UCLouvain

epl

École polytechnique de Louvain

Optimisation d'un simplex en tenségrité et comparaison de ses caractéristiques mécaniques avec son homologue treillis optimisé

Validation des résultats à l'aide de l'outil des indicateurs morphologiques

Auteur : **Emilien Fieuw**
Superviseur : **Pierre Latteur**
Lecteurs :**João Almeida, Benjamin Dardenne, Basile Payen**
Année académique 2024–2025
Master [120] en Génie Civil

"Les artistes sont des pionniers dans certaines compositions structurales innovantes, c'est particulièrement vrai pour la Tenségrité"

René Motro

Résumé

Souvent méconnue, la tenségrité intrigue par son apparente légèreté et son esthétique singulière. Ce principe désignant un système structural innovant, notamment de part son caractère déployable, est encore peu connu du grand public, mais suscite un intérêt croissant parmi les ingénieurs civils. Elle repose sur l'interaction entre barres comprimées et câbles tendus, formant des structures équilibrées à l'aspect flottant et aérien. Proche du principe des treillis, elle partage avec ceux-ci plusieurs caractéristiques, ce qui ouvre la voie à une comparaison directe. Présentée dans la littérature comme une alternative prometteuse aux structures en treillis, la tenségrité serait à la fois plus légère et plus rigide. Mais qu'en est-il réellement ? Ce mémoire vise à évaluer les performances structurales d'un simplex — forme élémentaire de tenségrité — en le comparant, après optimisation, à son équivalent en treillis. L'étude s'appuie sur des outils de modélisation utilisant des calculs non-linéaires afin d'analyser précisément le volume et la rigidité de ces deux systèmes. L'objectif final est donc de répondre à la question suivante : **la tenségrité constitue-t-elle une alternative réellement plus légère et plus rigide que le treillis classique ?**

Ce mémoire présente le développement d'un algorithme destiné à optimiser le volume de différentes configurations de simplex en tenségrité et de leurs homologues en treillis, dans le but d'évaluer objectivement la légèreté effective des structures en tenségrité par rapport aux treillis. Cette analyse est enrichie par une comparaison rigoureuse de la rigidité associée à chaque configuration. Afin de garantir une étude générale et représentative, les paramètres optimisés et comparés sont rendus adimensionnels au moyen des indicateurs morphologiques, permettant ainsi de tirer des conclusions globales à partir d'un nombre restreint mais pertinent d'exemples. L'étude ne se limite pas au seul cas du simplex : d'autres modules prismatiques en tenségrité, déjà abordés dans la littérature, font également l'objet d'optimisations et de comparaisons avec leurs équivalents en treillis. Différents scenarii de chargement sont à leur tour pris en compte afin de fournir une analyse la plus complète possible et de répondre, de manière exhaustive et fondée, à la problématique centrale de ce mémoire.

Mots-clés : *tenségrité, structure, optimisation, treillis, Grasshopper, indicateurs morphologiques, Galapagos, compression, traction, précontrainte, câbles, barres, non-linéaire, simplex.*

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier toutes les personnes ayant participé de près ou de loin à la réalisation et à la concrétisation finale de ce mémoire. Leur précieux soutien ainsi que leurs bons conseils m'ont été d'une grande aide toute au long de ce travail.

En premier lieu, je tenais à remercier Pierre Latteur pour m'avoir permis de me plonger dans ce monde fascinant qu'est la tenségrité. Son intérêt pour ce travail, ses conseils et remarques m'ont guidé tout au long de cette étude afin d'arriver à un mémoire final abouti.

Je tiens également à remercier Basile Payen, pour son investissement, son temps, ses conseils et son aide dans l'élaboration de ce mémoire. Sa patience, sa disponibilité et son enthousiasme m'ont permis de garder la motivation et la volonté d'atteindre tous les objectifs poursuivis dans cette étude.

Je voudrais remercier tous les étudiants passés avant moi à l'EPL pour leurs travaux et recherches approfondies sur différents aspects de la tenségrité. Leur contribution m'a permis d'en apprendre davantage sur la tenségrité afin de mieux comprendre ce système structural nouveau et de cibler les objectifs de mes recherches.

Mes remerciements vont à mes lecteurs et membres du jury de ce mémoire : João Almeida, Benjamin Dardenne et Basile Payen, pour le temps et l'énergie qu'ils consacreront à la lecture de ce mémoire.

Je tiens à ajouter une mention spéciale aux amis ingénieurs Rodin Bricoult, Arthur Eugène et Pierre Lacoste pour leurs lectures, leurs retours et leurs conseils sur ce mémoire. Merci également à eux pour tous les projets réalisés et moments passés ensemble durant ces années universitaires.

Finalement, j'exprime toute ma reconnaissance envers mes amis et ma famille. Merci à eux pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de mon cursus universitaire. J'aimerais adresser une gratitude particulière et tous mes remerciements à mes parents pour leur aide, leur relecture et leur soutien inconditionnel tout au long de mon parcours académique. Merci à eux de m'avoir ouvert l'esprit tout au long de ma jeunesse et de m'avoir permis d'entreprendre des études universitaires. Merci à eux d'avoir cru en moi tout au long de ces années, dans les bons comme dans les mauvais moments. Je leur dédie l'aboutissement et la réussite de ce travail.

Mes remerciements vont à toutes ces personnes pour avoir, chacun à leur manière, apporté leur pierre à l'édifice et sans qui ce travail n'aurait pas pu être réalisé.

Table des matières

Résumé **1**

Remerciements **3**

Liste des symboles **9**

Introduction **13**

1 État de l'art de la tenségrité : origines et définition **17**
1.1 Définition de la tenségrité 17
1.2 Les pionniers de la tenségrité 18
1.3 État de l'art de la tenségrité 20
1.3.1 La tenségrité en architecture 21
1.3.2 La tenségrité en génie civil 22
1.3.3 Pertinence des recherches menées dans ce mémoire 24
1.4 Caractéristiques de la tenségrité 25
1.4.1 Avantages 25
1.4.2 Inconvénients 25
1.4.3 Déployabilité 25
1.5 Les travaux sur la tenségrité à l'UCLouvain 27

2 Méthodes de calcul et logiciels de modélisation pour les structures en tenségrité **31**
2.1 Méthode non-linéaire des éléments finis 31
2.1.1 Non-linéarité des structures en tenségrité 31
2.1.2 Développement de la méthode 32
2.1.3 Principe d'avancement de la solution 32
2.1.4 Matrice de raideur locale et globale 33
2.1.5 Avancement dans la solution 34
2.1.6 Équation de contrainte $\Delta\lambda$ 35
2.1.7 Méthode linéaire adaptée 36
2.1.8 Algorithme de la méthode non linéaire des éléments finis 37
2.2 Méthode de la Relaxation Dynamique 37
2.3 Logiciel Grasshopper 38
2.3.1 Plug-in *Muscle* 39
2.3.2 Plug-in *Galapagos* 43

3 Indicateurs morphologiques et algorithmes d'optimisation de structures en tenségrité **47**
3.1 Indicateurs morphologiques 47
3.1.1 Paramétrisation d'une structure en tenségrité 48
3.1.2 Indicateurs morphologiques primaires et secondaires 49
3.1.3 Indicateur de précontrainte 50
3.1.4 Indicateur d'efficacité matérielle 50
3.1.5 Critères d'optimisation sur base des indicateurs morphologiques 51
3.2 Méthode d'optimisation en considérant les indicateurs morphologiques 51
3.2.1 Contraintes du problème 51
3.2.2 Objectifs de l'algorithme d'optimisation 53
3.2.3 Application de la précontrainte de la structure 53
3.2.4 Optimisation des sections des éléments de la structure 55
3.2.5 Algorithme global d'optimisation de structure en tenségrité 56

4 Optimisation d'un simplex tenségrité et comparaison de ses caractéristiques avec son homologue treillis . . . 59
4.1 Définition du simplex tenségrité . . . 60
4.1.1 Caractéristiques du simplex régulier . . . 61
4.1.2 Caractéristiques du simplex irrégulier . . . 63
4.2 Cas d'étude initial : définition des caractéristiques du simplex $S0$ et du scénario de chargement . . . 65
4.2.1 Caractéristiques matérielles et géométriques du simplex . . . 65
4.2.2 Scenario de chargement . . . 66
4.2.3 Paramètres encore inconnus . . . 67
4.2.4 Adimentionnalisation des paramètres à l'aide des indicateurs morphologiques . 68
4.3 Optimisation d'un simplex tenségrité pour différents états de précontrainte et de son treillis homologue . . . 70
4.3.1 Méthode d'optimisation manuelle pour différents états de précontrainte . . . 70
4.3.2 Méthode d'optimisation manuelle d'un treillis homologue au simplex . . . 75
4.3.3 Comparaison du poids propre et de la rigidité d'un simplex tenségrité avec son homologue treillis . . . 79
4.3.4 Méthode d'optimisation automatique à l'aide de *Galapagos* . . . 81
4.4 Variation de l'indicateur de flambement avec le scénario de chargement F choisi . . . 84
4.4.1 Application d'une force 10x plus petite . . . 84
4.4.2 Application d'une force 100x plus petite . . . 88
4.5 Variation de l'indicateur de flambement avec le modèle de tube (rapport $\frac{D_s}{e}$) choisi . . 90
4.5.1 Rapport $\frac{D_s}{e}$ 1.25 fois plus faible . . . 91
4.5.2 Rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand . . . 91
4.6 Vérification des résultats pour des paramètres initiaux différents . . . 95
4.6.1 Variation de la charge F et du rapport $\frac{D_s}{e}$ pour un ψ donné . . . 96
4.6.2 Variation de l'échelle géométrique du simplex pour un ψ donné . . . 97
4.7 Évolution de la configuration optimale du simplex et de son homologue treillis en fonction de l'indicateur de flambement . . . 98
Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre . . . 99

5 Amélioration du simplex par l'ajout de câbles additionnels . . . 105
5.1 Pertinence de l'ajout de câbles additionnels . . . 105
5.2 Méthode d'optimisation automatique à l'aide de *Galapagos* . . . 106
5.2.1 Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique . . . 107
5.2.2 Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ identique 107
5.3 Comparaison d'un simplex avec câbles additionnels $S1 - S2 - S3$ avec un simplex classique $S0$ . . . 107
5.3.1 Simplex $S1$ . . . 108
5.3.2 Simplex $S2$ . . . 110
5.3.3 Simplex $S3$ . . . 111
5.4 Comparaison entre un simplex avec câbles additionnels $S1 - S2 - S3$ et un treillis T homologue . . . 113
5.4.1 Comparaison entre le simplex $S3$ et le treillis T . . . 114
5.4.2 Pertinence de la valeur de ψ considérée dans ce chapitre . . . 115
Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre . . . 116

6 Considération de scenarii de chargement et de modèles simplex différents . . . 119
6.1 Scenario de chargement avec des composantes uniquement verticales . . . 120
6.1.1 Évolution de l'indicateur de volume W . . . 120
6.1.2 Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ . . . 122
6.1.3 Comparaison entre le simplex en tenségrité $S0$ et son treillis T homologue . . . 123
6.2 Scenario de chargement avec des composantes uniquement horizontales . . . 125
6.2.1 Évolution de l'indicateur de volume W . . . 125

