soient $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|\nabla^s \varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{n+s}}.$$

En particulier, $\nabla^s \varphi \in L^1$.

Démonstration. On désigne par $\text{supp}(\varphi)$ le support de φ . Ce support étant compact par hypothèse, il existe $R > 0$ tel que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$. On peut supposer $R > 2$. Alors, $|x| > 2R$ implique

$$B(x, 1) \cap \text{supp}(\varphi) = \emptyset. \quad (2.2)$$

Supposons $|x| > 2R$. Alors, $\varphi(x) = 0$ et par (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla^s \varphi(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy = \int_{B(x,1)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,1)} \frac{|\varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \\ &= \int_{\text{supp}(\varphi)} \frac{|\varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy. \end{aligned}$$

Si $y \in \text{supp}(\varphi)$, $|y| \leq R$. Donc, $|x| \geq 2R \geq 2|y|$ et ainsi,

$$|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Alors, on obtient

$$\int_{\text{supp}(\varphi)} \frac{|\varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \leq \int_{B(0,R)} \frac{\|\varphi\|_\infty}{|x - y|^{n+s}} dy \leq \int_{B(0,R)} \frac{\|\varphi\|_\infty}{(|x|/2)^{n+s}} dy = \frac{C_1}{|x|^{n+s}}.$$

Observons que $1 + |x| \leq 2|x|$. Ainsi, $\frac{1}{|x|^{n+s}} \leq \frac{2^{n+s}}{(1+|x|)^{n+s}}$. On en déduit

$$|\nabla^s \varphi(x)| \leq \frac{C_2}{(|x| + 1)^{n+s}}.$$

Si $|x| \leq 2R$, on a par la proposition 2.1 l'existence d'une constante $C_3 > 0$ telle que

$$|\nabla^s \varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s}} dy \leq C_3.$$

Alors,

$$|\nabla^s \varphi(x)| \leq C_3 \frac{(1 + 2R)^{n+s}}{(1 + 2R)^{n+s}} \leq C_3 \frac{(1 + 2R)^{n+s}}{(1 + |x|)^{n+s}} = \frac{C_4}{(1 + |x|)^{n+s}}.$$

On conclut en posant $C = \max\{C_2, C_4\}$. □

Remarquons que l'on a en fait l'estimation suivante pour la norme L^1 du gradient fractionnaire,

$$\|\nabla^s \varphi\|_1 \leq [\varphi]_{s,1},$$

le membre de droite de l'inégalité étant contrôlable via l'inégalité d'interpolation énoncée à la proposition 1.14.

On étudie maintenant la différentiabilité du gradient fractionnaire. Comme énoncé dans la proposition suivante, $\nabla^s \varphi$ préserve la différentiabilité de φ et ses dérivées partielles peuvent être calculées à partir des dérivées partielles de φ .

Proposition 2.3. *Soient $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, $\nabla^s \varphi \in C^\infty$ et pour tout $1 \leq j \leq n$,*

$$\partial_j \nabla^s \varphi = \nabla^s \partial_j \varphi.$$

Démonstration. On procède au changement de variable $h = y - x$ dans l'expression du gradient fractionnaire,

$$\nabla^s \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} dh.$$

Pour $1 \leq j \leq n$ et $h \neq 0$, on calcule

$$\partial_j \left[\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} \right] = \frac{\partial_j \varphi(x + h) - \partial_j \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|}.$$

Supposons $|h| \leq 1$. Puisque $\varphi \in C_c^\infty$, il existe une constante C_1 telle que $|\partial_j^2 \varphi| \leq C_1$. Alors, on a par le théorème des accroissements finis,

$$\left| \partial_j \left[\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} \right] \right| \leq C_1 \frac{|x + h - x|}{|h|^{n+s}} = \frac{C_1}{|h|^{n+s-1}}.$$

Puisque $n + s - 1 < n$, nous déduisons que la dérivée en x_j de l'intégrant est bornée presque partout par une fonction L^1 sur $B(0, 1)$. Traitons maintenant le cas où $|h| \geq 1$. Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $|\partial_j \varphi| \leq C_2$. Alors,

$$\left| \partial_j \left[\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} \right] \right| \leq \frac{2C_2}{|h|^{n+s}}.$$

Cette dernière expression étant intégrable sur $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \partial_j \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} dh &= \int_{B(0, R)} \partial_j \left[\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} \right] dh \\ &= \int_{B(0, R)} \frac{\partial_j \varphi(x + h) - \partial_j \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h}{|h|} dh = \nabla^s \partial_j \varphi(x), \end{aligned}$$

et nous obtenons le résultat souhaité. $\square$

Nous terminons cette section par une propriété qui interviendra de manière cruciale au chapitre 3, lorsque nous étudierons la preuve de l'inégalité de Sobolev fractionnaire pour $p = 1$.

Proposition 2.4. *Soit $\varphi \in C_c^\infty$ et $0 < s < 1$. Le gradient fractionnaire de φ est à rotationnel nul, c'est-à-dire, pour tout $j, k \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$\partial_j \partial_k^s \varphi = \partial_k \partial_j^s \varphi.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En procédant au changement de variable $y = x + h$, on a

$$\partial_k^s \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x_k - y_k}{|x - y|} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|^{n+s}} \frac{h_k}{|h|} dh.$$

Par la proposition 2.3,

$$\begin{aligned} \partial_j \partial_k^s \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j [\varphi(x + h) - \varphi(x)] \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \partial_j [\varphi(x + h) - \varphi(x)] \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La fonction $h_k \mapsto \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}}$ est impaire et donc,

$$\partial_j \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh = 0.$$

Afin de mettre la variable de dérivation en évidence, on garde la notation $\frac{\partial}{\partial x_j}$ pour les calculs suivants. On déduit de l'égalité précédente que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j} [\varphi(x + h) - \varphi(x)] \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x + h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_j} \varphi(x + h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_j} \varphi(x + h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} dh = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_k} \varphi(x + h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} dh. \quad (2.4)$$

Observons que

$$\frac{\partial}{\partial h_j} \left[\varphi(x + h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right] = \frac{\partial}{\partial h_j} \varphi(x + h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} + \varphi(x + h) \frac{\partial}{\partial h_j} \left[\frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right]$$

et de la même manière,

$$\frac{\partial}{\partial h_k} \left[\varphi(x + h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \right] = \frac{\partial}{\partial h_k} \varphi(x + h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} + \varphi(x + h) \frac{\partial}{\partial h_k} \left[\frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \right].$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial h_j} \left[\frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right] = \frac{h_k h_j (-n - s - 1)}{|h|^{n+s+3}} = \frac{\partial}{\partial h_k} \left[\frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \right].$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_j} \varphi(x+h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} - \frac{\partial}{\partial h_k} \varphi(x+h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \\ = \frac{\partial}{\partial h_j} \left[\varphi(x+h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right] - \frac{\partial}{\partial h_k} \left[\varphi(x+h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \right] \end{aligned}$$

et nous pouvons donc ramener le problème à étudier le membre de droite de l'égalité. La fonction φ est de classe C^1 et à support compact. On peut donc appliquer le théorème de la divergence [16, théorème 9.2.4] et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_j} \left[\varphi(x+h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right] dh = - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varphi(x+h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} n_j(h) d\gamma,$$

où n est le champ de vecteurs normal à $\partial B(0,\varepsilon)$, de norme 1 et orienté vers l'extérieur de $B(0,\varepsilon)$. On a $n(h) = \frac{h}{|h|}$ et donc $n_j(h) = \frac{h_j}{|h|}$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_j} \left[\varphi(x+h) \frac{h_k}{|h|^{n+s+1}} \right] dh = - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varphi(x+h) \frac{h_k h_j}{|h|^{n+s+2}} d\gamma.$$

Par symétrie, on trouve également

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial h_k} \left[\varphi(x+h) \frac{h_j}{|h|^{n+s+1}} \right] dh = - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \varphi(x+h) \frac{h_j h_k}{|h|^{n+s+2}} d\gamma.$$

On a donc égalité entre les deux intégrales, et par conséquent, l'équation (2.4) est vérifiée. Par l'équation (2.3) et en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons le résultat souhaité. $\square$

2.2 Convergence vers le gradient classique

Nous montrons maintenant que, comme nous le souhaitions, le gradient fractionnaire converge vers le gradient classique. Plus précisément, on a le résultat suivant, énoncé sans démonstration dans [14, section 15.2].

Théorème 2.5. *Soient $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \nabla^s \varphi(x) = \omega_n \nabla \varphi(x),$$

où ω_n désigne le volume de la boule unité sur $\mathbb{R}^n$.

Dans l'objectif de démontrer ce théorème, on établit le lemme suivant.

Lemme 2.6. Soient $\delta > 0$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Alors,

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{v \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz = \omega_n v \frac{\delta^{1-s}}{1-s}.$$

Démonstration. Nous commençons par montrer que

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{v \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz = \frac{v}{n} \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|z|^{n+s-1}} dz.$$

Considérons les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et écrivons

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\delta)} \frac{v \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz &= \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|z|^{n+s+1}} \left(\sum_{i=1}^n v_i z_i \right) \left(\sum_{j=1}^n z_j e_j \right) dz \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{B(0,\delta)} \frac{v_i z_i z_j e_j}{|z|^{n+s+1}} dz. \end{aligned}$$

Observons que pour $j \neq i$, la fonction

$$z_j \mapsto \frac{v_i z_i z_j}{|z|^{n+s+1}}$$

est impaire. Ainsi, les intégrales correspondant à ces indices sont nulles, et nous avons

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{v \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz = \sum_{i=1}^n \int_{B(0,\delta)} \frac{v_i z_i^2 e_i}{|z|^{n+s+1}} dz.$$

Observons de plus que pour tout $1 \leq k, l \leq n$, nous avons par symétrie sur la boule

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{z_k^2}{|z|^{n+s+1}} dz = \int_{B(0,\delta)} \frac{z_l^2}{|z|^{n+s+1}} dz.$$

et donc pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{v_i z_i^2}{|z|^{n+s+1}} dz = \frac{v_i}{n} \sum_{l=1}^n \int_{B(0,\delta)} \frac{z_l^2}{|z|^{n+s+1}} dz = \frac{v_i}{n} \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|z|^{n+s-1}} dz$$

Ainsi,

$$\int_{B(0,\delta)} \frac{v \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz = \frac{v}{n} \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|z|^{n+s-1}} dz.$$

Nous terminons la démonstration du lemme en calculant

$$\frac{v}{n} \int_{B(0,\delta)} \frac{1}{|z|^{n+s-1}} dz = \frac{v}{n} \sigma_{n-1} \int_0^\delta \frac{1}{t^s} dt = \omega_n v \frac{\delta^{1-s}}{1-s}.$$

□

Nous sommes alors en mesure de montrer que le gradient fractionnaire converge vers le gradient classique.