6.2.2 Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ . . . 126
6.2.3 Comparaison entre le simplex en tenségrité $S0$ et son treillis T homologue . . . 127
6.3 Analyse et comparaison des trois scenarii de chargement . . . 129
6.4 Analyse des différents modèles prismatiques de structures en tenségrité autre que le simplex classique . . . 131
6.4.1 Pertinence de l'étude des autres modèles prismatiques en tenségrité . . . 132
6.4.2 Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre les différents modules prismatiques en tenségrité . . . 133
6.4.3 Évolution des caractéristiques des treillis homologues aux différents modules prismatiques en tenségrité . . . 135
Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre . . . 138

Conclusions et perspectives d'amélioration . . . 143

Annexe A Méthode linéaire aux éléments finis . . . 149

Annexe B Valeurs numériques choisies pour le cas d'étude initial du simplex présenté dans la Section 4.2 . . . 153

Annexe C Valeurs numériques choisies pour les cas d'étude du simplex présentés en Sections 4.4 et 4.5 . . . 154

Annexe D Analyse des épaisseurs de tubes disponible sur le marché . . . 160

Annexe E Valeurs numériques choisies pour la vérification des résultats réalisée à la Section 4.6 . . . 161

Table des figures . . . 165

Table des figures . . . 169

Liste des tableaux . . . 170

Références . . . 172

Liste des symboles

Symbole	Unités	Signification
σ	$[MPa]$	Contrainte
E	$[MPa]$	Module de Young
ϵ	$[mm]$	Déformation
f_e	$[MPa]$	Limite d'élasticité du matériau
f_k, f_y	$[MPa]$	Résistance caractéristique du matériau
M	$[kNm]$	Moment fléchissant
Q	$[kN]$	Charge ponctuelle
L	$[m]$	Longueur d'un élément
δ_1	$[mm]$	Déplacement nodal
δ_2	$[mm]$	Déplacement nodal
$\bar{F}_{ext}$	$[kN]$	Vecteur de charge totale dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
ΔF_k	$[kN]$	Incrément de force dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
k	$[/]$	Incrément dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
ΔN_k	$[kN]$	Incrément d'effort interne dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
$\Delta\delta_k$	$[mm]$	Incrément de déplacement nodal dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
$\bar{F}_k$	$[kN]$	Vecteur de charge totale à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
$\bar{N}_k$	$[kN]$	Vecteur d'effort interne total à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
$\bar{\delta}_k$	$[kN]$	Vecteur de déplacement nodal total à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
n	$[/]$	Nombre total d'incrément dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
$\bar{K}_{k,loc}$	$[/]$	Matrice de rigidité locale à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis

Symbole	Unités	Signification
A	$[mm^2]$	Aire de la section
L_k	$[mm]$	Longueur d'un élément à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire aux éléments finis
c_x	$[/]$	Cosinus directeur selon X
c_y	$[/]$	Cosinus directeur selon Y
X	$[m]$	Abscisse d'un nœud dans son repère local
Y	$[m]$	Ordonnée d'un nœud dans son repère local
λ	$[/]$	État d'avancement du processus de chargement dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{p}$	$[kN]$	Vecteur de chargement incrémental dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{v}$	$[mm]$	Vélocité incrémentale dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{u_k}$	$[mm]$	Déplacement nodal à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{K_k}$	$[/]$	Matrice de rigidité globale à l'incrément k dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
l	$[/]$	Longueur d'incrémentation dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
α	$[°]$	Angle de rotation relatif entre la base inférieure et supérieure du simplex
$\bar{r}$	$[kN]$	Vecteur de réactions aux appuis dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{c}$	$[/]$	Matrice des degrés de liberté bloqués par des conditions d'appui dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\bar{D}$	$[mm]$	Matrice des déplacements imposés aux appuis dans le contexte de la méthode non-linéaire des éléments finis
$\{f\}$	$[kN]$	Force externe appliquée aux nœuds dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
$[A]$	$[/]$	Matrice d'équilibre dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
$\{t\}$	$[kN]$	Force de précontrainte dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique

Symbole	Unités	Signification
$[M]$	$[kg]$	Matrice de masse nodale dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
$\{\dot{v}\}$	$[m/s^2]$	Accélération nodale dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
$\{v\}$	$[m/s]$	Vitesse nodale dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
$[C]$	$[kg/s]$	Matrice d'amortissement fictif de la structure dans le contexte de la méthode de la Relaxation Dynamique
ρ	$[kg/m^3]$	Masse volumique du matériau
H	$[m]$	Hauteur du simplex
D	$[m]$	Largeur du simplex
ρ_s, ρ_c	$[kg/m^3]$	Masse volumique des barres et des câbles
E_s, E_c	$[MPa]$	Module de Young des barres et des câbles
σ_s, σ_c	$[MPa]$	Contrainte maximale admissible des barres et des câbles
D_s, D_c	$[mm]$	Diamètres des barres et des câbles
e	$[mm]$	Épaisseur des barres
A_s	$[m^2]$	Section des barres composants la structure
I_s	$[m^4]$	Inertie des barres composants la structure
V	$[m^3]$	Volume totale de la structure
F	$[N]$	Charge totale appliquée sur la structure
$\frac{H}{D}$	$[/]$	Indicateur d'élancement géométrique
q	$[/]$	Indicateur de la géométrie des sections des barres
ψ	$[/]$	Indicateur de flambement
ϕ_s, ϕ_c	$[/]$	Indicateur de poids propre des barres et des câbles
$\frac{E}{\sigma}$	$[/]$	Indicateur de raideur du matériau
W	$[/]$	Indicateur de volume
Δ, $\frac{H}{\delta}$	$[/]$	Indicateur de déplacement nodal
P	$[kN]$	Niveau de précontrainte

Symbole	Unités	Signification
P_{adm}	$[kN]$	Précontrainte maximale admissible
$\frac{P}{F}$	$[/]$	Indicateur de précontrainte
l_b	$[mm]$	Longueur des barres du simplex
l_c	$[mm]$	Longueur des câbles du simplex
r_a	$[mm]$	Rayon du cercle circonscrit de la base supérieure du simplex
r_b	$[mm]$	Rayon du cercle circonscrit de la base inférieure du simplex
N_l	$[kN]$	Effort interne maximale admissible dans les câbles longitudinaux
N_c	$[kN]$	Effort interne maximale admissible dans les câbles transversaux
N_s	$[kN]$	Effort interne maximale admissible dans les barres
N_{add}	$[kN]$	Effort interne maximale admissible dans les câbles additionnels
u	$[mm]$	Déplacement nodal maximal d'un des trois nœuds supérieurs
N_{Ed}	$[kN]$	Effort interne effectif
N_{adm}	$[kN]$	Effort interne maximale admissible
x, y, z	$[mm]$	Coordonnées d'un nœud dans l'espace tridimensionnel
N_{trac}	$[kN]$	Effort interne maximale admissible en traction dans le treillis
N_{comp}	$[kN]$	Effort interne maximale admissible en compression dans le treillis
n_b	$[/]$	Nombre de côtés de la base du module prismatique en tenségrité

Introduction

Tenségrité. Un terme aussi méconnu qu'intrigant, dont la seule sonorité suscite davantage de questions que de réponses. Pourtant, derrière ce mot énigmatique se cache un concept révolutionnaire, capable de bouleverser les paradigmes traditionnels de l'architecture et du génie civil. À la croisée de l'esthétique et de l'innovation technique, la tenségrité propose une vision radicalement nouvelle de la structure, à la fois légère, stable et élégante.

La tenségrité désigne un système structural composé de barres rigides en compression et de câbles tendus en traction, agissant de manière complémentaire pour assurer l'équilibre global de la structure. Ce mode de fonctionnement, aussi contre-intuitif que fascinant, confère aux structures en tenségrité une apparence aérienne et épurée.

Introduit dans les années 1950, ce principe a déjà fait ses preuves dans les domaines artistiques et architecturaux, où il séduit par son esthétisme et son originalité. Mais au-delà de l'apparence, l'un des atouts majeurs de la tenségrité réside dans sa déployabilité. En effet, les éléments tendus, n'étant pas rigides, permettent un assemblage aisé et rapide, souvent en dehors du site de construction. Cette capacité ouvre des perspectives intéressantes pour les structures nécessitant une préfabrication poussée ou destinées à être implantées dans des environnements difficiles d'accès.

Malgré ses nombreux atouts théoriques, la tenségrité peine à s'imposer en génie civil et reste à ce jour très peu appliquée à des structures réelles. Cette situation ne relève pas du hasard. Plusieurs ingénieurs et chercheurs ayant exploré ce concept s'accordent pourtant à le considérer comme une alternative à fort potentiel, capable de produire des structures à la fois légères, esthétiques, et dont l'assemblage requiert une main-d'œuvre réduite. Dès lors, une question se pose : pourquoi, en dépit de ces avantages apparents, la tenségrité demeure-t-elle si marginale dans les pratiques du génie civil ? L'obstacle majeur réside dans la complexité intrinsèque de ce système structural.

En effet, les structures en tenségrité présentent un comportement hautement non-linéaire, principalement en raison du manque de rigidité des éléments tendus, à savoir les câbles. Cette non-linéarité implique qu'une sollicitation même faible peut provoquer des déplacements importants, rendant inapplicables les méthodes de calcul au premier ordre habituellement utilisées en ingénierie. Pour remédier à cette instabilité, il est nécessaire d'introduire une précontrainte : il s'agit d'imposer volontairement des contraintes internes à la structure afin d'en améliorer la rigidité et de limiter les déformations. Cependant, cette opération ne peut être réalisée sans conséquences. Chaque incrément de précontrainte induit des efforts mécaniques qui se propagent dans l'ensemble de la structure, ce qui peut entraîner des surcharges importantes dans certains éléments. Il en résulte souvent la nécessité de surdimensionner les barres et câbles, afin de garantir leur résistance aux efforts induits. Outre cette complexité liée à la mise en œuvre de la précontrainte, la nature non-linéaire du comportement de la tenségrité compromet l'utilisation des logiciels de calcul standard, conçus principalement pour des structures linéaires. Cela constitue un frein majeur à l'intégration de la tenségrité dans les outils de conception et de dimensionnement actuels.

Il existe cependant un système bien connu en génie civil qui présente de nombreuses similarités avec la tenségrité : les treillis. Comme les structures en tenségrité, les treillis sont composés d'éléments uniquement sollicités par des efforts normaux, reliés entre eux par des connexions entièrement rotulées. Ce parallèle naturel entre les deux types de structures, et cette croyance selon laquelle la tenségrité serait une alternative sérieuse, permet de faire un rapprochement évident et soulève une question centrale, qui guide ce mémoire :

La tenségrité constitue-t-elle une alternative structuralement plus performante que les treillis ? En d'autres termes, est-elle plus légère et plus rigide dans un contexte équivalent ?

C'est précisément dans ce contexte que s'inscrit le présent travail, dans la continuité des recherches entamées à l'École Polytechnique de Louvain depuis 2013. Ces recherches avaient pour objectif de mieux comprendre le potentiel réel de la tenségrité à travers des études approfondies sur ses caractéristiques mécaniques et constructives. Ce mémoire s'inscrit donc dans la continuité de ces travaux et vise ainsi à comparer, de manière rigoureuse, les performances structurales de systèmes en tenségrité avec leurs homologues en treillis, à partir de configurations géométriquement équivalentes, afin de répondre à l'interrogation émise dans cette introduction. En effet, aucune comparaison fiable n'a été réalisée entre la tenségrité et les treillis jusqu'à présent, en étudiant des structures totalement similaires.

La méthodologie adoptée repose sur la définition d'une structure de base relativement simple : un simplex, modélisé à la fois en version tenségrité et en version treillis. Ces deux structures seront soumises à un processus d'optimisation visant à minimiser leur volume tout en respectant un ensemble de contraintes mécaniques. L'optimisation sera réalisée à l'aide du logiciel *Muscle*, un outil de calcul non-linéaire développé à l'EPL par Jonas Feron dans le cadre des travaux sur la tenségrité. Ce logiciel permettra d'obtenir des résultats fiables sur les performances optimales de chaque structure, permettant ainsi une comparaison rigoureuse avec leur treillis équivalent.

Ce travail permettra, à terme, de répondre de manière fondée à la problématique posée. Il offrira également une réflexion plus large sur le potentiel d'utilisation de la tenségrité dans le génie civil.

Le premier chapitre présente les origines et prémices de la tenségrité, et expose une définition précise ainsi que plusieurs exemples concrets de structures en tenségrité permettant une bonne compréhension des concepts clés.

Le second chapitre aborde les méthodes de calculs et logiciels de modélisation utilisés dans l'étude des structures en tenségrité. Ce chapitre présentera donc les outils qui seront utilisés dans le cadre de ce mémoire.

Le troisième chapitre concerne les outils et algorithme d'optimisation. Les méthodes de calculs et logiciels de modélisation du Chapitre 2, combinés aux outils d'optimisation ont un rôle primordial de ce mémoire et permettront une optimisation et comparaison rigoureuse entre structure en tenségrité et structure treillis.

Le quatrième chapitre présente, pour les différents cas étudiés, les résultats des optimisations des deux systèmes structuraux et les résultats de la comparaison entre tenségrité et treillis. Ce chapitre constitue le cœur de cette étude abordant méticuleusement les étapes d'optimisation d'un simplex en tenségrité et de son homologue treillis, ainsi que la comparaison des caractéristiques mécaniques entre ces deux structures du point de vue de leur volume et rigidité.

Le cinquième chapitre explore plusieurs variantes du simplex classique permettant une comparaison la plus complète possible entre treillis et les différentes configurations de simplex existantes.

Finalement, **le dernier chapitre** a pour objectif de pousser l'étude plus loin en considérant différentes structures en tenségrité proches du simplex, ainsi que d'autres scenarii de chargement que ceux qui seront considérés tout au long de l'étude. Cette exploration plus lointaine permet de ne pas restreindre toutes les conclusions au simple cas du simplex classique et vise à montrer leur projection éventuelle vers d'autres structures en tenségrité similaires.

CHAPITRE 1 : ÉTAT DE L'ART DE LA TENSÉGRITÉ : ORIGINES ET DÉFINITION

1 État de l'art de la tenségrité : origines et définition

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux de recherche menés à l'UCLouvain dans le domaine de la tenségrité. Depuis le début des premières études sur le sujet lors de l'année académique 2013-2014, près d'une dizaine de mémoires ont exploré ce domaine innovant appliqué à la construction. Chacun de ces travaux a contribué à établir un état de l'art de la tenségrité en architecture et en génie civil. Ainsi, le présent chapitre s'appuie largement sur ces recherches antérieures, qui ont progressivement permis d'élaborer une mise en contexte approfondie et complète de cette thématique.

Ce chapitre vise à établir un bilan de l'évolution de la tenségrité jusqu'à aujourd'hui, afin de contextualiser les recherches menées et présentées dans ce mémoire. Dans un premier temps, une définition de la tenségrité sera proposée afin de clarifier ce concept. Ensuite, un historique et un état de l'art des structures en tenségrité seront exposés, permettant d'appréhender l'évolution de ce type d'ouvrage en architecture et en génie civil. Enfin, une caractérisation de ce système structural sera présentée, suivi d'un aperçu des travaux déjà réalisés, afin de situer ce mémoire et les recherches qui y sont associées dans la continuité des différents mémoires réalisés à l'UCLouvain sur ce sujet.

1.1 Définition de la tenségrité

La tenségrité est un système structural qui se caractérise par un jeu d'équilibre entre des éléments tendus et des éléments comprimés qui collaborent étroitement pour donner un aspect aérien à la structure.

Plus spécifiquement, une structure en tenségrité est composée d'éléments comprimés possédant une certaine rigidité, souvent appelé "barres", et de câbles tendus. Ces éléments tendus permettent, à l'aide d'un jeu d'équilibre des efforts et un agencement intelligent, de stabiliser la structure dans laquelle les éléments comprimés ne sont pas toujours en contact direct les uns avec les autres. Cette discontinuité donne à la structure un aspect très aérien apportant l'illusion que les éléments comprimés flottent au milieu d'un nuage de câbles tendus [1].

De nombreuses définitions existent, établies par différents pionniers de la tenségrité :

"Islands of compression in an ocean of tension" (définition de Richard Buckminster Fuller [2])

"Solid elements set in space and supporting each other through tension"
(définition de Kenneth Snelson [3])

"Un système de tenségrité est un système dans un état d'auto-équilibre stable, qui comprend un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus"
(définition de René Motro [4])

"Self-stressing structures consist of bars and cables assembled in such a way that the bars remain isolated in a continuum of cables. All these elements must be spaced rigidly and at the same time interlocked by the presstressing resulting from the internal stressing of cables without the need for eternal anchorage. The whole is maintained firmly like a self-supporting structure."
(définition de D.G. Emmerish [5])

Richard Buckminster Fuller complétera sa définition par la suite dans son livre "Synergetics : Exploration in the Geometry of Thinking" en définissant la tenségrité comme : "un principe de relation structurale où la forme est garantie par le comportement complètement fermé, continu et tendu du système et non par le comportement des membres discontinus et localement comprimés" [1]. Cette définition met donc en lumière le principe d'auto-équilibre des structures en tenségrité. C'est à dire que la stabilité et la rigidité sont assurées par les efforts internes présents dans les éléments de la structure.

Ce système structural montre donc beaucoup de complexité et se base sur plusieurs concepts clés :

— L'équilibre : L'agencement des éléments comprimés et tendus crée un équilibre permettant aux différents efforts de stabiliser la structure.

— La compression et la tension : Les structures en tenségrité sont uniquement soumis à des efforts normaux. Les éléments sont donc soit soumis à de la compression ou de la traction pure. Les efforts de flexion ne sont pas admissibles dans ce genre de structure.

— La précontrainte : Les éléments en tension n'ayant aucune rigidité en compression, l'application de précontrainte dans la structure (par allongement des câbles ou raccourcissement des barres) est indispensable pour rigidifier la structure et limiter les déformations dues aux charges externes.

À partir de cette définition approfondie de la tenségrité, il apparaît que ce système structural présente de nombreuses similitudes avec les structures treillis. En effet, ces dernières ne sont soumises qu'à des efforts normaux, leurs éléments sont reliés par des assemblages rotulés, et les charges extérieures s'appliquent exclusivement aux nœuds. La principale différence réside dans le fait que, dans les structures en tenségrité, les éléments en traction sont des câbles, tandis que dans les treillis, constitués uniquement de barres identiques, il n'y a pas de distinction claire entre les éléments comprimés et ceux tendus. De plus, la littérature dépeint la tenségrité comme étant une alternative bien réelle aux treillis, présentant celle-ci comme étant légère et rigide (voir Section 1.3.3). C'est précisément cette problématique qui constitue l'objet de ce mémoire, dont l'objectif est d'optimiser dans un premier temps ces deux systèmes structuraux, et d'en analyser ensuite les caractéristiques de volume et de rigidité afin de dresser une comparaison rigoureuse.

1.2 Les pionniers de la tenségrité

Karl Johansson

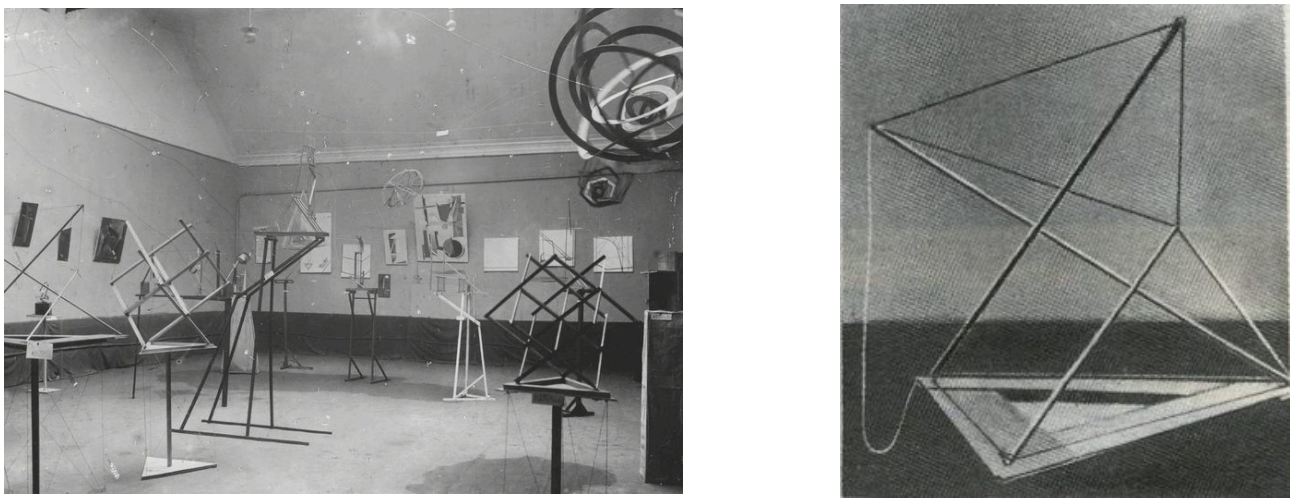


FIGURE 1.1 – "Gleichgewichtkonstruktion" de Karl Johasson [6].

Les première traces du concept de tenségrité apparaissent au début du XX^e siècle avec l'artiste russe Karl Johansson. En 1921, celui-ci présente une œuvre baptisée "Gleichgewichtkonstruktion" - "structure d'équilibre" qui se base sur les mêmes principes que ceux des structures en tenségrité actuelles, mais sans y appliquer de précontrainte. D.G. Emmerish dira même de cette œuvre : "Cette curieuse structure est composée de trois barres et sept tirants et était manipulable à l'aide d'un huitième tirant détendu, l'ensemble étant déformable. Cette configuration labile est très proche de la proto-forme autotendante à trois barres et neuf tirants" [7]. L'objectif de cette œuvre était de montrer

le caractère déformable des structures composées d'éléments tendus. Celle-ci constitue l'ancêtre du simplex [1] en tenségrité, structure élémentaire de ce principe structural.