Démonstration du théorème 2.5. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. On calcule

$$\begin{aligned}\nabla^s \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy \\ &= \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy + \int_{|x-y| > \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy.\end{aligned}$$

Traisons d'abord le cas où $|x - y| > \delta$. Puisque $\varphi \in C_c^\infty$, φ est bornée par une constante $C_1 > 0$ et donc

$$\begin{aligned}\left| \int_{|x-y| > \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy \right| &\leq 2C_1 \int_{|x-y| > \delta} \frac{1}{|x - y|^{n+s}} dy \\ &= 2C_1 \int_{|z| > \delta} \frac{1}{|z|^{n+s}} dz = 2C_1 \sigma_{n-1} \frac{\delta^{-s}}{s}.\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{s \nearrow 1} \frac{1-s}{s} \delta^{-s} = 0,$$

on a

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{|x-y| > \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy = 0.$$

Considérons maintenant le cas où $|x - y| < \delta$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \nabla \varphi(x) \cdot (y - x) + R_x(y),$$

où R_x est le reste d'ordre 1 en x . Puisque $\varphi \in C_c^\infty$, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|R_x(y)| \leq \frac{C_2}{2} |x - y|^2. \quad (2.5)$$

On utilise alors l'estimation précédente pour calculer

$$\begin{aligned}\int_{|x-y| \leq \delta} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy \\ = \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{\nabla \varphi(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy + \int_{|x-y| \leq \delta} \frac{R_x(y)}{|x - y|^{n+s}} \frac{x - y}{|x - y|} dy.\end{aligned}$$

Par l'équation (2.5), on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{R_x(y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} dy \right| &\leq \frac{C_2}{2} \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{1}{|x-y|^{n+s-2}} dy \\
&= \frac{C_2}{2} \int_{|z|\leq\delta} \frac{1}{|z|^{n+s-2}} dz \\
&= \frac{C_2}{2} \sigma_{n-1} \int_0^\delta t^{-s+1} dt = C_3 \frac{\delta^{2-s}}{2-s}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \frac{\delta^{2-s}}{2-s} = 0,$$

on obtient

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{R_x(y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} dy = 0.$$

Finalement, on souhaite calculer l'intégrale

$$A := \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{\nabla\varphi(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} dy = \int_{|z|\leq\delta} \frac{\nabla\varphi(x) \cdot z}{|z|^{n+s}} \frac{z}{|z|} dz.$$

On applique le lemme 2.6 à $v = \nabla\varphi(x)$ et on obtient

$$A = \omega_n \nabla\varphi(x) \frac{1}{1-s} \delta^{1-s}.$$

Alors,

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \int_{|x-y|\leq\delta} \frac{\nabla\varphi(x) \cdot (x-y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} dy = \omega_n \nabla\varphi(x).$$

En rassemblant nos estimations, on déduit

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s) \nabla^s \varphi(x) = \omega_n \nabla\varphi(x),$$

ce qui nous donne le résultat attendu. □

2.3 La formule de représentation

Nous terminons ce chapitre par une formule permettant d'exprimer une fonction $\varphi \in C_c^\infty$ en terme de son gradient fractionnaire. Dans le cas du gradient classique, on a la formule de représentation suivante pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C_c^\infty$ [14, proposi-

tion 4.14] :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^n} dy, \quad (2.6)$$

où σ_{n-1} est la surface de la sphère de dimension $n-1$. On souhaite donc obtenir une formule de représentation similaire pour le gradient fractionnaire $\nabla^s \varphi$, qui s'avèrera très utile pour la suite de nos calculs. L'ensemble de cette section est donc consacré à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.7 (Formule de représentation). *Soient $0 < s < 1$, $n \in \mathbb{N}_*$ et $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, il existe une constante $A_{n,s} > 0$ dépendant de n et s , telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\varphi(x) = A_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^s \varphi(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^{n-s+1}} dy.$$

2.3.1 Le cas $n \geq 2$

Nous traitons d'abord cette formule dans le cas où la dimension n est strictement supérieure à 1. On commence par obtenir un résultat permettant d'exprimer le gradient fractionnaire $\nabla^s \varphi$ en fonction du gradient usuel $\nabla \varphi$.

Proposition 2.8. *Soit $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\nabla^s \varphi(x) = \frac{1}{n+s-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla \varphi(y)}{|x-y|^{n+s-1}} dy.$$

Démonstration. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et prenons $e \in \mathbb{R}^n$, où le choix de e est arbitraire. On définit le champ de vecteurs $\phi: \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ comme

$$\phi(y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s-1}} \cdot e.$$

Pour rappel, la divergence d'un champ de vecteurs ν différentiable sur $\mathbb{R}^n$ est définie comme

$$\operatorname{div} \nu := \partial_1 \nu_1 + \cdots + \partial_n \nu_n.$$

Puisque ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, on calcule sa divergence en tout $y \neq x$ par

$$\operatorname{div} \phi(y) = (n+s-1) \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot e - \frac{\nabla \varphi(y)}{|x-y|^{n+s-1}} \cdot e. \quad (2.7)$$

Prenons deux rayons $0 < r < R$ arbitraires et désignons par $A_{r,R}$, l'anneau

$$A_{r,R} := B(x, R) \setminus B(x, r).$$

La fonction φ est à support compact et de classe C^∞ . Dès lors, ϕ est également de classe C^∞ sur l'anneau $A_{r,R}$ et on peut donc appliquer le théorème de divergence [16, théorème 6.3.4] sur $A_{r,R}$. Ainsi,

$$\int_{A_{r,R}} \operatorname{div} \phi \, dy = \int_{\partial A_{r,R}} \phi \cdot n \, d\gamma, \quad (2.8)$$

où n est le champ de vecteurs orienté vers l'extérieur de ∂A , normal à la surface et de norme 1. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial A_{r,R}} \phi \cdot n \, d\gamma \right| &= \left| \int_{\partial B(x,R)} \phi \cdot n \, d\gamma + \int_{\partial B(x,r)} \phi \cdot n \, d\gamma \right| \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,R))} \int_{\partial B(x,R)} 1 \, d\gamma + \|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} 1 \, d\gamma \\ &= \|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,R))} C_1 R^{n-1} + \|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,r))} C_1 r^{n-1}, \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$. Puisque φ est continue à support compact, φ est bornée et on a pour tout $y \in \partial B(x, R)$, par définition de ϕ ,

$$|\phi(y)| \leq \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{n+s-1}} |e| \leq \frac{2|e| \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{R^{n+s-1}}.$$

Ainsi,

$$\|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,R))} R^{n-1} \leq \frac{2|e| \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}{R^s} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty$$

De plus, par le théorème des accroissements finis,

$$\|\phi\|_{L^\infty(\partial B(x,r))} r^{n-1} \leq \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} r}{r^{n+s-1}} r^{n-1} = \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} r^{1-s} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, la fonction $\operatorname{div} \phi$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. En effet, fixons $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Par le théorème des accroissements finis et puisque le gradient de φ est borné en norme par une constante C_2 ,

$$\begin{aligned} \int_{B(z,1)} |\operatorname{div} \phi(y)| \, dy &= (n+s-1) \int_{B(z,1)} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} \cdot e - \frac{\nabla \varphi(y)}{|x-y|^{n+s-1}} \cdot e \right| \, dy \\ &\leq (n+s-1) |e| \int_{B(z,1)} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s}} + \frac{|\nabla \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s-1}} \, dy \\ &\leq 2C_2(n+s-1) |e| \int_{B(z,1)} \frac{1}{|x-y|^{n+s-1}} \, dy \\ &= C_3 \int_{B(0,1)} \frac{1}{|w|^{n+s-1}} \, dw < +\infty, \end{aligned}$$

avec $C_3 > 0$ regroupant les facteurs constants. De plus, φ est borné sur $\mathbb{R}^n$ par une

constante C_4 et on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,1)} |\operatorname{div} \phi(y)| \, dy &\leq (n+s-1)|e| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,1)} \frac{2C_4}{|x-y|^{n+s}} \, dy + \frac{|\nabla \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s-1}} \, dy \\ &= (n+s-1)|e| \left(2C_4 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{|z|^{n+s}} \, dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z,1)} \frac{|\nabla \varphi(y)|}{|x-y|^{n+s-1}} \, dy \right). \end{aligned}$$

Le terme de gauche dans la dernière égalité est fini étant donné que $n+s > n$. Puisque ϕ est à support compact, on déduit que l'intégrale du terme de droite est également finie. Ainsi, $\operatorname{div} \phi$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. En passant alors successivement aux limites $R \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$ dans l'équation (2.8), on déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \phi \, dy = 0,$$

et donc, par définition de $\nabla^s \varphi$ et en utilisant l'équation (2.7),

$$\nabla^s \varphi(x) \cdot e = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+s}} \frac{x-y}{|x-y|} \, dy \cdot e = \frac{1}{n+s-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla \varphi(y)}{|x-y|^{n+s-1}} \, dy \cdot e.$$

Puisque le choix de e était arbitraire, on en déduit l'expression souhaitée. $\square$

Pour arriver à la démonstration de la formule de représentation pour $n \geq 2$, nous avons également besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.9. *Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta < n$. Alors, il existe une constante $B > 0$ dépendant de α, β et n telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z}{|z|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|y-z|^{n-\beta}} \, dz = B \frac{y}{|y|^{n-(\alpha+\beta)+1}}.$$

Démonstration. Prenons $y \in \mathbb{R}^n$ et posons $G(y)$ le membre de droite de l'équation :

$$G(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z}{|z|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|y-z|^{n-\beta}} \, dz.$$

Le problème revient alors à trouver $B > 0$ tel que

$$|y|^{n-(\alpha+\beta)} G(y) = B \frac{y}{|y|}.$$

On effectue le changement de variable $z = |y|w$ et on obtient

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|w}{(|y||w|)^{n-\alpha+1}} \frac{|y|^n}{(|y|\frac{y}{|y|} - w)^{n-\beta}} dw \\ &= \frac{1}{|y|^{n-(\alpha+\beta)}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w}{|w|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|y - w|^{n-\beta}} dw = \frac{1}{|y|^{n-(\alpha+\beta)}} G\left(\frac{y}{|y|}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on veut obtenir $B > 0$ tel que

$$G\left(\frac{y}{|y|}\right) = B \frac{y}{|y|}.$$

Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $|y| = 1$ et montrer qu'il existe $B > 0$ tel que

$$G(y) = By.$$

Puisque $|y| = 1$, on peut prendre une transformation orthogonale $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vérifiant

$$T(e_n) = y,$$

où $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ est le n -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On procède au changement de variable $z = T(\eta)$, et par linéarité de T on obtient

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{z}{|z|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|y - z|^{n-\beta}} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{T(\eta)}{|T(\eta)|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|T(e_n) - T(\eta)|^{n-\beta}} d\eta \\ &= T\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta\right) = T(G(e_n)). \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$G(e_n) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \frac{(\eta_1, \dots, \eta_n)}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta_1 \dots d\eta_n.$$

De plus, on observe que pour $1 \leq i \leq n-1$, la fonction

$$\eta_i \rightarrow \frac{\eta_i}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}}$$

est impaire. On en déduit que les $n-1$ premières composantes de $G(e_n)$ sont nulles. Ce dernier peut donc s'écrire comme

$$G(e_n) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_n}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta \right) e_n.$$

Montrons que le coefficient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_n}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta$$

est positif. Cela revient à vérifier que

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_n}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta$$

est positif. On a

$$I = \int_0^\infty \frac{\eta_n}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \left(\frac{1}{|(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 1 - \eta_n)|^{n-\beta}} - \frac{1}{|(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 1 + \eta_n)|^{n-\beta}} \right) d\eta_n.$$

Par hypothèse, $n - \beta > 0$ et donc,

$$|(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 1 - \eta_n)|^{n-\beta} < |(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}, 1 + \eta_n)|^{n-\beta}$$

pour tout $\eta_n \in]0, +\infty[$, ce qui implique que I est strictement positif. Posons

$$B = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta_n}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|e_n - \eta|^{n-\beta}} d\eta.$$

On a donc $B > 0$ et $G(e_n) = Be_n$. Finalement,

$$G(y) = T(G(e_n)) = T(Be_n) = BT(e_n) = By.$$

Ceci conclut la démonstration. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.7, dans le cas où $n \geq 2$.

Démonstration du théorème 2.7 pour $n \geq 2$. On souhaite montrer qu'il existe une constante $A_{n,s} > 0$ dépendant de s et $n \geq 2$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = A_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^s \varphi(y) \cdot \frac{x - y}{|x - y|^{n-s+1}} dy.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et posons

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^s \varphi(y) \cdot \frac{x - y}{|x - y|^{n-s+1}} dy.$$

Pour rappel, on a par la proposition 2.8,

$$\nabla^s \varphi(y) = \frac{1}{n - 1 + s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla \varphi(z)}{|y - z|^{n+s-1}} dz.$$

Ainsi,

$$F(x) = \frac{1}{n-1+s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(z) \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \frac{1}{|y-z|^{n+s-1}} dz dy.$$

Puisque l'on a supposé $n \geq 2$, on a $(n-s) + (n+s-1) > n$ et donc, la fonction apparaissant dans le membre de droite appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On procède aux changements de variable successifs $y = x - \eta$ et $z = x - \xi$ et on obtient, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{(-1)^n}{n-1+s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(z) \cdot \frac{\eta}{|\eta|^{n-s+1}} \frac{1}{|x-\eta-z|^{n+s-1}} dz d\eta \\ &= \frac{1}{n-1+s} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(x-\xi) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta}{|\eta|^{n-s+1}} \frac{1}{|\xi-\eta|^{n+s-1}} d\eta d\xi. \end{aligned}$$

La proposition 2.9 nous donnait l'existence d'une constante $B > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta}{|\eta|^{n-\alpha+1}} \frac{1}{|\xi-\eta|^{n-\beta}} d\eta = B \frac{\xi}{|\xi|^{n-(\alpha+\beta)+1}},$$

pour $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta < N$. Puisque $N \geq 2$, on peut prendre $\alpha = s$ et $\beta = 1 - s$ et on obtient

$$F(x) = \frac{B}{n-1+s} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \varphi(x-\xi) \cdot \frac{\xi}{|\xi|^n} d\xi.$$

Finalement, on procède au changement de variable $y = x - \xi$ et, en appliquant la formule de représentation pour le gradient classique, énoncée à l'équation (2.6), on a

$$F(x) = \frac{B}{n-1+s} \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^n \nabla \varphi(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^n} dy = \frac{(-1)^n B}{n-1+s} \sigma_{n-1} \varphi(x) = \frac{1}{A_{n,s}} \varphi(x),$$

où on a posé $A_{n,s} = \frac{(-1)^n B}{n-1+s} \sigma_{n-1}$. On obtient ainsi la formule souhaitée. $\square$

2.3.2 Le cas de la dimension 1

Dans la démonstration obtenue à la sous-section précédente, nous avons explicitement utilisé l'hypothèse $n \geq 2$. Ceci nous a notamment permis de choisir les paramètres $\alpha + \beta < n$ comme valant s et $1 - s$ respectivement dans la proposition 2.9. Ceci n'étant plus possible en dimension 1, nous établissons le résultat analogue suivant.