Richard Buckminster Fuller

C'est vers les années 1950 que le concept de tenségrité apparaît réellement tel qu'on le connaît aujourd'hui. L'un des pères le plus connus est Richard Buckminster Fuller [8], a qui on attribue la paternité du mot "Tensegrity". Cet architecte américain qualifie les structures composées d'éléments tendus et comprimés comme ayant "a tensile integrity". La contraction de ces deux mots donnera naissance au terme tenségrité [5], évoquant ainsi un réseau tendu et continu assurant toute l'intégrité de la structure.

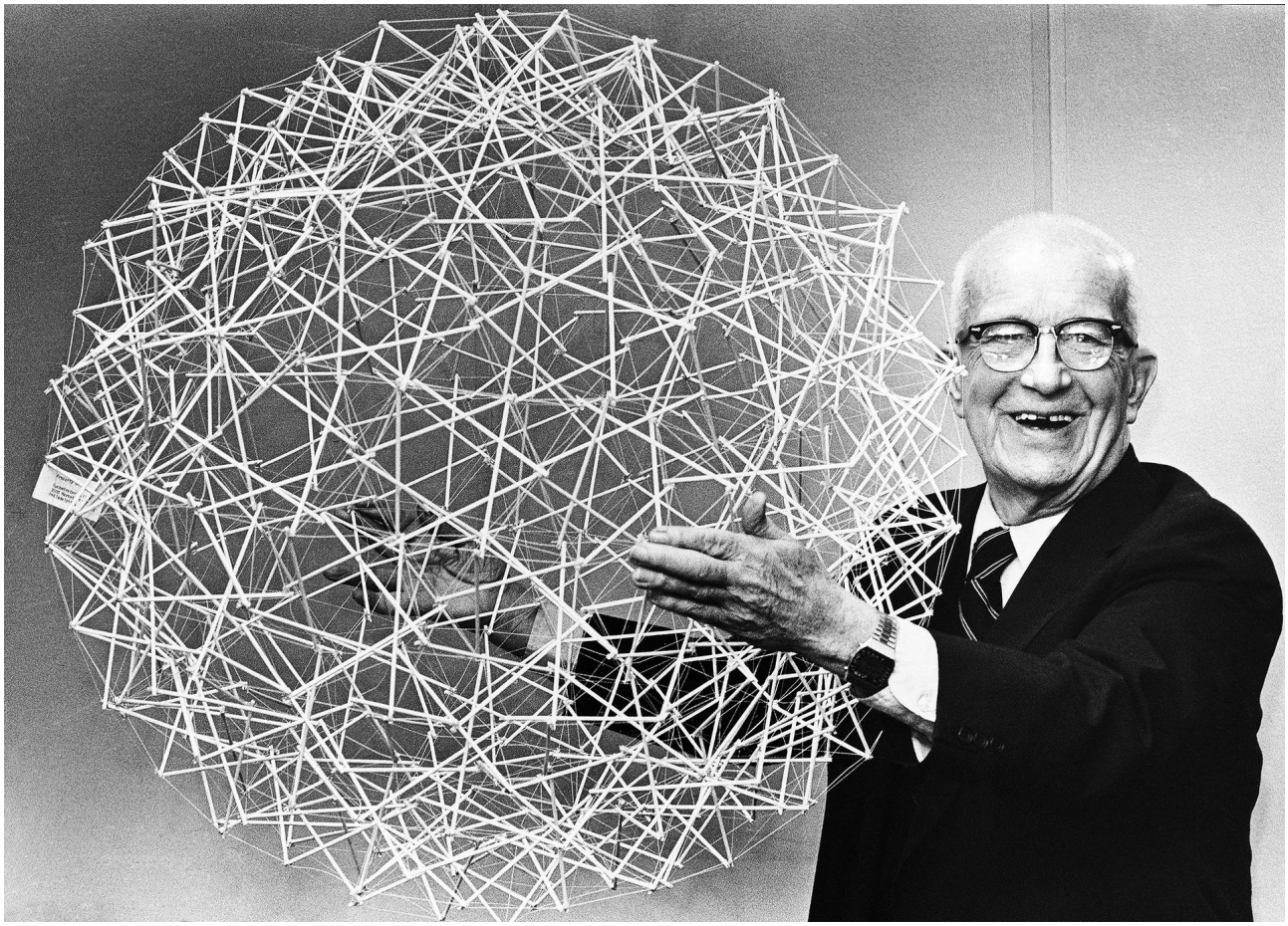


FIGURE 1.2 – Richard Buckminster Fuller [9].

Kenneth Snelson

Kenneth Snelson, sculpteur et photographe américain fait aussi partie des pères fondateurs de la tenségrité, au même titre que Richard Buckminster Fuller. Snelson, élève de Fuller, arrivera à matérialiser ce concept en créant des œuvres basées sur le principe de la tenségrité. Ces créations caractérisées par une certaine élégance, légèreté et complexité, seront d'une grande inspiration pour toutes les futures structures en tenségrité qui verront le jour.

"A student and now well-known sculptor, Kenneth Snelson, provided the answer. He presented his discovery to Fuller ; a small structure consisting of three separated struts held rigidly in place with a 8 few strings. This was the birth of an explosion of géométrie tensegrity structures." [7].

1. Un simplex est une structure élémentaire en tenségrité qui sera présentée en détail dans le Chapitre 4 de ce mémoire.

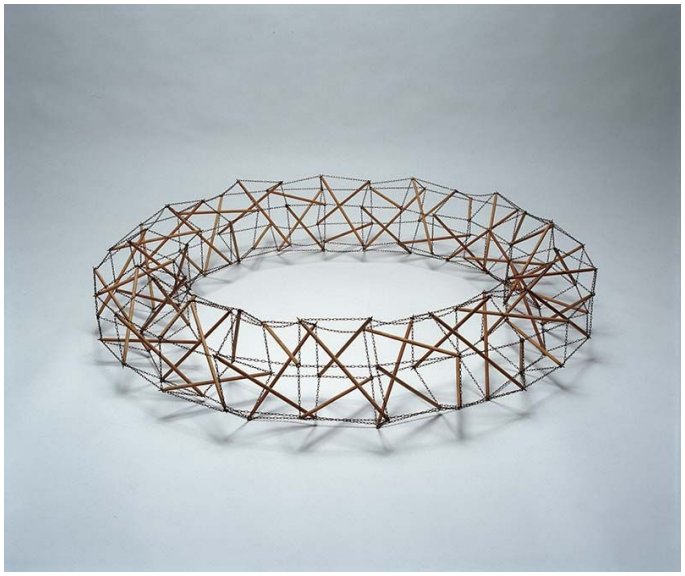




FIGURE 1.3 – "B-tree" [10] and "X-Piece" de Kenneth Snelson [5].

David Georges Emmerich

Cet architecte et ingénieur français fait partie, avec ceux cités précédemment, des noms qui reviennent le plus couramment lorsqu'on évoque l'histoire et l'origine de la tenségrité. Ces travaux se focalisent sur les structures qualifiées d'autotendantes [11]. Il va également développer des géométries qui pourront être assemblées à l'infini pour former des structures en tenségrité plus complexes.



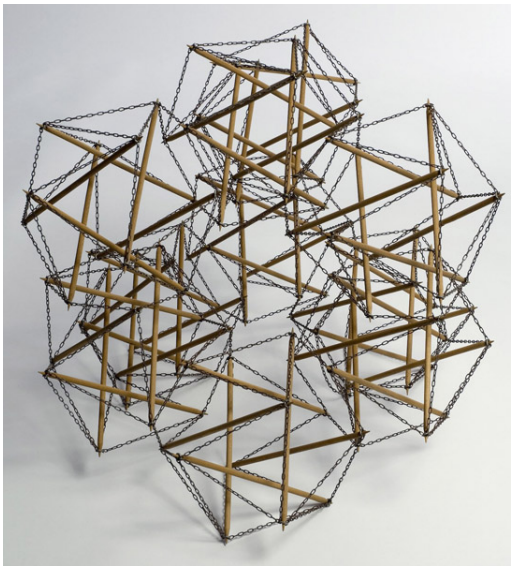


FIGURE 1.4 – Structures autotendantes de D.G. Emmerish [12].

1.3 État de l'art de la tenségrité

Jusqu'à présent, le concept de la tenségrité a rarement dépassé le cadre artistique et architectural. Toutefois, les pionniers de ce domaine ont, chacun à leur manière, contribué à son développement et à son intégration progressive dans le génie civil. Comme l'a souligné René Motro, professeur émérite à l'Université de Montpellier : "Artists are pioneers in some innovative structural compositions, this is particularly true for Tensegrity" [13].

Depuis les années 1950, de nombreux artistes, architectes et ingénieurs se sont intéressés à ce concept novateur, explorant son potentiel à travers la conception et la réalisation d'ouvrages reposant sur ce système structural singulier.

1.3.1 La tenségrité en architecture

The Needle Tower I and II

Parmi les réalisations remarquables dans les domaines artistiques et architecturales utilisant le principe de la tenségrité, on peut citer les structures *Needle Tower I* et *Needle Tower II* de Kenneth Snelson. Grâce à des modèles réduits, Snelson a conçu des structures constituées de tubes en aluminium et de câbles en acier inoxydable, agencés de manière à former des ouvrages de grande envergure.

En 1968, il réalise *Needle Tower I* pour le Hirshorn Museum de Washington, une structure atteignant une hauteur de 18 mètres. Bien que déjà imposante, cette hauteur a été volontairement limitée afin d'assurer une résistance optimale aux effets du vent. Souhaitant repousser les limites de son concept, Snelson conçoit une nouvelle version, *Needle Tower II*, qui s'élève cette fois à 30 mètres.

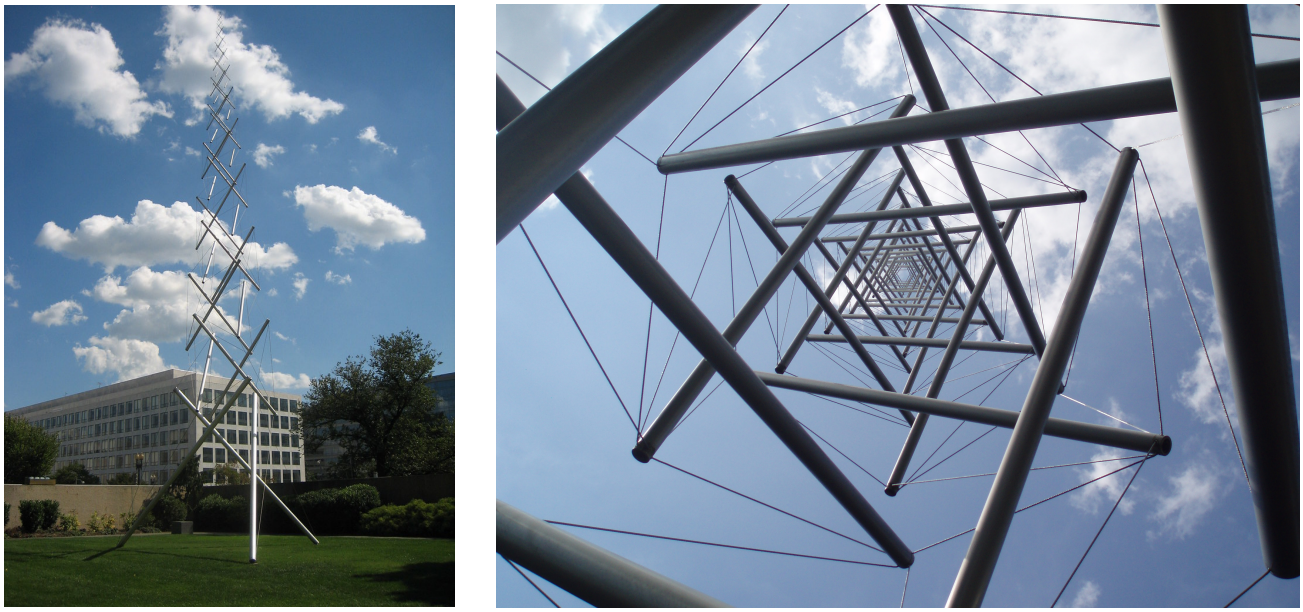


FIGURE 1.5 – *Needle Tower I et II* [14].

The Lotus Aeroad

Cette sculpture en tenségrité a été réalisée à l'occasion du *Goodwood festival of Speed* et s'inspire directement de la philosophie de conception des voitures Lotus, visant à obtenir une structure légère et épurée. Cet ouvrage, particulièrement novateur, constitue une avancée significative dans le domaine de la tenségrité. À ce jour, il représente la structure en tenségrité présentant le porte-à-faux le plus important, repoussant ainsi les limites existantes et ouvrant la voie à un large éventail de nouvelles possibilités de conception.

Cette structure se distingue également par la méthodologie adoptée lors de sa conception. En effet, les ingénieurs ont suivi une approche similaire à celle qui seraient employée pour la conception de structures en tenségrité dans le génie civil. Le processus de conception a intégré une phase de modélisation et d'optimisation à l'aide d'un logiciel dédié, permettant d'analyser le comportement structural de l'ouvrage et de déterminer sa configuration finale après application de la précontrainte et des charges externes. Cette approche a également permis une paramétrisation efficace de la structure, facilitant ainsi l'optimisation de sa géométrie afin de concilier exigences architecturales et efficacité structurale.

Grâce à un processus itératif, un premier diamètre des barres et des câbles est défini, permettant d'estimer le poids propre de la structure. Ce poids propre, combiné aux charges externes, induit des déformations ainsi que des efforts internes de traction et de compression au sein des éléments. En s'appuyant sur les valeurs maximales des efforts internes, les sections des éléments sont ajustées, permettant, par convergence successive, d'aboutir à la forme finale optimisée de la structure. Cette même démarche sera appliquée dans le cadre des recherches et des analyses menées dans ce mémoire.



FIGURE 1.6 – Structure *Lotus Aeroad* au *Goodwood festival of Speed* [15].

1.3.2 La tenségrité en génie civil

Bien que moins répandu, le concept de la tenségrité a également dépassé le cadre du génie civil et de la construction, mais cela reste très marginal. Certains ouvrages intègrent ce principe non seulement pour ses qualités esthétiques et architecturales, mais également à des fins structurales, renforçant ainsi son intérêt dans des domaines variés.

The Kurilpa Bridge

Le *Kurilpa Bridge* est une passerelle piétonne située à Brisbane, en Australie, conçue par *Cox Rayner Architects* et achevée en 2009. Bien que cette structure ne puisse être strictement définie comme une construction en tenségrité, elle intègre néanmoins certains principes de ce concept. D'une portée totale de 470 mètres, cet ouvrage s'apparente davantage à un pont haubané, dans lequel certaines barres comprimées adoptent un agencement inspiré de la tenségrité.

Cette passerelle est en effet considérée comme le pont le plus important à l'échelle mondiale intégrant les principes de la tenségrité. Elle combine de manière harmonieuse les caractéristiques d'un pont haubané et les concepts de la tenségrité, aboutissant à une structure à la fois légère et aérienne, tout en garantissant une résistance structurale suffisante. Dans ce cas précis, seules les barres horizontales respectent pleinement le principe de la tenségrité.



FIGURE 1.7 – *Kurilpa Bridge* [16].

The Georgia Dome et le Stade Unico de La Plata

La tenségrité est un principe structural pouvant être appliqué à des ouvrages d'une complexité bien plus élevée que de simples passerelles. On observe ici deux exemples de toitures intégrant ce concept, illustrant ainsi la possibilité de concevoir des structures complexes et audacieuses en tenségrité.

Le *Georgia Dome* est un stade de football américain situé à Atlanta. Construit en 1992, sa toiture, conçue par Matthys P. Levy, se caractérisait par une vaste structure ovale suspendue, mesurant 233,5 mètres de long et 186 mètres de large. Le stade a malheureusement été démoli en 2017 pour laisser place à un nouveau complexe.

L'*Estadio Único de La Plata* constitue un autre exemple de toiture intégrant la tenségrité. La toiture de ce stade argentin est composée de deux anneaux circulaires de 85 mètres de diamètre, entièrement conçus selon ce principe structural.

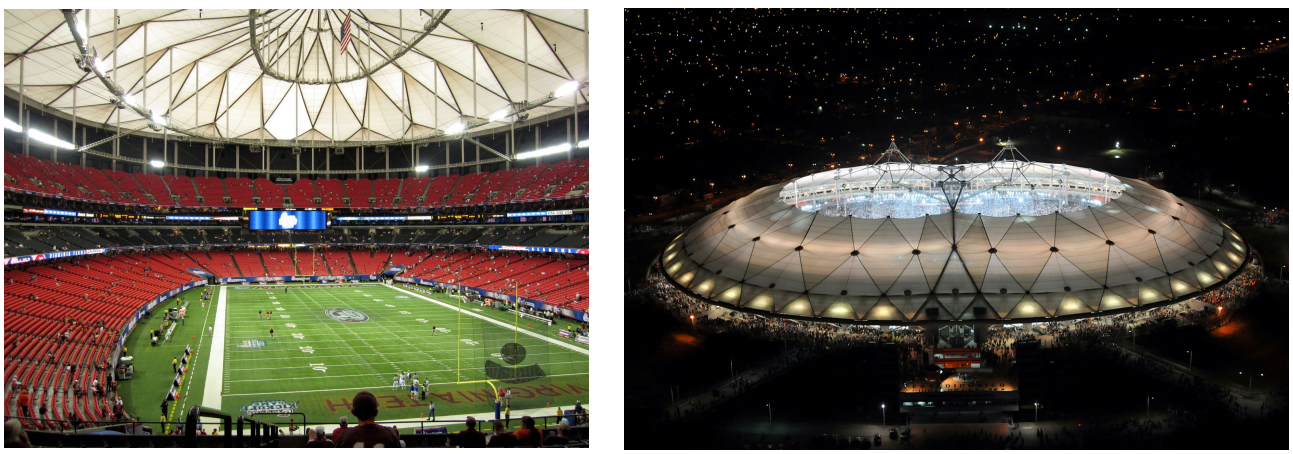


FIGURE 1.8 – *The Georgia Dome* [17] et *Estadio Unico de La Plata* [18].

1.3.3 Pertinence des recherches menées dans ce mémoire

"Ces structures constituent une réelle innovation en terme de composition structurale impliquant plusieurs possibilités de design : contrôle actif, légèreté, déployabilité et bien d'autres." [11]

"Dans ce contexte, nous proposons une solution basée sur l'usage d'une structure légère et pliable, permettant de former une plateforme rigide." [19]

"[...] Implique deux alternatives structurelles de base [...]. La première est associée à l'idée de solidité et de rigidité, tandis que la seconde est associée à l'idée de légèreté et de souplesse." [20]

"Nous pouvons citer comme qualités essentielles : performance mécanique, légèreté et pliabilité. Dans le cadre de notre étude, l'objectif est de mettre en valeur les qualités mécaniques des ces systèmes en tant que structure porteuse, légère, pliable et/ou déployable." [21]

"Selon la majorité des experts, une structure de tenségrité peut être considérée comme une structure légère." [21]

"Les dômes ingérant des câbles sont très impressionnants et ont donc naturellement contribué à établir la croyance commune selon laquelle toutes les applications architecturales sont légères et particulièrement adaptées pour des structures de longue portée. Cependant les preuves quantitatives réelles d'une telle affirmation sont rares, comme le confirme le très faible nombre de constructions civiles basées sur la tenségrité". [22]

L'inventaire des différents ouvrages réalisés, qu'ils relèvent du domaine de l'architecture ou du génie civil, a déjà permis d'approfondir la compréhension du principe structural de la tenségrité. Toutefois, l'intérêt de la présente étude réside dans l'exploration de la faisabilité d'ouvrages en tenségrité à vocation strictement structurale et relevant purement du domaine de l'ingénierie civil.

Lorsqu'elle est envisagée exclusivement dans le cadre de projets de génie civil, la littérature scientifique décrit la tenségrité comme un système structural novateur et prometteur. Parmi les termes récurrents employés dans les travaux et articles consacrés à ce sujet, celui de légèreté revient de manière systématique. Les structures en tenségrité, par leur esthétique aérienne et épurée, donnent l'impression d'une grande légèreté. Toutefois, cette caractéristique demeure avant tout visuelle et ne repose pas sur une évaluation comparative rigoureuse. À ce jour, aucune étude n'a été menée visant à confronter la tenségrité à un autre système structural sur la base de structures équivalentes, principalement en raison de la rareté d'ouvrages de génie civil réalisés selon ce principe.

Les exemples de structures de génie civil présentés précédemment illustrent clairement les limites actuelles de l'application de la tenségrité en ingénierie. Dans la plupart des cas, les réalisations observées sont soit partiellement conçues selon ce principe (*Kurilpa Bridge*), ce qui ne permet pas de les qualifier pleinement de structures en tenségrité, soit relativement simples et ont donc davantage une vocation architecturale que structurale.

Le présent mémoire se propose donc d'examiner le potentiel de la tenségrité comme solution structurale en génie civil, à l'instar des treillis, en vue de concevoir des ouvrages complexes. L'objectif est de comparer , pour des structures similaires, la tenségrité et les treillis, qui présentent plusieurs similarités, afin de déterminer si, à l'avenir, la tenségrité pourrait constituer un système structural efficace et fiable, au même titre que les systèmes treillis, pour la réalisation d'ouvrages de grande envergure reposant exclusivement sur ce principe, tels qu'une passerelle, une toiture, ou d'autres structures d'envergure.