Lemme 2.10. *Soit $0 < s < 1$. Il existe $B > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,*

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left(\frac{1}{|y-z|^s} - \frac{1}{|y+z|^s} \right) dy = B \operatorname{sgn}(z).$$

Démonstration. Nous procédons similairement à la démonstration de la proposition 2.9. Fixons $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et posons

$$G(z) := \int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left(\frac{1}{|y-z|^s} - \frac{1}{|y+z|^s} \right) dy.$$

On veut prouver l'existence de $B > 0$ tel que $G(z) = B \operatorname{sgn}(z)$. Procédons au changement de variable $y = |z|w$. Alors,

$$G(z) = \int_0^\infty \frac{1}{|w|^{1-s}} \left(\frac{1}{\left|w - \frac{z}{|z|}\right|^s} - \frac{1}{\left|w + \frac{z}{|z|}\right|^s} \right) dw = G\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

On peut donc supposer que z vaut 1 ou -1 . Observons de plus que $G(-1) = -G(1)$. Ainsi, on peut supposer $z = 1$. Finalement,

$$G(1) = \int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left(\frac{1}{|y-1|^s} - \frac{1}{|y+1|^s} \right) dy.$$

Puisque pour tout $y \geq 0$, $|y+1|^s \geq |y-1|^s$, on peut poser

$$B := \int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left(\frac{1}{|y-1|^s} - \frac{1}{|y+1|^s} \right) dy > 0,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 2.7.

Démonstration du théorème 2.7 en dimension 1. On souhaite montrer l'existence de $A_s > 0$ dépendant de s telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = A_s \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \varphi(y) \frac{x-y}{|x-y|^{2-s}} dy.$$

Nous commençons par montrer le résultat pour $x = 0$. Observons que

$$I := \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \varphi(y) \frac{y}{|y|^{2-s}} dy = \int_0^\infty \frac{\nabla^s \varphi(y) - \nabla^s \varphi(-y)}{y^{1-s}} dy.$$

Par la proposition 2.8,

$$\nabla^s \varphi(y) = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\nabla \varphi(z)}{|y-z|^s} dz.$$

Alors,

$$I = \frac{1}{s} \int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\nabla \varphi(z)}{|y-z|^s} - \frac{\nabla \varphi(z)}{|y+z|^s} \right] dz dy.$$

Par Fubini et en utilisant le lemme 2.10, on calcule

$$I = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} \nabla \varphi(z) \int_0^\infty \frac{1}{y^{1-s}} \left[\frac{1}{|y-z|^s} - \frac{1}{|y+z|^s} \right] dy dz = \frac{B}{s} \int_{\mathbb{R}} \nabla \varphi(z) \frac{z}{|z|} dz.$$

Rappelons finalement la formule de représentation pour le gradient classique énoncée à l'équation (2.6) :

$$\varphi(0) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \nabla \varphi(z) \frac{z}{|z|} dz.$$

Nous en déduisons l'existence d'une constante $A_s > 0$ telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\varphi(0) = A_s \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \varphi(z) \frac{-z}{|z|^{2-s}} dz,$$

ce qui est le résultat souhaité pour $x = 0$. Considérons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et posons $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(x+z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \tilde{\varphi}(0) = A_s \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \tilde{\varphi}(z) \frac{-z}{|z|^{2-s}} dz = A_s \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \tilde{\varphi}(z-x) \frac{x-z}{|x-z|^{2-s}} dy \\ &= A_s \int_{\mathbb{R}} \nabla^s \varphi(z) \frac{x-z}{|x-z|^{2-s}} dz, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 3

Inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire

Nous nous consacrons maintenant à l'obtention de l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire, c'est-à-dire, l'obtention d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{\frac{np}{n-sp}} \leq C \|\nabla^s \varphi\|_p \quad (3.1)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty$ et $p \geq 1$. Contrairement au cas classique où nous pouvions aisément déduire le résultat de $p = 1$, nous utilisons dans le cas fractionnaire des méthodes différentes pour traiter les cas $p = 1$ et $p > 1$.

3.1 Le cas $p > 1$

Lorsque $p > 1$, nous utilisons une estimation via le *noyau de Riesz*, défini ci-dessous.

Définition 3.1. Soit $0 < \alpha < n$. Le noyau de Riesz I_α est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ comme

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}.$$

Alors, on a le résultat suivant.

Proposition 3.2. [13, théorème V.1] Soient $0 < \alpha < n$ et $1 < p < q < \infty$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Il existe une constante $C > 0$ dépendant de p et q telle que, pour tout $f \in L^p \cap L^1$,

$$\|I_\alpha * f\|_q \leq C \|f\|_p.$$

En appliquant cette estimation à $\alpha = s$, $f = |\nabla^s \varphi|$ et $q = p_s^*$, nous serons en mesure de comparer la norme p de $\nabla^s \varphi$ avec la norme p_s^* de φ , et ainsi de démontrer l'inégalité de Sobolev fractionnaire pour $p > 1$. Dans l'objectif de démontrer cette proposition, nous énonçons certains théorèmes sans démonstration, celles-ci s'éloignant de notre sujet.

Rappelons l'inégalité de Young pour la convolution [3, théorème 5.4.3] : si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

alors $f * g \in L^r$ et on a

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Pour obtenir le résultat principal de cette section, nous aurons également besoin du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz énoncé ci-dessous. La démonstration de ce résultat est détaillée dans [13, Appendice B]. Nous introduisons au préalable la définition suivante.

Soit T un opérateur défini sur $L^{p_0} \cup L^{p_1}$, à valeur dans l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$. On dit que T est *sous-additif* si pour tous $f, g \in L^{p_0} \cup L^{p_1}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|T(f + g)(x)| \leq |T(f)(x)| + |T(g)(x)|.$$

Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3 (théorème de Marcinkiewicz). *Soient $1 \leq p_0 \leq q_0 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty$ avec $p_0 < p_1$ et $q_0 \neq q_1$. Soit également T un opérateur sous-additif sur $L^{p_0} \cup L^{p_1}$. Supposons que T soit de type faible- (p_0, q_0) et de type faible- (p_1, q_1) , c'est-à-dire tel qu'il existe des constantes $C_0, C_1 > 0$ vérifiant*

$$|\{|T(f)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C_i \|f\|_{p_i}}{\lambda} \right)^{q_i}, \quad i = 0, 1.$$

Supposons de plus qu'il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$\frac{1}{p} = \frac{(1 - \theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{(1 - \theta)}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Alors, T est de type fort- (p, q) , c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\|T(f)\|_q \leq C \|f\|_p.$$

Le théorème de Marcinkiewicz nous fournit les outils nécessaires pour démontrer la proposition 3.2.

Démonstration de la proposition 3.2. On souhaite trouver $C > 0$ tel que

$$\|I_\alpha * f\|_q \leq C \|f\|_p.$$

Dans l'objectif d'appliquer le théorème 3.3, montrons que l'application $I : f \mapsto I_\alpha * f$ est de type faible- (p, q) , c'est-à-dire montrons qu'il existe une constante $C_1 > 0$ dépendant de p et de q telle que pour tout $\lambda > 0$,

$$|\{|I_\alpha * f| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C_1 \|f\|_p}{\lambda} \right)^q. \quad (3.2)$$

Fixons $\lambda > 0$ et observons que quitte à modifier la constante C , il suffit de prouver cette inégalité pour λ remplacé par 2λ dans le membre de gauche. On peut également supposer $\|f\|_1 = 1$. Soit $\mu > 0$. Décomposons le noyau de Riesz en une somme $I_\alpha = I_{\alpha,1} + I_{\alpha,\infty}$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$I_{\alpha,1}(x) = \begin{cases} I_\alpha(x) & \text{si } |x| \leq \mu, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$I_{\alpha,\infty}(x) = \begin{cases} I_\alpha(x) & \text{si } |x| > \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition,

$$I_\alpha * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (I_{\alpha,1}(x-y) + I_{\alpha,\infty}(x-y)) f(y) dy$$

et donc

$$I_\alpha * f = I_{\alpha,1} * f + I_{\alpha,\infty} * f.$$

Ainsi,

$$|\{|I_\alpha * f| > 2\lambda\}| \leq |\{|I_{\alpha,1} * f| > \lambda\}| + |\{|I_{\alpha,\infty} * f| > \lambda\}|. \quad (3.3)$$

Observons que puisque $0 < n - \alpha < n$, $I_{\alpha,1} \in L^1$. En appliquant successivement les inégalités de Chebyshev et de Young, on a

$$|\{|I_{\alpha,1} * f| > \lambda\}| \leq \frac{\|I_{\alpha,1} * f\|_p^p}{\lambda^p} \leq \frac{\|I_{\alpha,1}\|_1^p \|f\|_p^p}{\lambda^p} = \frac{\|I_{\alpha,1}\|_1^p}{\lambda^p}.$$

De plus,

$$\|I_{\alpha,1}\|_1 = \int_{\{|x| \leq \mu\}} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} dx = \omega_{n-1} \int_0^\mu r^{\alpha-1} dr = C_2 \mu^\alpha,$$

où $C_2 > 0$ regroupe les termes constants. D'autre part, remarquons que la condition $p < q$ revient à demander $p\alpha < n$. En prenant $p' = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p , on a

donc,

$$p'(n - \alpha) = \frac{pn}{p-1} - \frac{p\alpha}{p-1} > \frac{pn}{p-1} - \frac{n}{p-1} = n.$$

Ainsi, $I_{\alpha,\infty} \in L^{p'}$ et en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Young avec $r = \infty$ on a

$$\|I_{\alpha,\infty} * f\|_{\infty} \leq \|I_{\alpha,\infty}\|_{p'} \|f\|_p = \|I_{\alpha,\infty}\|_{p'}. \quad (3.4)$$

On calcule

$$\|I_{\alpha,\infty}\|_{p'} = \left(\int_{\{|x|>\mu\}} \frac{1}{|x|^{(n-\alpha)p'}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\omega_{n-1} \int_{\mu}^{\infty} r^{n-1-(n-\alpha)p'} dr \right)^{\frac{1}{p'}} = C_3 \mu^{\alpha - \frac{n}{p}},$$

où $C_3 > 0$ regroupe les termes constants. Choisissons $\mu = \frac{\lambda^{1/(\alpha - \frac{n}{p})}}{C_3^{\alpha - \frac{n}{p}}}$, de telle sorte que $\|I_{\alpha,\infty}\|_{p'} = \lambda$. Par l'équation (3.4), on a donc $\|I_{\alpha,\infty} * f\|_{\infty} \leq \lambda$, d'où l'on déduit

$$|\{|I_{\alpha,\infty} * f| > \lambda\}| = 0.$$

En revenant à l'équation (3.3), on a

$$|\{|I_{\alpha} * f| > 2\lambda\}| \leq |\{|I_{\alpha,1} * f| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C_2 \mu^{\alpha}}{\lambda} \right)^p$$

d'où, en remplaçant μ par la valeur choisie, on obtient l'existence d'une constante $C_4 > 0$ telle que

$$|\{|I_{\alpha} * f| > 2\lambda\}| \leq C_4 \left(\frac{\lambda^{\frac{\alpha - \frac{n}{p}}{p}}}{\lambda} \right)^p = C_4 \lambda^{-q} = \left(\frac{C_4 \|f\|_p}{\lambda} \right)^q,$$

puisque l'on a supposé $\|f\|_p = 1$. On en déduit que I est bien de type faible- (p, q) pour tout p, q vérifiant les hypothèses de la proposition. Observons également que le fait que $p > 1$ n'est intervenu que pour vérifier que $I_{\alpha,\infty} \in L^{p'}$. Or, il est clair que $I_{\alpha,\infty} \in L^{\infty}$, et notre développement est donc valable pour $p_0 = 1$ et $q_0 = \frac{n}{n-\alpha}$. Ainsi, I est de type faible- $(1, q_0)$. Fixons p, q vérifiant nos hypothèses et prenons $P > p$ et $Q > q$ vérifiant également les hypothèses. L'application I est de type faible- (P, Q) et il existe θ tel que

$$\frac{1}{p} = (1 - \theta) + \frac{\theta}{P}.$$

Alors, puisque $\frac{1}{Q} = \frac{1}{P} - \frac{\alpha}{n}$,

$$(1 - \theta) \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right) + \frac{\theta}{Q} = (1 - \theta) \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right) + \theta \left(\frac{1}{P} - \frac{\alpha}{n} \right) = \frac{-\alpha}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

On peut donc appliquer le théorème de Marcinkiewicz, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Remarquons que l'hypothèse $f \in L^p \cap L^1$ intervient de manière cruciale pour pouvoir appliquer le théorème de Marcinkiewicz. Le résultat est en réalité énoncé dans [13] dans une version plus générale, en supposant uniquement $f \in L^p$. La conclusion repose alors sur un argument de densité. Puisque nous appliquerons ce théorème à $f = |\nabla^s \varphi| \in L^1$, l'hypothèse additionnelle $f \in L^1$ n'est pas restrictive pour notre cadre de travail.

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire lorsque $p \neq 1$.

Théorème 3.4. *Soient $0 < s < 1$ et $1 < p < \frac{n}{s}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty$,*

$$\|\varphi\|_{p_s^*} \leq C \|\nabla^s \varphi\|_p.$$

Démonstration. En utilisant la formule de représentation (théorème 2.7), on a l'existence d'une constante $A_{n,s} > 0$ telle que

$$\varphi(x) = A_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^s \varphi(y) \cdot \frac{x-y}{|x-y|^{n-s+1}} dy. \quad (3.5)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{p_s^*} &\leq A_{n,s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^s \varphi(y)| \frac{1}{|x-y|^{n-s}} dy \right)^{p_s^*} dx \right)^{\frac{1}{p_s^*}} \\ &= A_{n,s} \|I_s * |\nabla^s \varphi|\|_{p_s^*}. \end{aligned}$$

Puisque $|\nabla^s \varphi| \in L^1 \cap L^\infty$, par l'inégalité de Hölder, $|\nabla^s \varphi| \in L^p$. La proposition 3.2 s'applique donc pour $f = |\nabla^s \varphi|$ et $\alpha = s$. On obtient finalement une constante $C > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{p_s^*} \leq C \|\nabla^s \varphi\|_p,$$

ce qui nous donne l'inégalité de Sobolev fractionnaire attendue. $\square$

Nous souhaitons maintenant étendre l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire au cas où $p = 1$. Le théorème obtenu ci-dessus pour $p > 1$ repose sur l'application de la proposition 3.2. Rappelons que la preuve de cette proposition consiste à appliquer le théorème de Marcinkiewicz (proposition 3.3). Or, on observe que ce théorème ne donne pas de résultat pour $p = 1$. En effet, il n'est pas possible de trouver $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ et $0 < \theta < 1$ tels que

$$1 = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Ainsi, la preuve utilisée au premier chapitre pour obtenir l'inégalité de Sobolev fractionnaire échoue pour $p = 1$.

On peut alors se demander s'il est possible de trouver une nouvelle démonstration à la proposition 3.2, valable dans le cas où $p = 1$, et ainsi obtenir l'inégalité de Sobolev fractionnaire attendue via une preuve similaire à celle du théorème 3.4. Le résultat suivant, issu de [10], montre que l'on ne peut pas espérer un tel résultat.

Proposition 3.5. *Soit $0 < s < n$. Alors, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que l'estimation*

$$\|I_s * f\|_{\frac{n}{n-s}} \leq C \|f\|_p$$

est vérifiée pour tout $f \in L^1$.

Démonstration. Supposons par contradiction la proposition 3.2 ce résultat vérifié. Alors, pour tout $0 < s < n$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$,

$$\|I_s * \rho_r\|_{\frac{n}{n-s}} \leq C \|\rho_r\|_1 = C, \quad (3.6)$$

pour les approximations de l'identité ρ_r . Puisque $I_s \in L^1_{\text{loc}}$, en passant à une sous-suite, la convolution $I_s * \rho_r$ converge ponctuellement presque partout vers I_s , pour r tendant vers 0 [16, théorème 4.3.9]. Ainsi, par le lemme de Fatou,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_s(x)|^{\frac{n}{n-s}} dx \right)^{\frac{n-s}{n}} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \|I_s * \rho_r\|_{\frac{n}{n-s}}.$$

Puisque I_s n'appartient pas à l'espace $L^{\frac{n}{n-s}}$, ceci contredit l'équation (3.6) et on en déduit le résultat souhaité. $\square$

3.2 Le cas $p = 1$

Comme constaté en fin de section 2.2, dans le cas où $p = 1$, il n'est pas possible d'appliquer la proposition 3.2 pour obtenir l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire. Cependant, un résultat analogue pour les champs de vecteurs existe en dimension $n \geq 2$, sur lequel nous pourrions nous reposer. Celui-ci fait apparaître le noyau de Riesz à valeur vectorielle, défini pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $0 < \alpha < n$ comme

$$\vec{I}_\alpha(x) := \frac{x}{|x|^{n-\alpha+1}}.$$

Nous consacrons donc cette section à la démonstration de l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire, dans le cas où $p = 1$. Nous nous sommes basés sur l'article de A. Schikorra, D. Spector et J. Van Schaftingen [10]. Celui-ci établit un résultat concernant la *transformée de Riesz à valeur vectorielle*, en dimension $n \geq 2$. La démonstration repose sur le fait que cet opérateur est à rotationnel nul. Comme mentionné dans [10],

il est possible d'adapter la preuve pour obtenir le résultat suivant pour tout champ de vecteur $\vec{f}$ également à rotationnel nul :

$$\|I_s * \vec{f}\|_{\frac{n}{n-s}} \leq \|\vec{f}\|_1.$$

En particulier, nous pourrions démontrer ce résultat pour le gradient fractionnaire, en vertu de la proposition 2.4. Via la formule de représentation obtenue au théorème 2.7 et de la même manière que dans le premier chapitre, nous serons alors en mesure d'obtenir l'inégalité de Sobolev souhaitée pour $p = 1$, en dimension $n \geq 2$. Afin d'éviter de nous éloigner de notre cadre de travail via un détour par l'analyse harmonique, nous énoncerons donc l'ensemble de nos résultats directement pour le gradient fractionnaire. Nous mentionnerons explicitement l'utilisation de l'hypothèse $n \geq 2$, quand celle-ci s'avérera utile. Le cas de la dimension 1, pour lequel l'estimation est fautive, sera abordé dans la section suivante.

Nous commençons par définir la transformée de Riesz. Comme mentionné précédemment, nous n'établissons pas un résultat concernant directement cet opérateur, mais celui-ci nous sera utile dans nos calculs. L'idée est que la transformée de Riesz nous permettra d'exprimer le noyau de Riesz à valeur vectorielle en terme du noyau de Riesz scalaire. Les résultats relatifs à ce sujet sont issus de [7, chapitre 4]. Nous mentionnons également certaines égalités faisant intervenir la transformée de Riesz sans le détail des démonstrations, afin d'éviter de nous éloigner de notre objectif. Nous émettons un bref commentaires sur la manière de prouver ces résultats lorsque ce sera le cas.

Définition 3.6. Soit $\psi \in C_c^\infty$. On définit la transformée de Riesz de ψ en $x \in \mathbb{R}^n$ comme

$$R\psi(x) = -c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla \psi(y)}{|x - y|^{n-1}} dy,$$

avec la constante c_n choisie de telle sorte que

$$\hat{R}\psi(\xi) = i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{\psi},$$

où $\hat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier.

Observons qu'en appliquant le théorème de la divergence, on obtient

$$R\psi(x) = c \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)} \frac{x - y}{|x - y|^{n+1}} \psi(y) dy,$$

ce qui correspond à la transformée de Fourier telle que définie dans [7, chapitre 4].

Comme mentionné dans la propriété suivante, cet opérateur préserve l'intégrabilité.

Proposition 3.7. Soient $1 < p < +\infty$. La transformée de Riesz est de type fort- (p, p) , c'est-à-dire, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\psi \in C_c^\infty$,

$$\|R\psi\|_p \leq C\|\psi\|_p.$$

Observons que puisque $\psi \in C_c^\infty$, $\psi \in L^p$. Alors, par densité de C_c^∞ dans L^p , R admet une unique extension linéaire continue de L^p vers L^p .

De plus, on a le lemme suivant.

Lemme 3.8. Soient $0 < s < 1$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^n} R\psi(I_s * \partial_1^s \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1^s \varphi(I_s * R\psi)$$

pour tout $\varphi, \psi \in C_c^\infty$.

Démonstration. Montrons que la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto |R\psi(x)| \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)|$$

est intégrable. Le résultat suit alors du théorème de Fubini. Soit $R > 0$. On calcule

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |R\psi(x)| \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |R\psi(x)| \int_{B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dy dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |R\psi(x)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dy dx. \end{aligned}$$

Par la proposition 2.2, $|\nabla^s \varphi|$ est borné sur $\mathbb{R}^n$ et donc,

$$\int_{B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dy \leq C_1 \int_{B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} dy.$$

Puisque $n - s < n$, il existe $p_1 > 1$ tel que $p_1(n - s) < n$ et donc, $\frac{1}{|x - y|^{p_1(n-s)}}$ est d'intégrale finie sur $B(x, R)$. De plus, puisque $\psi \in C_c^\infty$, $R\psi \in L^q$ pour tout $q > 1$ par la proposition 3.7. En prenant $q = p'_1$, on a alors, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{B(x, R)} |R\psi(x)| \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dy dx \leq C_1 \|R\psi\|_{p'_1} \left(\int_{B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{p_1(n-s)}} dy \right)^{\frac{1}{p_1}} < +\infty.$$

En dehors de la boule $B(x, R)$, on utilise l'estimation explicite pour le gradient fractionnaire donnée par la proposition 2.2. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| dy \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, R)} \frac{1}{|x - y|^{n-s}} \frac{1}{(1 + |y|)^{n+s}} dy$$

Puisque $2n > n$, on a $2p_2n > n$ pour tout $p_2 > 1$. Alors, on applique cette fois encore l'inégalité de Hölder pour déduire

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} |R\psi(x)| \frac{1}{|x-y|^{n-s}} |\partial_1^s \varphi(y)| \, dy \, dx \leq C_1 \|R\psi\|_{p'_2} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_r)} \frac{1}{|x-y|^{p_2(n-s)}} \, dy \right)^{\frac{1}{p_2}} < +\infty.$$

On en déduit la conclusion souhaitée. $\square$

On a également le résultat suivant, que nous acceptons sans preuve. Celui-ci peut se démontrer en utilisant le théorème de divergence.

Lemme 3.9. *Soit $\varphi \in C_c^\infty$. Alors, la transformée de Riesz admettant une extension sur L^p , on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi R(I_s * \nabla^s \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(I_s * \nabla^s \varphi)$$

pour tout $\psi \in C_c^\infty$.

L'essentiel du travail nécessaire à l'obtention de notre résultat principal consiste en fait à établir l'estimation suivante.

Proposition 3.10. *Soit $0 < s < 1$ et $n \geq 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $\psi, \varphi \in C_c^\infty$,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(x) (I_s * \partial_j^s \varphi)(x) \, dx \right| \leq C \|\nabla^s \varphi\|_1 \|\psi\|_{\frac{n}{s}}$$

Dans l'objectif de clarifier la démonstration de cette proposition, nous commençons par démontrer certains résultats préliminaires.