1.4 Caractéristiques de la tenségrité

Comme mentionné précédemment, la tenségrité est un système structural complexe reposant sur plusieurs concepts fondamentaux : l'équilibre des efforts internes, la distinction entre éléments uniquement soumis à la traction ou à la compression, et l'intégration d'une précontrainte conférant à la structure sa rigidité (Section 1.1). Ces différentes caractéristiques donnent à ce système structural à la fois des avantages et des inconvénients. Ainsi, afin de permettre son application à des ouvrages réels, il est essentiel de maîtriser ces aspects, en exploitant pleinement ses atouts tout en minimisant les impacts négatifs que les inconvénients peuvent engendrer.

1.4.1 Avantages

— **Aspect aérien et esthétique** : L'utilisation de câble dans une structure en tenségrité apporte une impression de légèreté donnant l'illusion que les barres rigides lévitent dans l'espace.

— **Système treillis** : Ce type de structure présente de nombreuses similitudes avec les treillis dont les caractéristiques sont déjà bien connues. Par analogie avec ce système structural, la compréhension de la tenségrité peut être facilitée, ouvrant ainsi la possibilité d'explorer son application aux structures treillis.

— **Déployabilité** : La flexibilité des structures en tenségrité leur confère une capacité de déploiement rapide pour une main-d'œuvre réduite. Cet avantage peut être d'une grande utilité dans le cas de structures temporaires par exemple.

— **Compréhension de la répartition des efforts** : Les efforts internes d'une structure sont par nature invisibles, mais les structures en tenségrité offrent une manière unique de les rendre perceptibles. Grâce à une distinction claire entre les éléments comprimés et tendus, il devient possible de visualiser la répartition des efforts au sein de la structure. Cette caractéristique permet de mieux comprendre l'équilibre et la transmission des forces, offrant ainsi une lecture plus intuitive du comportement structural [13].

1.4.2 Inconvénients

— **Complexité de construction** : La tenségrité est principalement exploitée dans le domaine artistique en raison de sa grande complexité. Son application aux ouvrages de génie civil demeure un défi, tant en ce qui concerne l'analyse de la stabilité que la mise en œuvre pratique de la construction.

— **Instabilité au premier ordre** : Le manque de rigidité des câbles rend la structure instable au premier ordre, ce qui induit un comportement non linéaire. Ainsi, sous l'effet de faibles sollicitations, la structure peut subir de grands déplacements. Pour pallier cette instabilité, l'application d'une précontrainte est indispensable afin d'assurer la rigidité de l'ensemble.

— **Poids propre conséquent** : Malgré son aspect léger et aérien, les structures en tenségrité peuvent généralement avoir un poids propre assez important, comparé par exemple à une structure treillis. En effet, leur manque de rigidité et donc la précontrainte nécessaire, demande l'utilisation d'une quantité de matière plus importante (plus grand nombre de câbles ou dimension des sections plus importante), augmentant donc le poids propre global de l'ouvrage. C'est précisément cet aspect que ce mémoire vise à étudier.

1.4.3 Déployabilité

La déployabilité est une caractéristique qui peut être appliquée à un large éventail de structure différente et peut être définit comme suit : "Deployable structures are defined as structures that have two configurations while always constituting one entity. There exists a compact configuration and then

a deployed configuration with an increased volume or surface area." [5]. Le déploiement de structure est très fort utilisé dans les domaines de la robotique et de l'aérospatial, où l'agilité et la mobilité des modules est recherchée.

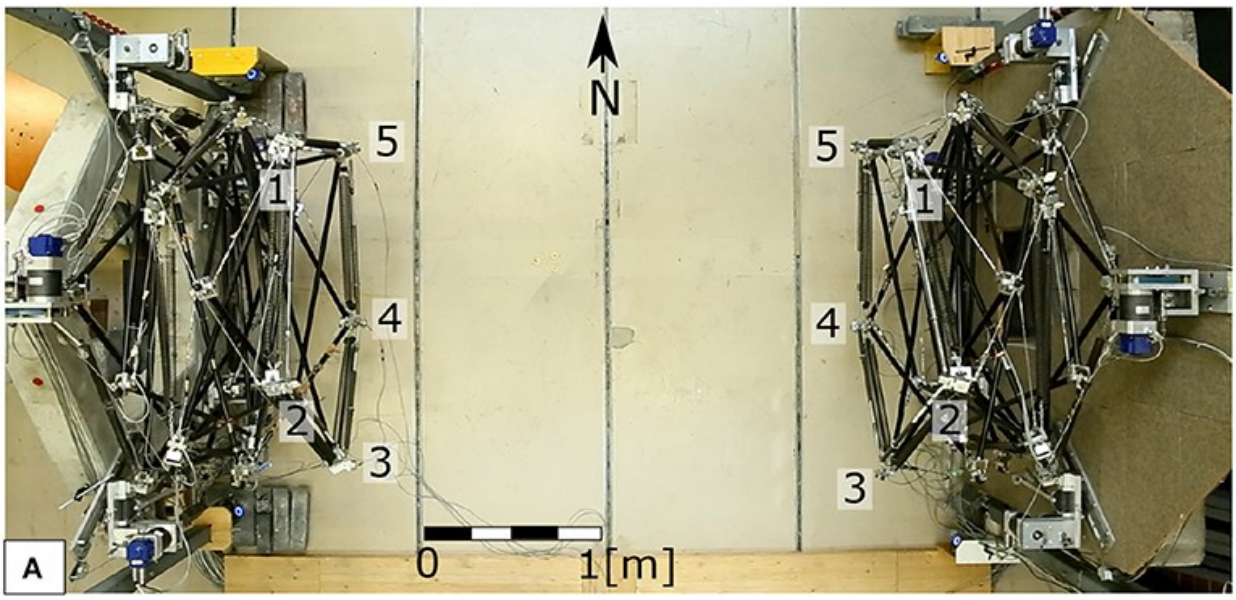


FIGURE 1.9 – Structure en tenségrité déployable dans son état A [23].

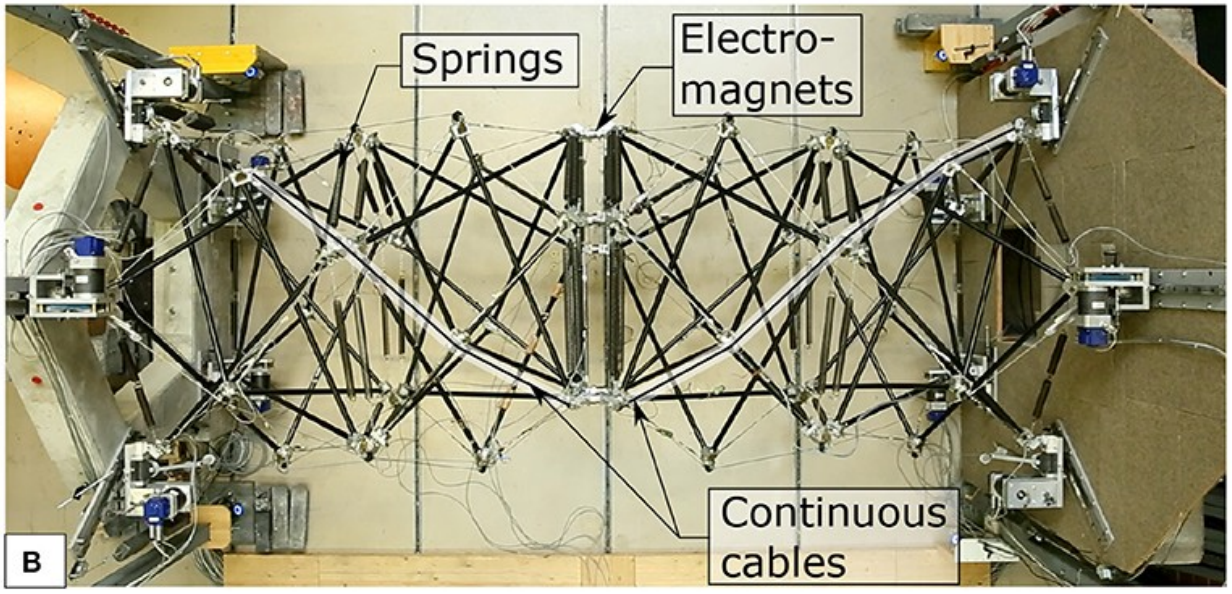


FIGURE 1.10 – Structure en tenségrité déployable dans son état B [23].

Comme mentionné précédemment (Section 1.4.1), cette caractéristique constitue un des avantages majeur des structures en tenségrité. Cette capacité de déploiement leur permettent d'être compactes lorsqu'elles sont rempliées, mais surtout d'être montées et démontées rapidement avec peu de main-d'œuvre. Cette caractéristique peut être un réel avantage pour des structures temporaires ou pour des ouvrages dont les conditions de construction sur chantier sont difficiles.

En 2012, un étudiant de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne réalise une thèse expérimentale sur la conception et l'étude d'une passerelle déployable en tenségrité [24]. Cet ouvrage d'une portée de 16 mètres est composé de deux parties capables de se déployer, permettant ainsi à la passerelle d'obtenir la portée finale requise.

1.5 Les travaux sur la tenségrité à l'UCLouvain

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité d'un ensemble de travaux de recherche menés à l'École Polytechnique de Louvain sous la supervision du Professeur Pierre Latteur, portant sur la thématique de la tenségrité. L'objectif principal de cette série d'études est d'approfondir la compréhension de ce système structural innovant et de démontrer son applicabilité aux ouvrages de génie civil. Ces travaux ont exploré divers aspects de la tenségrité, allant de la modélisation et de l'optimisation des structures à l'étude et à la réalisation d'un prototype. La plupart de ces recherches ont été développées en prenant comme cas d'étude une passerelle piétonne en tenségrité (Figure 1.11). Cet ouvrage constitue ainsi un fil conducteur à travers les différentes études, offrant un cas pratique sur lequel s'appuyer pour valider les recherches menées.

Au cours de l'année académique 2013-2014, Alexis Bastien et Quentin Gravy ont entrepris une étude sur la tenségrité dans le cadre de leur mémoire, visant à modéliser et analyser une passerelle en tenségrité composée de simplex. Ils se sont intéressés aux différentes typologies de modules de base existants, dans le but de les assembler pour former une structure cohérente. Il est apparu que, pour des raisons de simplicité et d'esthétique, le simplex constituait le module unitaire le plus adapté. Toutefois, au cours de leurs travaux, ils ont été confrontés à la non-linéarité inhérente aux structures en tenségrité, rendant l'analyse de la passerelle particulièrement complexe. Malgré cette difficulté, ils ont développé une méthode linéaire permettant d'approximer le comportement de la structure, bien que la fiabilité de leurs résultats puisse être remise en question [25].



FIGURE 1.11 – Passerelle piétonne en tenségrité *Snake Footbridge* [12].