Lemme 3.11. *Soient $0 < s < 1$, $n \geq 2$ et $r > 0$. Il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left| I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) \right| \leq \frac{C'}{(r + |x|)^{n-s+1}}.$$

Démonstration. Calculons

$$\frac{d\rho_r}{dr}(x) = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^n} \rho\left(\frac{x}{r}\right) \right] = -\frac{n}{r^{n+1}} \rho\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{1}{r^n} \nabla \rho\left(\frac{x}{r}\right) \cdot \frac{x}{r^2}.$$

On traite d'abord le cas où $|x| \leq 2r$. Puisque ρ_r est à support dans $B(0, r)$, on a

$$\begin{aligned} \left| I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) \right| &= \frac{1}{r^{n+1}} \left| \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \left[n\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r} \right] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{r^{n+1}} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \left[n\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \left| \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \right| \right] dy. \end{aligned}$$

Puisque $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $r > 0$,

$$n\rho\left(\frac{y}{r}\right) + \left| \nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \right| \leq C_1.$$

Via le changement de variable $z = y - x$,

$$\left| I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) \right| \leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|y-x|^{n-s}} dy = \frac{C_1}{r^{n+1}} \int_{B(x,r)} \frac{1}{|z|^{n-s}} dz.$$

Alors, puisque $B(x, r) \subset B(0, 3r)$ et par intégration en coordonnées radiales,

$$\left| I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) \right| \leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \int_{B(0,3r)} \frac{1}{|z|^{n-s}} dz = \frac{\sigma_{n-1}C_1}{r^{n+1}} \int_0^{3r} t^{s-1} dt = \frac{C_2}{r^{n-s+1}},$$

où σ_{n-1} désigne l'aire de la sphère de dimension $n-1$ et $C_2 > 0$. Or, puisque $|x| \leq 2r$,

$$\frac{1}{r^{n-s+1}} = \frac{1}{r^{n-s+1}} \frac{(r+|x|)^{n-s+1}}{(r+|x|)^{n-s+1}} \leq \frac{1}{r^{n-s+1}} \frac{(3r)^{n-s+1}}{(r+|x|)^{n-s+1}} = \frac{3^{n-s+1}}{(r+|x|)^{n-s+1}}$$

et nous obtenons le résultat souhaité dans le cas où $|x| \leq 2r$.

Supposons maintenant $|x| > 2r$. Calculons que

$$\operatorname{div}(y\rho_r(y)) = -\frac{n}{r^n}\rho\left(\frac{y}{r}\right) - \frac{1}{r^{n+1}}\nabla\rho\left(\frac{y}{r}\right) \cdot \frac{y}{r} = -r\frac{d\rho_r}{dr}(y)$$

Nous avons donc

$$I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) = \int_{B(0,r)} \frac{\frac{d\rho_r}{dr}(y)}{|x-y|^{n-s}} dy = \frac{-1}{r} \int_{B(0,r)} \frac{\operatorname{div}(y\rho_r(y))}{|x-y|^{n-s}} dy.$$

Si $y \in \partial B(0, r)$, alors $\rho_r(y) = 0$ et donc, par le théorème de la divergence,

$$\int_{B(0,r)} \operatorname{div}\left(\frac{y\rho_r(y)}{|x-y|^{n-s}}\right) dy = 0.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{r} \int_{B(0,r)} \frac{\operatorname{div}(y\rho_r(y))}{|x-y|^{n-s}} dy = \frac{s-n}{r} \int_{B(0,r)} \frac{\frac{y}{r^n} \rho\left(\frac{y}{r}\right)}{|x-y|^{n-s+1}} \cdot \frac{x-y}{|x-y|} dy.$$

En procédant au changement de variable $w = \frac{y}{r}$ dans le membre de droite, nous avons alors

$$\left| I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x) \right| \leq C_2 \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x-rw|^{n-s+1}} dw$$

Montrons que

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x-rw|^{n-s+1}} dw \leq \frac{C_3}{(r+|x|)^{n-s+1}}. \quad (3.7)$$

On calcule

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x-rw|^{n-s+1}} dw \leq \frac{1}{|x|^{n-s+1}} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\left| \frac{x}{|x|} - \frac{rw}{|x|} \right|^{n-s+1}} dw.$$

L'intégrale apparaissant à la ligne précédente est bornée uniformément en x . En effet, puisque $r < \frac{|x|}{2}$, on a pour tout $w \in B(0,1)$,

$$\left| \frac{x}{|x|} - \frac{rw}{|x|} \right| \geq 1 - \frac{r}{|x|} |w| > \frac{1}{2}$$

et donc,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\left| \frac{x}{|x|} - \frac{rw}{|x|} \right|^{n-s+1}} dw \leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{1/2^{n-s+1}} dw < +\infty.$$

Finalement, en utilisant encore une fois le fait que $r < \frac{|x|}{2}$, on a

$$\frac{1}{|x|^{n-s+1}} = \frac{1}{|x|^{n-s+1}} \frac{(r+|x|)^{n-s+1}}{(r+|x|)^{n-s+1}} \leq \frac{1}{|x|^{n-s+1}} \frac{(3|x|/2)^{n-s+1}}{(r+|x|)^{n-s+1}} = \frac{C_4}{(r+|x|)^{n-s+1}},$$

où $C_4 > 0$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

De manière similaire, on montre le résultat suivant.

Lemme 3.12. *Soient $0 < s < 1$, $n \geq 2$ et $r > 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$|I_s * \partial_1 \rho_r(x)| \leq \frac{C}{(r+|x|)^{n-s+1}}$$

Démonstration. On calcule

$$\partial_1 \rho_r(x) = \frac{1}{r^{n+1}} \partial_1 \rho\left(\frac{x}{r}\right),$$

Si $|x| \leq 2r$,

$$|I_s * \partial_1 \rho_r(x)| = \frac{1}{r^{n+1}} \left| \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \partial_1 \rho\left(\frac{x}{r}\right) dy \right|.$$

Puisque $\nabla \rho\left(\frac{x}{r}\right)$ est borné par une constante $M > 0$ pour tout $r > 0$, on se retrouve dans la même situation qu'au lemme précédent, et on conclut de la même manière le cas $|x| \leq 2r$.

Supposons $|x| > 2r$. Pour e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\operatorname{div}(e_1 \rho_r(y)) = \partial_1 \rho_r(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} I_s * \partial_1 \rho_r(x) &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \partial_1 \rho_r(y) dy \\ &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \operatorname{div}(e_1 \rho_r(y)) dy. \end{aligned}$$

Alors, de la même manière qu'au lemme précédent, on utilise le fait que ρ_r s'annule sur $\partial B(0, r)$ et le théorème de la divergence pour écrire

$$\frac{1}{r} \int_{B(0,r)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}} \operatorname{div}(e_1 \rho_r(y)) dy = \frac{s-n}{r} \int_{B(0,r)} \frac{\frac{e_1}{r^n} \rho\left(\frac{y}{r}\right)}{|x-y|^{n-s+1}} \frac{x-y}{|x-y|} dy.$$

Via le changement de variable $w = \frac{y}{r}$, on déduit

$$|I_s * \partial_1 \rho_r(x)| \leq C \int_{B(0,1)} \frac{1}{|x-rw|^{n-s+1}} dw,$$

On déduit alors le résultat de l'équation (3.7). $\square$

Lemme 3.13. *Soient $0 < s < n$, $r > 0$ et $f \in L^{\frac{n}{s}}$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et $y_n \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|f(y)|}{(r + |x - y|)^{n-s+1}} dy' \leq C \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(y)|^{\frac{n}{s}} dy' \right)^{\frac{s}{n}}}{(r + |x_n - y_n|)^{2-\frac{s}{n}}}.$$

Démonstration. Observons que

$$\frac{1}{(r + |x - y|)^{n-s+1}} \in L^{\frac{1}{1-\frac{s}{n}}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

En effet, $r > 0$ et

$$\frac{n-s+1}{1-\frac{s}{n}} = \frac{n-s+1}{n-s} n = n + \frac{n}{n-s} > n-1.$$

Puisque $f \in L^{\frac{n}{s}}$, par l'inégalité de Hölder, on a alors pour tout $y_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|f(y)|}{(r + |x - y|)^{n-s+1}} dy' \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f(y)|^{\frac{n}{s}} dy' \right)^{\frac{s}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(r + |x - y|)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' \right)^{1-\frac{s}{n}} \\ & = C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r + \sqrt{|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' \right)^{1-\frac{s}{n}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Montrons qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r + \sqrt{|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' \leq \frac{C_2}{(r + |x_n - y_n|)^{\frac{2n-s}{n-s}}}. \quad (3.9)$$

Observons que

$$\begin{aligned} (|x' - y'| + |x_n - y_n|)^2 & \leq (2 \max\{|x' - y'|, |x_n - y_n|\})^2 \\ & \leq 4(|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2). \end{aligned}$$

Alors,

$$r + |x' - y'| + |x_n - y_n| \leq 2 \left(r + \sqrt{|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2} \right).$$

Ainsi, on a pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r + \sqrt{|x' - y'|^2 + |x_n - y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C_3}{(r + |x' - y'| + |x_n - y_n|)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' \\ & = \frac{C_3}{(r + |x_n - y_n|)^{n+\frac{n}{n-s}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x' - y'|}{r + |x_n - y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy'. \end{aligned}$$

Via le changement de variable $z' = \frac{x'-y'}{r+|x_n-y_n|}$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x'-y'|}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' = (r+|x_n-y_n|)^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{(1+|z'|)^{n+\frac{n}{n-s}}} dz'$$

De plus, par intégration en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{|x'-y'|}{r+|x_n-y_n|}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' = \sigma_{n-1} (r+|x_n-y_n|)^{n-1} \int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(1+t)^{n+\frac{n}{n-s}}} dt$$

Or,

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-2}}{(1+t)^{n+\frac{n}{n-s}}} dt \leq \int_0^1 t^{n-2} dt + \int_1^\infty \frac{t^{n-2}}{t^{n+\frac{n}{n-s}}} dt \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^{2+\frac{n}{n-s}}} dt < +\infty.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{\left(r + \sqrt{|x'-y'|^2 + |x_n-y_n|^2}\right)^{n+\frac{n}{n-s}}} dy' &\leq C_4 \frac{(r+|x_n-y_n|)^{n-1}}{(r+|x_n-y_n|)^{n+\frac{n}{n-s}}} \\ &= \frac{C_4}{(r+|x_n-y_n|)^{\frac{2n-s}{n-s}}}, \end{aligned}$$

où $C_4 > 0$, ce qui démontre l'estimation (3.9). Ainsi, en revenant à l'équation (3.8), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|f(y)|}{(r+|x-y|)^{n-s+1}} dy' \leq C \left(\frac{1}{(r+|x_n-y_n|)^{\frac{2n-s}{n-s}}} \right)^{1-\frac{s}{n}} = \frac{C}{(r+|x_n-y_n|)^{2-\frac{s}{n}}},$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Rappelons que la fonction maximale de Hardy-Littlewood [7] est définie pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ comme

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t)| dt.$$

Alors, on a l'estimation suivante.

Lemme 3.14. *Soit $\alpha > 1$. Alors, il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > 0$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable et continue,*

$$\int_0^\infty \frac{f(y)}{(r+y)^\alpha} dy \leq Cr^{1-\alpha} \mathcal{M}f(0).$$

Démonstration. Commençons par supposer f continue. Via une intégration par parties, observons que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f(y)}{(r+y)^\alpha} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\int_0^y f(t) dt}{(r+y)^\alpha} \right) - \int_0^y f(t) dt \left(\frac{-\alpha}{(r+y)^{\alpha+1}} \right).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{f(y)}{(r+y)^\alpha} dy &= \int_0^\infty \frac{d}{dy} \left(\frac{\int_0^y f(t) dt}{(r+y)^\alpha} \right) dy + \alpha \int_0^\infty \frac{1}{(r+y)^{\alpha+1}} \left(\int_0^y f(t) dt \right) dy \\ &= \alpha \int_0^\infty \frac{y}{(r+y)^{\alpha+1}} \left(\int_0^y f(t) dt \right) dy \leq 2\alpha \mathcal{M}f(0) \int_0^\infty \frac{y}{(r+y)^{\alpha+1}} dy. \end{aligned}$$

Via le changement de variable $y = rx$, on a

$$\int_0^\infty \frac{y}{(r+y)^{\alpha+1}} dy = r^{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} dx = r^{1-\alpha} C$$

où $C > 0$, puisque $\alpha > 1$. On déduit le résultat attendu pour les fonctions continues.

Soit f une fonction localement intégrable et positive. On applique alors la première partie de la preuve à une suite de convolutions $\rho_r * f$, où $r > 0$, et on a

$$\int_0^\infty \frac{(\rho_r * f)(y)}{(r+y)^\alpha} dy \leq Cr^{1-\alpha} \mathcal{M}(\rho_r * f)(0).$$

pour tout $r > 0$. Nous utilisons le fait que la convolution décroît la fonction maximale de Hardy-Littlewood. Plus précisément, on a

$$\mathcal{M}(\rho_r * f)(0) \leq \mathcal{M}f(0)$$

pour tout $r > 0$. Ceci se démontre par un calcul explicite. Puisque f est localement intégrable, en passant à une sous-suite, $\rho_r * f$ converge ponctuellement presque partout vers f [16, proposition 4.3.9]. On applique alors le lemme de Fatou pour obtenir

$$\int_0^\infty \frac{f(y)}{(r+y)^\alpha} dy \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{(\rho_r * f)(y)}{(r+y)^\alpha} dy \leq Cr^{1-\alpha} \mathcal{M}f(0),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Corollaire 3.15. Soient $0 < s < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(y)|}{(r + |a - y|)^{2 - \frac{s}{n}}} dy \leq \frac{C}{r^{1 - \frac{s}{n}}} \mathcal{M}f(a).$$

Démonstration. Via le changement de variable $y = a - x$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(y)|}{(r + |a - y|)^{2-\frac{s}{n}}} dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(a - x)|}{(r + |x|)^{2-\frac{s}{n}}} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{|f(a - x)|}{(r + x)^{2-\frac{s}{n}}} dx + \int_0^\infty \frac{|f(a + x)|}{(r + x)^{2-\frac{s}{n}}} dx \end{aligned}$$

Définissons $f_1(x) = f(a - x)$ et $f_2(x) = f(a + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, en appliquant le lemme 3.14 à f_1 et f_2 pour $\alpha = 2 - \frac{s}{n}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(y)|}{(r + |a - y|)^{2-\frac{s}{n}}} dx &= \int_0^\infty \frac{|f_1(x)|}{(r + x)^{2-\frac{s}{n}}} dx + \int_0^\infty \frac{|f_2(-x)|}{(r + x)^{2-\frac{s}{n}}} dy \\ &\leq Cr^{\frac{s}{n}-1} \mathcal{M}f_1(0) + Cr^{\frac{s}{n}-1} \mathcal{M}f_2(0) = 2Cr^{\frac{s}{n}-1} \mathcal{M}f(a), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit le résultat attendu. $\square$

Nous sommes alors en mesure d'établir l'estimation annoncée à la proposition 3.10. Pour ce faire, nous utiliserons la notation suivante pour tout $r > 0$:

$$\psi_r := \rho_r * \psi.$$

où les ρ_r désignent les approximations de l'identité définies dans le premier chapitre. Alors,

$$R\psi_r := \rho_r * R\psi,$$

Démonstration de la proposition 3.10. On souhaite montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(x) (I_s * \partial_j^s \varphi)(x) dx \right| \leq C \|\nabla^s \varphi\|_1 \|\psi\|_{\frac{n}{s}}.$$

Nous démontrons le résultat dans le cas où $j = 1$. La preuve est similaire pour les autres indices. Observons que par le lemme 3.8,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(x) (I_s * \partial_1^s \varphi)(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1^s \varphi(x) (I_s * R\psi)(x) dx \right|$$

On note $x = (x', x_n)$, avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi)(x', x_n) dx' \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) [(I_s * R\psi)(x', x_n) - (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n)] dx' \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) dx' \right|. \quad (3.10) \end{aligned}$$

On borne séparément les deux intégrales apparaissant dans la somme précédente, que l'on note respectivement

$$A := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) [(I_s * R\psi)(x', x_n) - (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n)] dx'$$

et

$$B := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) dx'.$$

Travaillons d'abord sur A . On a

$$|A| \leq \|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \|(I_s * R\psi)(\cdot, x_n) - (I_s * R\psi_\varepsilon)(\cdot, x_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (3.11)$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$I_s * R\psi_r = \rho_r * I_s * R\psi.$$

Alors, le théorème fondamental de l'analyse implique

$$\begin{aligned} (I_s * R\psi_\varepsilon)(x) - (I_s * R\psi_\delta)(x) &= \int_\delta^\varepsilon \frac{d}{dr} (I_s * R\psi_r)(x) dr \\ &= \int_\delta^\varepsilon \frac{d}{dr} (\rho_r * I_s * R\psi)(x) dr. \end{aligned}$$

De plus, observons que $I_s * R\psi \in L_{\text{loc}}^1$. Alors pour tout $r > 0$, $\rho_r * \vec{I}_s * R\psi$ est différentiable puisque $\rho_r \in C_c^\infty$ l'est [16, proposition 4.3.6] et

$$\frac{d}{dr} (\rho_r * I_s * R\psi) = \frac{d\rho_r}{dr} * (I_s * R\psi).$$

On a alors pour tout $0 < \delta < \varepsilon$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(I_s * R\psi_\varepsilon)(x) - (I_s * R\psi_\delta)(x) = \int_\delta^\varepsilon \left[\frac{d\rho_r}{dr} * (I_s * R\psi) \right](x) dr \quad (3.12)$$

$$= \int_\delta^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\rho_r}{dr}(x-y) (I_s * R\psi)(y) dy dr. \quad (3.13)$$

D'autre part, le théorème de Fubini permet d'obtenir pour tout $r > 0$,

$$(I_s * R\psi_\varepsilon)(x) - (I_s * R\psi_\delta)(x) = \int_\delta^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left(I_s * \frac{d\rho_r}{dr} \right)(x-y) R\psi(y) dy dr. \quad (3.14)$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient alors, par le théorème de convergence dominée,

$$(I_s * R\psi_\varepsilon)(x) - (I_s * R\psi)(x) = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} I_s * \frac{d\rho_r}{dr}(x-y) R\psi(y) dy dr.$$

Le lemme 3.11 permet de déduire que pour tout $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |(I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) - (I_s * R\psi)(x', x_n)| &\leq C_5 \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|R\psi(y)|}{(r + |x - y|)^{n-s+1}} dy dr \\ &= C_5 \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|R\psi(y', y_n)|}{(r + |(x', x_n) - (y', y_n)|)^{n-s+1}} dy' \right) dy_n dr. \end{aligned}$$

Pour $y_n \in \mathbb{R}$,   finissons la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ comme

$$\phi(y_n) = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |R\psi(y', y_n)|^{\frac{n}{s}} dy' \right)^{\frac{s}{n}}. \quad (3.15)$$

Puisque $\psi \in C_c^\infty$, $\psi \in L^{\frac{n}{s}}$. Par la proposition 3.7, on a également $R\psi \in L^{\frac{n}{s}}$. Alors, par le lemme 3.13 appliqué à $f = R\psi$, on a l'existence de $C_6 > 0$ tel que pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|R\psi(y', y_n)|}{(r + |(x', x_n) - (y', y_n)|)^{n-s+1}} dy' \leq C_6 \frac{|\phi(y_n)|}{(r + |x_n - y_n|)^{2-\frac{s}{n}}}.$$

Ainsi,

$$\|(I_s * R\psi)(\cdot, x_n) - (I_s * R\psi_\varepsilon)(\cdot, x_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_7 \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{|\phi(y_n)|}{(r + |x_n - y_n|)^{2-\frac{s}{n}}} dy_n dr,$$

ou   $C_7 > 0$. Le corollaire 3.15 appliqué à $a = x_n$ et $f = \phi$ nous permet alors d'obtenir,

$$\begin{aligned} \|(I_s * R\psi)(\cdot, x_n) - (I_s * R\psi_\varepsilon)(\cdot, x_n)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} &\leq C_8 \int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{1-\frac{s}{n}}} \mathcal{M}\phi(x_n) dr \\ &= C_8 \varepsilon^{\frac{s}{n}} \mathcal{M}\phi(x_n). \end{aligned}$$

Ainsi, en revenant à l'équation (3.11),

$$|A| \leq C_8 \|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \varepsilon^{\frac{s}{n}} \mathcal{M}\phi(x_n).$$

On cherche maintenant à borner $B = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) dx'$. Par la proposition 2.2,

$$|\partial_1^s \varphi(x)| \leq \frac{C_9}{(1 + |x|)^{n+s}}.$$

Alors, par le théorème fondamental de l'analyse on a

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) dx' = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n}^\infty \partial_n \partial_1^s \varphi(x', t) (I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n) dt dx'.$$

Nous utilisons maintenant le fait que le gradient fractionnaire est à rotationnel nul (proposition 2.4), et donc,

$$\partial_n \partial_1^s \varphi = \partial_1 \partial_n^s \varphi.$$

Puisque ρ_ϵ est à support compact et que I_s est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^n$, on a, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n}^{\infty} \partial_n \partial_1^s \varphi(x', t) (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) dt dx' \\ = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n}^{\infty} \partial_1 \partial_n^s \varphi(x', t) (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) dt dx' \\ = \int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1 \partial_n^s \varphi(x', t) (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) dx' dt. \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 2$, l'intégrale sur $\mathbb{R}^{n-1}$ apparaissant à la ligne précédente est non triviale et nous pouvons donc intégrer par partie selon la variable x_1 pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1 \partial_n^s \varphi(x', t) (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) dx' dt \\ = \int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_n^s \varphi(x', t) \partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) dx' dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |B| &\leq \int_{x_n}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_n^s \varphi(x', t)| |\partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n)| dx' dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\partial_n^s \varphi(x', t)| dx' dt \right) \sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |\partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n)| \\ &\leq \|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sup_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |\partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n)|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

D'autre part,

$$\partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) = \partial_1 [(\rho_\epsilon * I_s) * R\psi](x', x_n).$$

Alors, par dérivation sous le signe intégral et par le théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_1 (I_s * R\psi_\epsilon)(x', x_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 [(\rho_\epsilon * I_s) * R\psi](x', x_n) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 \rho_\epsilon(y) (I_s * R\psi)(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (I_s * \partial_1 \rho_\epsilon)(x - y) R\psi(y) dy. \end{aligned}$$

Par le lemme 3.12, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

$$|I_s * \partial_1 \rho_\epsilon(x - y)| \leq \frac{C_{10}}{(\epsilon + |x - y|)^{n-s+1}}.$$

En utilisant le lemme 3.13, nous avons alors, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} |\partial_1(I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n)| &\leq C_{10} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|R\psi(y)|}{(\varepsilon + |x - y|)^{n-s+1}} dy' dy_n \\ &\leq C_{11} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(y_n)}{(\varepsilon + |x_n - y_n|)^{2-\frac{s}{n}}} dy_n, \end{aligned}$$

où ϕ est définie par l'équation (3.15). En appliquant le corollaire 3.15 à $a = x_n$ et $r = \varepsilon$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{R\phi(y_n)}{(\varepsilon + |x_n - y_n|)^{2-\frac{s}{n}}} dy_n \leq C_{12} \frac{\mathcal{M}\phi(x_n)}{\varepsilon^{1-\frac{s}{n}}}.$$

Ainsi,

$$|\partial_1(I_s * R\psi_\varepsilon)(x', x_n)| \leq \frac{C_{13}}{\varepsilon^{1-\frac{s}{n}}} \mathcal{M}\phi(x_n).$$

Finalement, en revenant à l'équation (3.16),

$$|B| \leq C_{14} \|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\varepsilon^{1-\frac{s}{n}}} \mathcal{M}\phi(x_n).$$

Ainsi, en combinant l'équation (3.10) avec nos estimations pour A et B , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi)(x', x_n) dx' \right| \\ \leq \mathcal{M}\phi(x_n) \left(C_8 \|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \varepsilon^{\frac{s}{n}} + C_{14} \|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\varepsilon^{1-\frac{s}{n}}} \right). \end{aligned}$$

Si $\|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} = 0$, alors $\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R}^{n-1}$, et le membre de gauche de l'équation précédente également. On choisit alors $\varepsilon = 1$. Sinon, on pose

$$\varepsilon = \frac{\|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}}.$$

On obtient alors dans les deux cas,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi)(x', x_n) dx' \right| \leq C_{15} \mathcal{M}\phi(x_n) \|\nabla_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1-\frac{s}{n}} \|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{n}}.$$

On intègre selon x_n de chaque côté de l'équation, et par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1^s \varphi(x) (I_s * R\psi)(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_1^s \varphi(x', x_n) (I_s * R\psi)(x', x_n) dx' \right| dx_n \\ &\leq C_{15} \|\partial_n^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{s}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\partial_1^s \varphi(\cdot, x_n)\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} dx_n \right)^{1-\frac{s}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\phi(x_n)^{\frac{n}{s}} dx_n \right)^{\frac{s}{n}} \\ &= C_{15} \|\nabla^s \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\phi(x_n)^{\frac{n}{s}} dx_n \right)^{\frac{s}{n}}. \end{aligned}$$

De plus, on sait par [7, théorème 2.5] que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est de type fort- (p, p) pour $1 < p \leq +\infty$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}\phi(x_n)^{\frac{n}{s}} dx_n \leq C_{16} \int_{\mathbb{R}} \phi(x_n)^{\frac{n}{s}} dx_n = C_{16} \int_{\mathbb{R}^n} |R\psi(x)|^{\frac{n}{s}} dx.$$

D'autre part, on sait par la proposition 3.7, que la transformée de Riesz est de type fort- (p, p) , et donc $\|R\psi\|_{\frac{n}{s}} \leq C_{17} \|\psi\|_{\frac{n}{s}}$. On obtient finalement l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(x) (I_s * \partial_1^s \varphi)(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1^s \varphi(x) (\vec{I}_s * \psi)(x) dx \right| \leq C' \|\nabla^s \varphi\|_1 \|\psi\|_{\frac{n}{s}},$$

ce qui est le résultat souhaité. $\square$

Nous introduisons une dernière proposition sans démonstration. Ce résultat peut se vérifier directement par calcul intégral ou par transformée de Fourier.