Jonas Feron va quant à lui, lors de l'année académique 2015-2016, poursuivre le développement de cette méthode non-linéaire en concevant un outil numérique complet en *Python*. Ce nouvel outil intègre, en plus du calcul non-linéaire, une méthode d'optimisation basée sur les indicateurs morphologiques développés par Pierre Latteur, adaptée aux structures tri-dimensionnelles précontraintes et non-linéaires. Ses recherches ont permis de confirmer la faisabilité de la passerelle précédemment imaginée, notamment lorsqu'elle est soumise à une charge uniformément répartie sur le tablier [26].

Durant l'année académique 2016-2017, Lindy Boucher continue le travail réalisé l'année précédente en améliorant l'outil de calcul numérique. Il y intègre la prise en compte du poids propre de la structure et explore différentes variantes de passerelles composées d'autres types de module élémentaires (quadruplex, pentaplex, hexaplex). L'étude de ces différentes configurations confirme que le simplex est le module le plus judicieux et le plus efficace, notamment en terme de volume de matière [27].

A travers le mémoire d'Igor Bouckaert, réalisé au cours de l'année académique 2018-2019, la question de l'optimisation des structures en tenségrité est au cœur des recherches. Il étend les résultats obtenus précédemment en étudiant l'optimisation de structures soumises à des charges aléatoires, et montre que l'outil de calcul développé par Jonas Feron est applicable pour les cas de charge les plus défavorables. Il va également démontrer que dans la majorité des cas, les critères de dimensionnement sont les états limites ultimes et non la déformation maximale autorisée par les états limites de service [12].

Au cours de l'année académique suivante, 2019-2020, Alexandre Flamant s'attelle à l'étude de la tenségrité sous forme paramétrique en utilisant un plug-in *Grasshopper*. L'utilisation de l'aspect paramétrique permet de généraliser l'étude des structures en tenségrité en l'étendant à de nouvelles géométries. Il met en lumière, au cours de ces recherches, les limitations de ce logiciel, et propose de nouvelles pistes pour s'affranchir de ces limites. C'est pourquoi Jonas Feron va mettre au point le plug-in *Muscle* qui est spécifique à l'étude et au calcul des structures en tenségrité [28].

L'année académique 2020-2021 marque le début des recherches expérimentales en laboratoire. Romain Antoine et Nicolas Danzin étudient le comportement d'un module simplex en aluminium de deux mètres de hauteur dans des conditions de laboratoire contrôlées. Ces travaux ont constitué une avancée significative dans l'étude de la tenségrité. En confrontant les résultats numériques aux données expérimentales recueillies, ils ont mis en évidence des écarts notables, révélant un certain manque de fiabilité du modèle de calcul existant. Afin de remédier à cette problématique, Jonas Feron a développé au cours de la même année un nouveau programme basé sur la Relaxation Dynamique [29].

Enfin, lors de l'année académique 2022-2023, Théo Houriez et Violette Labrouche vont poursuivre l'étude et la construction de la passerelle piétonne en bambous, sujet d'un étude antérieure. Ils vont donc construire la structure et y introduire de la précontrainte, en s'inspirant le plus fidèlement possible à des conditions réelles de chantier. Leurs objectifs sont multiples, ils veulent pouvoir comparer les résultats expérimentaux avec les résultats de la simulation numérique obtenue à l'aide du plug-in *Muscle* afin de valider la méthode numérique de dimensionnement de la structure, mais aussi de pouvoir développer une méthode d'introduction de précontrainte à une structure en tenségrité [30].

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des travaux menés au cours des dernières années dans le cadre des recherches sur la tenségrité à l'École Polytechnique de Louvain. L'objectif général de cette étude est d'évaluer si les structures en tenségrité peuvent constituer une véritable alternative aux structures treillis, auxquelles elles présentent de nombreuses similitudes sur le plan structural.

En effet, la légèreté perçue des structures en tenségrité pourrait n'être qu'une illusion visuelle, résultant davantage de leur forme ajourée que de leur efficacité mécanique réelle. Afin de lever cette ambiguïté, l'étude proposée repose sur l'optimisation d'une structure élémentaire en tenségrité et sur une comparaison rigoureuse avec une structure treillis géométriquement équivalente, soumise à des conditions de chargement identiques. Cette démarche méthodique permettra d'évaluer objectivement les performances respectives de ces deux types de structures, tant en termes de volume que de rigidité, et d'apporter une réponse argumentée à la question de leur potentiel relatif.

CHAPITRE 2 :

MÉTHODES DE CALCUL ET LOGICIELS DE MODÉLISATION POUR LES STRUCTURES EN TENSÉGRITÉ

2 Méthodes de calcul et logiciels de modélisation pour les structures en tenségrité

Ce chapitre vise à présenter les différentes méthodes de calcul ainsi que les logiciels existants permettant l'étude des structures en tenségrité. Comme mentionné à plusieurs reprises dans ce mémoire, le comportement non-linéaire de ce type de système structural complique son analyse et son dimensionnement à l'aide des méthodes classiques et des logiciels commerciaux couramment utilisés. Il est donc nécessaire de recourir à des approches alternatives, tant sur le plan méthodologique que logiciel, pour mener à bien le calcul de ces structures.

Dans ce chapitre, bien qu'une seule méthode soit effectivement mise en œuvre dans le cadre de ce travail, deux approches seront présentées afin d'illustrer la diversité des possibilités disponibles. L'explication et l'analyse de ces méthodes s'appuient largement sur les différents mémoires antérieurs consacrés à l'étude des structures en tenségrité.

Après avoir détaillé les différentes méthodes de calcul existantes, qui seront utilisées tout au long de cette étude, une attention particulière sera portée au logiciel *Grasshopper*. Ce dernier constitue un outil de modélisation et de calcul particulièrement adapté à l'étude des structures en tenségrité. Cette section abordera également les outils et techniques développés au sein de *Grasshopper* par **Jonas Feron**, destinés spécifiquement à l'analyse et au dimensionnement de telles structures. Enfin, une explication sera fournie quant à l'usage concret de ce logiciel dans le cadre de ce mémoire.

2.1 Méthode non-linéaire des éléments finis

Cette section présente une méthode non-linéaire aux éléments finis permettant d'étudier les structures en tenségrité. Cette approche constitue la base méthodologique de toutes les autres méthodes de calcul des structures en tenségrité. La section s'inspire du mémoire de **Igor Bouckaert** "Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires" [12] et du mémoire de **Alexandre Flamant** "Design, calcul et optimisation sur base d'une approche paramétrique" [28].

2.1.1 Non-linéarité des structures en tenségrité

Un des éléments définissant les structures en tenségrité est leur comportement non-linéaire. Cette non-linéarité peut avoir deux origines :

— Non-linéarité matérielle : Ce phénomène illustre le comportement du matériau lorsque celui-ci est soumis à des charges externes, et que les contraintes induites engendrent un dépassement de sa limite d'élasticité. Concrètement cela signifie que les déformations subies par le matériau sont irréversibles et on n'a donc plus la relation linéaire décrite par la loi de Hook $\sigma = E\epsilon$.

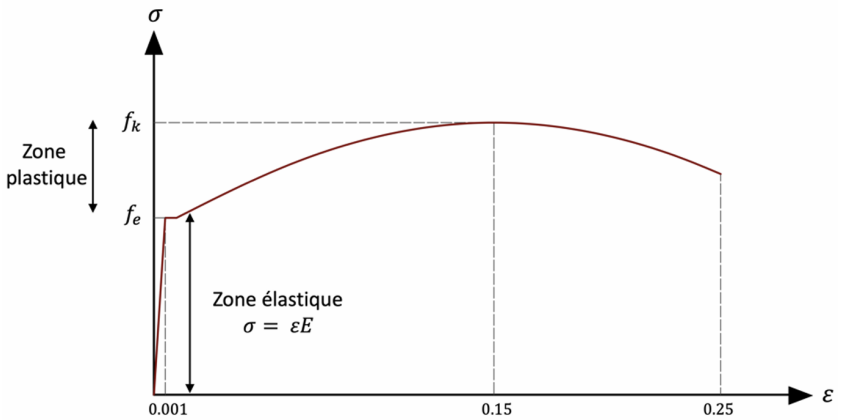


FIGURE 2.1 – Relation contrainte σ-déformation ϵ de l'acier [31].

— Non-linéarité géométrique : Ce phénomène met en évidence l'ampleur des déformations que peut subir une structure. Les structures en tenségrité sont fortement concernées en raison de la faible rigidité des câbles qui les composent, ce qui entraîne des déformations significatives. Ces modifications géométriques influencent directement l'analyse structurale, rendant nécessaire la prise en compte de la configuration déformée dans les calculs. Dans la plupart des situations, la géométrie déformée demeure relativement proche de la configuration initiale. Il est alors admis d'utiliser la géométrie non-déformée comme approximation de la géométrie finale, ce qui permet d'appliquer un calcul au premier ordre. En revanche, lorsque les déformations sont plus importantes, elles engendrent l'apparition de nouvelles contraintes internes, qui à leur tour provoquent d'autres déformations. Cette interaction conduit à un processus itératif de calcul, visant à atteindre une configuration déformée stable. Une telle approche relève alors d'un calcul au second ordre.

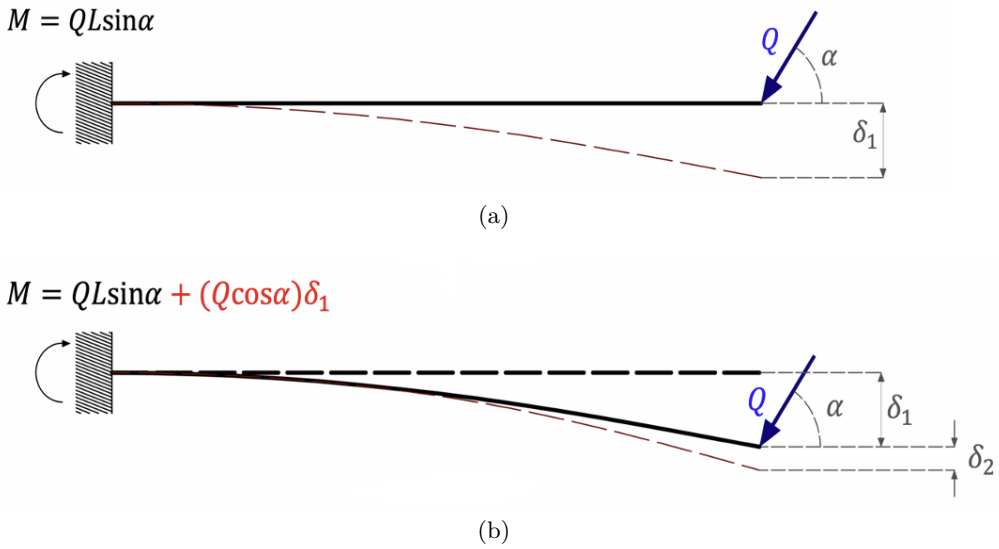


FIGURE 2.2 – Calcul au premier ordre (a), calcul au second ordre (b) [31].

2.1.2 Développement de la méthode

De manière générale, la méthode des éléments finis permet, dans le cadre de l'analyse structurale, de déterminer les efforts internes ainsi que les déplacements nodaux, en réponse à des charges extérieures appliquées à la structure. Elle repose sur la résolution d'un système d'équations traduisant les conditions d'équilibre aux différents nœuds de la structure.