Proposition 3.16. *Soient $0 < s < n$, $1 < p < \infty$ et $f \in L^p$. Alors, la transformée de Riesz admettant une extension sur L^p , on a*

$$\vec{I}_s * f = R(I_s * f).$$

Nous sommes alors en mesure d'établir l'inégalité de Sobolev fractionnaire attendue pour $p = 1$. Afin d'alléger les notations, nous définissons le produit de convolution entre deux champs de vecteurs $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme

$$(\vec{f} * \vec{g})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{f}(x - y) \cdot \vec{g}(y) dy$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, la formule de représentation obtenue au théorème 2.7 peut se réécrire comme

$$\varphi = A_{n,s}(\vec{I}_s * \nabla^s \varphi). \quad (3.17)$$

On obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 3.17. Soit $0 < s < 1$ et $n \geq 2$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in C_c^\infty$,

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-s}} \leq C \|\nabla^s \varphi\|_1.$$

Démonstration. L'équation (3.17) nous permet d'écrire

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-s}} = A_{n,s} \|\vec{I}_s * \nabla^s \varphi\|_{\frac{n}{n-s}}.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire et par la proposition 3.16 appliqué à $f = \partial_j^s \varphi$,

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-s}} \leq A_{n,s} \sum_{j=1}^n \|\vec{I}_s * \partial_j^s \varphi\|_{\frac{n}{n-s}} = A_{n,s} \sum_{j=1}^n \|R(I_s * \partial_j^s \varphi)\|_{\frac{n}{n-s}}.$$

De plus, en considérant l'espace $L^{\frac{n}{n-s}}$ en tant que dual de l'espace $L^{\frac{n}{s}}$, on a

$$\sum_{j=1}^n \|R(I_s * \partial_j^s \varphi)\|_{\frac{n}{n-s}} = \sum_{j=1}^n \sup_{\|\psi\|_{\frac{n}{s}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (R(I_s * \nabla_j^s \varphi))(x) dx.$$

Par densité des fonction de classe lisses à support compact dans $L^{\frac{n}{s}}$ et en appliquant le lemme 3.9, on obtient

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\frac{n}{n-s}} &\leq A_{n,s} \sum_{j=1}^n \sup_{\|\psi\|_{\frac{n}{s}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (R(I_s * \nabla_j^s \varphi))(x) dx \\ &= A_{n,s} \sum_{j=1}^n \sup_{\substack{\|\psi\|_{\frac{n}{s}}=1 \\ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (R(I_s * \nabla_j^s \varphi))(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \sup_{\substack{\|\psi\|_{\frac{n}{s}}=1 \\ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}} \int_{\mathbb{R}^n} R\psi(x) (I_s * \nabla_j^s \varphi)(x) dx \end{aligned}$$

Finalement, la proposition 3.10 nous donne

$$\|\varphi\|_{\frac{n}{n-s}} \leq C' A_{n,s} \sum_{j=1}^n \sup_{\substack{\|\psi\|_{\frac{n}{s}}=1 \\ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}} \|\nabla^s \varphi\|_1 \|\psi\|_{\frac{n}{s}} = C \|\nabla^s \varphi\|_1,$$

ce qui conclut notre démonstration. □

3.3 Contre-exemple à l'inégalité de Sobolev fractionnaire en dimension 1

Comme mentionné dans la section précédente, l'inégalité fractionnaire obtenue pour $p = 1$ au théorème 3.17 n'est valable qu'en dimension $n \geq 2$. Nous avons observé que cette hypothèse intervenait notamment dans la preuve de la proposition 3.10. Nous terminons ce chapitre par un contre-exemple montrant que l'inégalité de Sobolev fractionnaire obtenue au théorème 3.17 est fautive en dimension 1. Nous nous inspirons du contre-exemple au résultat obtenu par Schikorra, Spector et Van Schaftingen dans [10], présenté dans ce même article. Dans ce contexte, nous préférons la notation $\frac{d^s}{dx^s}$ pour désigner le gradient fractionnaire ∇^s . On écrira également $\text{sgn}(x)$ plutôt que $\frac{x}{|x|}$. On souhaite donc prouver le théorème suivant.

Théorème 3.18. *Soit $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. L'estimation*

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{1-s}} \leq C \left\| \frac{d^s \varphi}{dx^s} \right\|_1, \quad (3.18)$$

où $C > 0$ ne dépend pas de φ , ne tient pas.

De façon similaire au contre-exemple obtenu à la proposition 3.5, l'objectif est de trouver une famille adéquate de fonctions φ_r , telle que le membre de droite de l'inégalité est borné uniformément en r , tandis que le membre de gauche est non borné pour $r \rightarrow 0$.

Nous commençons par quelques calculs préliminaires.

Lemme 3.19. *Soient $0 < s < 1$, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\frac{d^s}{dx^s}(f * g) = \frac{d^s f}{dx^s} * g.$$

Démonstration. Puisque $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $(f * g) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et donc la dérivée fractionnaire $\frac{d^s}{dx^s}(f * g)(x)$ est bien définie. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(f * g)(x) - (f * g)(w)}{|x - w|^{1+s}} \text{sgn}(x - w) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f(w - y)g(y) dy}{|x - w|^{1+s}} \text{sgn}(x - w) dw. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on a alors

$$\frac{d^s}{dx^s}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x - y)g(y) - f(w - y)g(y)}{|x - w|^{1+s}} \text{sgn}(x - w) dw dy.$$

Via le changement de variable $w = y + z$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y) - f(z)}{|x-y-z|^{1+s}} \operatorname{sgn}(x-y-z) \, dz \right) g(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s f}{dx^s}(x-y) g(y) \, dy = \left(\frac{d^s f}{dx^s} * g \right)(x). \end{aligned} \quad \square$$

La formule de représentation nous permet alors d'obtenir l'identité suivante.

Proposition 3.20. *Soient $0 < s < 1$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\frac{d^s}{dx^s}(\varphi * \vec{I}_s) = -\varphi.$$

Démonstration. Par le lemme 3.19 nous avons

$$\frac{d^s}{dx^s}(\varphi * \vec{I}_s) = \frac{d^s \varphi}{dx^s} * \vec{I}_s.$$

On calcule alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s}(\varphi * \vec{I}_s)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dx^s} \varphi(x-y) \vec{I}_s(y) \, dy = - \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dy^s} \varphi(x-y) \vec{I}_s(y) \, dy \\ &= - \left(\frac{d^s \varphi}{dy^s} * \vec{I}_s \right)(x). \end{aligned}$$

La formule de représentation nous donne le résultat souhaité. $\square$

On pourrait alors tenter d'évaluer l'équation (3.18) en $\varphi = \rho_r * \vec{I}_s$. Comme le suggère la proposition précédente, le membre de droite de l'équation (3.18) vaudrait alors 1 pour tout r . Par le lemme de Fatou on aurait pour le membre de gauche, en faisant tendre r vers 0,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} \, dx \right)^{1-s} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\vec{I}_s(x)|^{\frac{1}{1-s}} \, dx \right)^{1-s} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \|I_s * \rho_r\|_{\frac{1}{1-s}},$$

qui est clairement non borné. Le problème est que la convolution $\rho_r * \vec{I}_s$ n'est pas à support compact. Il nous faudra donc considérer une certaine correction à cette famille de convolutions.

Considérons $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Le produit $\vec{I}_s \psi$ est encore à support compact et donc,

$$\varphi * (\vec{I}_s \psi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Nous introduisons quelques outils de calcul supplémentaires. La dérivée fractionnaire ne vérifie pas la formule de dérivation de Leibniz. Cependant, on a le résultat suivant.

Proposition 3.21. Soient $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d^s}{dx^s}(\varphi\psi)(x) = \frac{d^s\varphi}{dx^s}(x)\psi(x) + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|^{s+1}} \operatorname{sgn}(x - y) dy.$$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s}(\varphi\psi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)\psi(x) - \varphi(y)\psi(y)}{|x - y|^{s+1}} \operatorname{sgn}(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(x) [\varphi(x) - \varphi(y)] + \varphi(y) [\psi(x) - \psi(y)]}{|x - y|^{s+1}} \operatorname{sgn}(x - y) dy \\ &= \frac{d^s\varphi}{dx^s}(x)\psi(x) + \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|^{s+1}} \operatorname{sgn}(x - y) dy. \end{aligned} \quad \square$$

Définissons pour tout $r > 0$, $\psi_r(x) = \psi(rx)$. Pour tout $r > 0$, $\psi_r \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. L'essentiel du travail nécessaire à l'obtention de notre contre-exemple consiste alors à établir l'estimation suivante.

Proposition 3.22. Soient $r > 0$ et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $\operatorname{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$. Il existe une constante $C > 0$, ne dépendant pas de r , telle que

$$\left\| \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)] \right\|_1 \leq C \|\varphi\|_1$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration. Par le lemme 3.19, nous avons

$$\frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)] = \frac{d^s\varphi}{dx^s} * (\vec{I}_s \psi_r).$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)](x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dx^s} \varphi(x - y) (\vec{I}_s \psi_r)(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dy^s} \varphi(x - y) \psi_r(y) \vec{I}_s(y) dy. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(x - y)$. Via la formule de dérivation fractionnaire du produit, on calcule alors

$$\frac{d^s \tilde{\varphi}}{dy^s}(y) \psi_r(y) = \frac{d^s}{dy^s} (\tilde{\varphi} \psi_r)(y) - \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(z) \frac{\psi_r(y) - \psi_r(z)}{|y - z|^{s+1}} \operatorname{sgn}(y - z) dz.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)](x) \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dy^s} (\tilde{\varphi} \psi_r)(y) \vec{I}_s(y) dy + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(z) \frac{\psi_r(y) - \psi_r(z)}{|y - z|^{s+1}} \operatorname{sgn}(y - z) \vec{I}_s(y) dz dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{d^s}{dy^s} (\tilde{\varphi} \psi_r)(y) \vec{I}_s(-y) dy + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(z) \frac{\psi_r(y) - \psi_r(z)}{|y - z|^{s+1}} \operatorname{sgn}(y - z) \vec{I}_s(y) dz dy,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le noyau $\vec{I}_s$ est impair. On reconnait alors dans le premier terme la convolution de $\frac{d^s}{dy^s} (\tilde{\varphi} \psi_r)$ avec $\vec{I}_s$, évaluée en 0. Par la formule de représentation, on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)](x) &= \tilde{\varphi}(0) \psi(0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(z) \frac{\psi_r(y) - \psi_r(z)}{|y - z|^{s+1}} \operatorname{sgn}(y - z) \vec{I}_s(y) dz dy \\
&= \varphi(x) \psi(0) + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - z) \frac{\psi_r(y) - \psi_r(z)}{|y - z|^{s+1}} \operatorname{sgn}(y - z) \vec{I}_s(y) dz dy.
\end{aligned}$$

On évalue alors la norme L^1 des deux membres de l'équation et on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)](x) \right| dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx \right) |\psi(0)| + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x - z)| dx \right) \frac{|\psi_r(y) - \psi_r(z)|}{|y - z|^{s+1}} \frac{1}{|y|^{1-s}} dz dy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx \right) |\psi(0)| + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx \right) \frac{|\psi_r(y) - \psi_r(z)|}{|y - z|^{s+1}} \frac{1}{|y|^{1-s}} dz dy.
\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)] \right\|_1 \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx \right) \left(|\psi(0)| + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi_r(y) - \psi_r(z)|}{|y - z|^{s+1}} \frac{1}{|y|^{1-s}} dz dy \right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Pour conclure, il nous reste à montrer que l'intégrale

$$A_r := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi_r(y) - \psi_r(z)|}{|y - z|^{s+1}} \frac{1}{|y|^{1-s}} dy dz$$

est uniformément bornée par rapport à la variable r . Via les changements de variable

$t = ry$ et $w = rz$, on a

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{\left|\frac{t}{r} - \frac{w}{r}\right|^{s+1}} \frac{r^{1-s}}{|t|^{1-s}} dt dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{|t - w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw. \end{aligned}$$

Traisons d'abord le cas où $|t - w| \leq 1$. Puisque $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$, observons que si $|t| > 2$, alors on doit avoir $|w| \leq 1$ pour que l'intégrale ci-dessus ne s'annule pas. Or, ce cas est exclu par notre hypothèse $|t - w| \leq 1$. On peut donc supposer $|t| \leq 2$.

Posons $C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|$. Puisque $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ψ est lipschitzienne et donc,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{|t - w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw &\leq C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|t - w|}{|t - w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t - w|^s} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw. \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t - w|^s} dw &= \int_{t-1}^{t+1} \frac{1}{|w - t|^s} dw = 2 \int_t^{t+1} \frac{1}{(w - t)^s} dw \\ &= \frac{2}{1-s} \left[(w - t)^{1-s} \right]_t^{t+1} = \frac{2}{1-s}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t - w|^s} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw = \frac{2}{1-s} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt < +\infty.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$A_r = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{|t - w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw.$$

Puisque $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$, on peut cette fois encore supposer que l'on n'a pas simultanément $|t| \geq 1$ et $|w| \geq 1$. Alors, par symétrie et puisque le quotient $\frac{1}{|t-w|^{s+1}}$ est maximal lorsque t et w sont de même signe, il est suffisant de montrer que les intégrales

$$A := \int_2^{+\infty} \int_0^1 \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{|t - w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw$$

et

$$B := \int_0^1 \int_2^{+\infty} \frac{1}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw$$

sont finies. Considérons l'intégrale A . On pose $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} \psi(x)$. Alors

$$\int_2^{+\infty} \int_0^1 \frac{|\psi(t) - \psi(w)|}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw \leq 2M \int_2^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw.$$

Pour $0 \leq t \leq 1$, on calcule

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{|t-w|^{s+1}} dw = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(w-t)^{s+1}} dw = \frac{s}{(2-t)^s} \leq s.$$

Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} \int_0^1 \frac{1}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw \leq s \int_0^1 \frac{1}{|t|^{1-s}} dt < +\infty.$$

On traite maintenant le cas de l'intégrale B . Comme précédemment,

$$B \leq 2M \int_0^1 \int_2^{+\infty} \frac{1}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw.$$

On calcule pour $2 \leq t < +\infty$,

$$\int_0^1 \frac{1}{|t-w|^{s+1}} dw \leq \int_0^1 \frac{1}{(t-1)^{s+1}} dw = \frac{1}{(t-1)^{s+1}}.$$

En utilisant le fait que $\frac{t}{2} \geq 1$, on a alors

$$\frac{1}{(t-1)^{s+1}} \leq \frac{1}{(t-t/2)^{s+1}} = \frac{2^{s+1}}{t^{s+1}}.$$

Alors,

$$\int_0^1 \int_2^{+\infty} \frac{1}{|t-w|^{s+1}} \frac{1}{|t|^{1-s}} dt dw \leq 2^{s+1} \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty.$$

Ainsi, l'intégrale A_r est bornée par une constante $C > 0$ indépendante de r , ce qui, en revenant à l'équation (3.19) nous donne

$$\left\| \frac{d^s}{dx^s} [\varphi * (\vec{I}_s \psi_r)] \right\|_1 \leq \|\varphi\|_1 (|\psi(0)| + C).$$

Ceci conclut la preuve de la proposition. □

Considérons maintenant les approximations de l'identité ρ_r et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\text{supp}(\psi) \subset [-1, 1]$ et $\psi(0) = 1$. En prenant la famille de fonctions $\varphi_r := \rho_r * (\vec{I}_s \psi_r)$, nous sommes alors en mesure de démontrer le théorème 3.18.

Démonstration du théorème 3.18. Supposons par contradiction qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{1-s}} \leq C \left\| \frac{d^s \varphi}{dx^s} \right\|_1$$

soit vérifiée. Pour tout $r > 0$, par la proposition 3.22, on aurait

$$\|\rho_r * (\vec{I}_s \psi_r)\|_{\frac{1}{1-s}} \leq C \left\| \frac{d^s}{dx^s} [\rho_r * (\vec{I}_s \psi_r)] \right\|_1 \leq \tilde{C} \|\rho_r\|_1 = \tilde{C}.$$

Or puisque $\psi(0) = 1$, $\rho_r * (\vec{I}_s \psi_r)$ converge ponctuellement vers $\vec{I}_s$ pour r tendant vers 0. Par le lemme de Fatou, on aurait alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|} dx \right)^{1-s} = \|\vec{I}_s\|_{\frac{1}{1-s}} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \|\rho_r * (\vec{I}_s \psi_r)\|_{\frac{1}{1-s}} \leq \tilde{C}.$$

Puisque le membre de gauche de cette inégalité est infini, on obtient une contradiction, d'où nous déduisons le résultat souhaité. $\square$

Conclusion

À travers ce travail, nous avons pu obtenir l'inégalité de Sobolev pour la semi-norme de Gagliardo,

$$\|u\|_{p^*} \leq C[u]_{s,p},$$

lorsque $sp < n$, ainsi qu'un résultat analogue pour le gradient fractionnaire $\nabla^s \varphi$,

$$\|\varphi\|_{p_s^*} \leq C\|\nabla^s \varphi\|_p,$$

pour tous p et n non simultanément égaux à 1.

Nous avons débuté le chapitre 1 par l'étude de l'inégalité de Sobolev dans le cadre des espaces de Sobolev usuels. L'introduction des espaces de Sobolev fractionnaires via la semi-norme de Gagliardo nous a alors permis d'obtenir un premier résultat pour cet objet, établissant l'inclusion de $W^{s,p}$ dans $L^{p_s^*}$. Nous avons ensuite étudié les liens entre espaces de Sobolev classiques et espaces de Sobolev fractionnaires, tels que définis dans ce chapitre. Nous avons notamment pu exprimer $[\cdot]_{s,p}$ en tant qu'objet intermédiaire entre les normes sur les espaces L^p et $W^{1,p}$. La formule de Bourgain-Brezis-Mironescu nous a également permis de récupérer la norme p du gradient, à partir de $[\cdot]_{s,p}$.

Dans le chapitre 2, nous nous sommes restreints à l'étude de fonctions C_c^∞ pour définir un objet jouant le rôle de gradient dans le cadre des espaces de Sobolev. Nous avons alors exploré les propriétés de ce nouvel objet, et avons constaté qu'il nous était possible de récupérer le gradient habituel pour s tendant vers 1, via l'ajout d'un facteur $(s-1)$, afin de contrôler la croissance de $\nabla^s \varphi$. Dans ce même chapitre, nous avons obtenu une formule de représentation pour le gradient fractionnaire, permettant d'exprimer φ en fonction de $\nabla^s \varphi$, par une convolution avec le noyau de Riesz à valeur vectorielle.

Au chapitre 3, cette formule de représentation est intervenue de manière cruciale dans la démonstration de l'inégalité de Sobolev pour le gradient fractionnaire, aussi bien dans le cas où $p > 1$, que pour $p = 1$. Pour p strictement supérieur à 1, nous avons pu nous reposer sur une estimation faisant intervenir le noyau de Riesz. Ce résultat clef démontré, la formule de représentation nous a permis d'obtenir la conclusion souhaitée. Nous avons alors constaté, via un contre-exemple faisant intervenir les approximations de l'identité ρ_r , que l'estimation pour le noyau de Riesz utilisée précédemment ne tient pas pour $p = 1$. Dans ce contexte, nous avons cherché à obtenir un résultat analogue pour le noyau de Riesz à valeur vectorielle. Le résultat découlait alors de cette estimation, à condition de supposer la dimension $n \geq 2$. Nous avons terminé ce chapitre

en montrant qu'en dimension 1, il n'est pas possible d'obtenir un tel résultat pour le gradient fractionnaire lorsque $p = 1$.

Nous clôturons ce mémoire en mentionnant certains points qui n'ont pas été traités dans ce travail et questions laissées en suspens, ainsi que quelques références abordant ces sujets.

Nous avons supposé pour l'ensemble de ce travail $sp < n$. Lorsque $sp = n$ ou $sp > n$, il est également possible de retrouver des résultats analogues aux espaces de Sobolev classiques. Pour ceux-ci, quand $p = n$, on se trouve dans le cas critique pour la définition de l'exposant de Sobolev et on a l'incursion dans les espaces L^q pour $p < q < +\infty$. Lorsque $p > n$, le *théorème de Morrey* permet notamment d'étudier la continuité des fonctions de Sobolev. On peut alors obtenir des résultats similaires, présentés dans [5, chapitre 4.4], pour les espaces $W^{s,p}$.

Comme constaté au chapitre 1, un défaut de la semi-norme de Gagliardo est le fait que celle-ci ne permet pas de retrouver la norme L^p du gradient en prenant $s = 1$. Nous avons introduit la formule de Bourgain-Brezis-Mironescu, proposant une correction à ce problème via l'ajout d'un facteur $1 - s$. Un autre résultat a été obtenu par H. Brezis, J. Van Schaftingen et P.-L. Yung dans [2], établissant l'équivalence de la semi-norme $\|\nabla u\|_p$ avec une quantité analogue à la semi-norme de Gagliardo, évaluée en $s = 1$.

Finalement, mentionnons que la construction du gradient fractionnaire $\nabla^s \varphi$ est analogue à des objets introduits par D. Spector et T. Mengesha dans [9], et D. Spector et T.-T. Shieh dans [11], où des objets différentiels fractionnaires sont étudiés pour des fonctions non nécessairement C_c^∞ .

Nous espérons que le lecteur aura trouvé autant d'intérêt à ce travail que l'auteure en a pris à le réaliser, et que celui-ci aura su motiver l'approfondissement de ce riche domaine.

Bibliographie

- [1] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, Optimal control and partial differential equations, IOS, Amsterdam, 2001, pp. 439–455.
- [2] H. Brezis, J. Van Schaftingen, and P.-L. Yung, *A surprising formula for Sobolev norms*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **118** (2021), no. 8, Paper No. e2025254118, 6.
- [3] J. Y. Chemin, A. Gloria, and L. Saint-Raymond, *MATH-F411 : Analyse fonctionnelle*, Université libre de Bruxelles, Bruxelles, 2013.
- [4] J. Dávila, *On an open question about functions of bounded variation*, Calc. Var. Partial Differential Equations **15** (2002), no. 4, 519–527.
- [5] F. Demengel and G. Demengel, *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*, Universitext, Springer, London ; EDP Sciences, Les Ulis, 2012.
- [6] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573.
- [7] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [8] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, *On the Bourgain, Brezis, and Mironescu Theorem Concerning Limiting Embeddings of Fractional Sobolev Spaces*, Journal of Functional Analysis **195** (2002), no. 2, 230–238.
- [9] T. Mengesha and D. Spector, *Localization of nonlocal gradients in various topologies*, Calc. Var. Partial Differential Equations **52** (2015), no. 1-2, 253–279.
- [10] A. Schikorra, D. Spector, and J. Van Schaftingen, *An L^1 -type estimate for Riesz potentials*, Rev. Mat. Iberoam. **33** (2017), no. 1, 291–303.
- [11] T.-T. Shieh and D. Spector, *On a new class of fractional partial differential equations*, Adv. Calc. Var. **8** (2015), no. 4, 321–336.
- [12] S. L. Sobolev, *On a theorem of functional analysis*, Mat. Sb **4** (1938), no. 46, 471–497.
- [13] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [14] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, measures and capacities*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 23, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016.
- [15] B. Premoselli, *MATH-F412 : Méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles*, Université libre de Bruxelles, Bruxelles, 2021.
- [16] M. Willem, *Functional analysis*, Cornerstones, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