Dans cette section, seule la méthode non-linéaire des éléments finis est présentée, car elle s'avère particulièrement adaptée à l'étude des structures en tenségrité, dont le comportement mécanique est fortement non-linéaire, et impliquant donc un calcul au premier ordre impossible. Toutefois, la méthode linéaire constitue une introduction pertinente pour en comprendre les principes fondamentaux et en faciliter l'approche. Celle-ci est donc brièvement exposée dans l'Annexe A.

2.1.3 Principe d'avancement de la solution

La méthode non-linéaire des éléments finis repose sur le principe d'avancement de la solution. Plus précisément, la charge totale appliquée à la structure $\bar{F}_{ext}$ est divisée en un certain nombre d'incréments ΔF qui seront appliqués successivement à la structure.

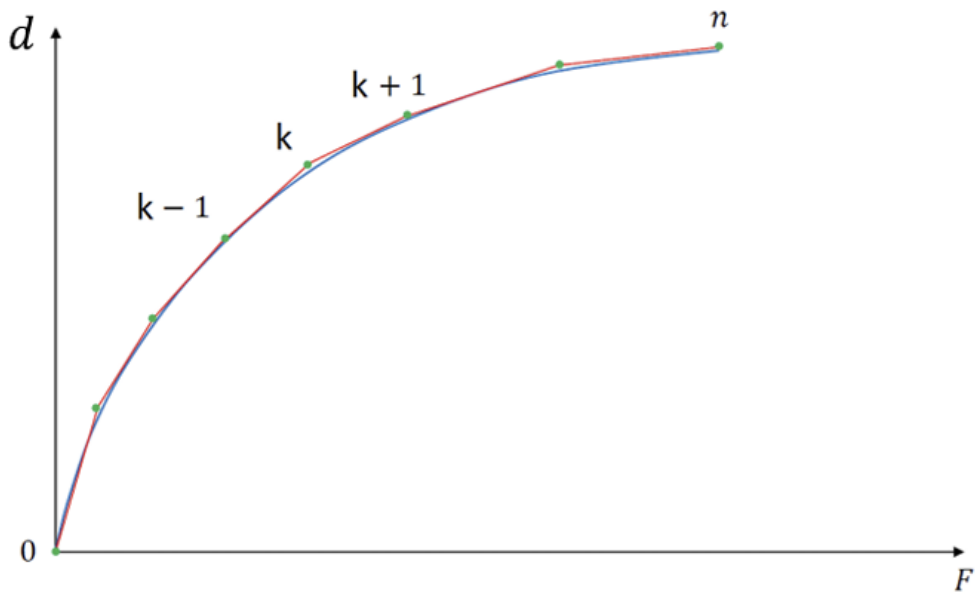


FIGURE 2.3 – Principe d'avancement de la solution par incréments ΔF_k [27].

À partir de la configuration initiale de la structure, un incrément de charge ΔF_k est appliqué à chaque étape k. Sur la base de cette charge, la méthode linéaire des éléments finis (voir Annexe A) est utilisée pour déterminer les efforts internes ΔN_k ainsi que les déplacements nodaux $\Delta\delta_k$ induits. La configuration ainsi obtenue devient alors le nouvel état initial pour l'application de l'incrément de charge suivant ΔF_{k+1}. Ce processus est répété jusqu'à ce que la charge totale appliquée $\bar{F}_{k+1}$ atteigne la charge extérieure prescrite $\bar{F}_{ext}$.

Cette approche permet une progression itérative vers la solution finale. Ainsi, la charge appliquée, les efforts internes et les déplacements nodaux évoluent de manière incrémentale selon le schéma suivant :

$$\begin{cases} \bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta F_k \\ \bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta N_k \\ \bar{\delta}_{k+1} = \bar{\delta}_k + \Delta\delta_k \end{cases} \tag{1}$$

La méthode non-linéaire des éléments finis consiste ainsi en une succession d'incréments au cours desquels la méthode linéaire des éléments finis est utilisée à chaque étape. La solution obtenue par cette approche incrémentale converge de manière satisfaisante vers la solution finale, à condition que le nombre total d'incréments n soit suffisamment élevé. À l'inverse, la méthode linéaire peut être interprétée comme un cas particulier où $n = 1$.

2.1.4 Matrice de raideur locale et globale

L'expression de la matrice de raideur, dans le cadre de la méthode non-linéaire des éléments finis, telle que présentée dans le mémoire d'Igor Bouckaert, intitulé "Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires" [12], repose sur le développement théorique proposé par Pierre Latteur, Jonas Feron et Vincent Denoel dans leur article "A design methodology for lattice and tensegrity structures based on a stiffness and volume optimization algorithm using morphological indicators" [32]. La démonstration détaillée de cette approche ne sera toutefois pas reproduite ici, dans la mesure où la méthode de résolution qu'elle implique ne sera pas retenue dans le processus d'optimisation développé dans ce mémoire.

Étant donné le comportement non-linéaire, la raideur de la structure varie à chaque incrément k. C'est pourquoi, la matrice de rigidité locale associée à l'élément dont les extrémités sont les nœuds i et j est composée de deux termes :

— Terme élastique qui correspond à la matrice de rigidité dans le cas linéaire (voir Annexe A).
— Terme géométrique qui prend en considération les non-linéarités de la structure. Cette partie de la matrice de raideur est dépendante des efforts internes présents dans la structure.

La matrice de raideur locale d'un élément de la structure, dans le cas de la méthode non-linéaire a donc la forme suivante :

$$\bar{K}_{k,loc} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c_x^2 & c_xc_y & -c_x^2 & -c_xc_y \\ c_xc_y & c_y^2 & -c_xc_y & -c_y^2 \\ -c_x^2 & -c_xc_y & c_x^2 & c_xc_y \\ -c_xc_y & -c_y^2 & c_xc_y & c_y^2 \end{bmatrix} + \frac{N_k}{L_k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_x = cos\theta = \dfrac{X_{j,k} - X_{i,k}}{L_k} \\ c_y = sin\theta = \dfrac{Y_{j,k} - Y_{j,k}}{L_k} \end{cases} \tag{3}$$

Une fois la matrice de raideur locale déterminée pour chaque élément de la structure à l'incrément k, l'assemblage de la matrice de raideur globale s'effectue selon une procédure analogue à celle employée dans le cas linéaire (voir Annexe A). Il en va de même pour la prise en compte des conditions aux limites. La résolution du système d'équations ainsi obtenu permet alors, par le biais d'une méthode linéaire, d'obtenir le résultat correspondant à cet incrément.

2.1.5 Avancement dans la solution

Le mécanisme de progression vers la solution repose sur l'utilisation de plusieurs paramètres fondamentaux, qui n'ont pas encore été définis. L'objectif de cette section est donc de présenter ces paramètres et d'exposer le principe d'avancement dans le cadre de la méthode incrémentale.

Les principaux paramètres intervenant dans cette méthode sont les suivants :

— λ : Il s'agit d'un paramètre scalaire, sans dimension, qui représente l'état d'avancement du processus de chargement. Il varie de 0 (état initial, sans chargement) à 1 (état final, où l'ensemble de la charge extérieure $\bar{F}_{ext}$ a été appliquée).

— $\bar{p} = \frac{\delta \bar{F}_{ext}}{\delta \lambda}$: Ce paramètre désigne le vecteur de chargement incrémental. Il est généralement considéré comme constant et indépendant de λ. Dans le cas présent, on suppose que la charge incrémentale appliquée à chaque itération est égale à la charge extérieure totale, soit $\bar{p} = \bar{F}_{ext}$.

— $\bar{v} = \frac{\delta \bar{u}_k}{\delta \lambda}$: Ce dernier paramètre, appelé vélocité incrémentale, représente le taux de variation du déplacement nodal par rapport au paramètre d'incrémentation λ. Il est, par définition, tangent au chemin de solution à chaque pas incrémental k. Cette vélocité s'obtient par la résolution du système linéaire suivant : $\bar{v} = \bar{K}_k^{-1}\bar{p} = \bar{K}_k^{-1}\bar{F}_{ext}$. Ainsi, $\bar{v}$ correspond aux déplacements nodaux induits par l'application des charges externes sur la structure déformée de raideur $\bar{K}_k$.

Une fois ces paramètres définis, le principe d'avancement incrémental peut être développé. Celui-ci consiste à appliquer progressivement les charges extérieures afin de converger vers la solution finale. À chaque itération, un incrément de charge donné par : $\Delta\bar{F}_k = \bar{p}\Delta\lambda = \bar{F}_{ext}\Delta\lambda$ est appliqué à la structure. Cet incrément de charge induit à son tour un incrément de déplacement : $\Delta\bar{u}_k = \bar{v}\Delta\lambda$ et un incrément des efforts internes : $\Delta\bar{N}_k = \bar{N}\Delta\lambda$ où $\bar{N}$ représente le vecteur des efforts normaux résultant de l'application de la charge totale $\bar{F}_{ext}$. L'incrément d'effort interne $\Delta\bar{N}_k$ est donc déterminé à partir de l'incrément de déplacement.

On a donc, à chaque itération k, une situation définie par des incréments $\Delta\bar{F}_k$, $\Delta\bar{u}_k$ et $\Delta\bar{N}_k$ qui devient donc la nouvelle situation initiale permettant d'obtenir la situation suivante à l'incrément $k+1$. Toute la complexité réside dans le choix de $\Delta\lambda$, qui doit être suffisamment petit pour que la situation $k+1$ soit proche de la situation précédente k et que la solution numérique converge vers la solution physique.

k	$k+1$
$\Delta\bar{F}_k = \bar{F}_{ext}\Delta\lambda$	$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta\bar{F}_k$
$\Delta\bar{u}_k = \bar{v}\Delta\lambda$	$\bar{u}_{k+1} = \bar{u}_k + \Delta\bar{u}_k$
$\Delta\bar{N}_k = \bar{F}_{ext}\Delta\lambda$	$\bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta\bar{N}_k$

TABLE 1 – Passage de l'incrément k et à l'incrément $k+1$

2.1.6 Équation de contrainte $\Delta\lambda$

Comme indiqué explicitement à la fin de la section précédente, le choix du pas d'incrémentation $\Delta\lambda$ est d'une importance cruciale pour garantir une progression efficace vers la solution. En effet, une sélection inadéquate de ce paramètre peut compromettre la stabilité ou la convergence de la méthode. Afin de déterminer une valeur appropriée de $\Delta\lambda$, il est nécessaire de résoudre une équation de contrainte. Plusieurs formulations de telles équations existent, permettant de fixer ce paramètre en fonction des objectifs ou des contraintes spécifiques du problème étudié :

— Contrainte de chargement
— Contrainte de déplacement
— Contrainte *Arclength*

Il a été démontré dans le mémoire de Lindy Boucher, intitulé "Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques" [27], que parmi les différentes équations de contrainte disponibles, seule la contrainte dite *Arclength* s'est révélée véritablement pertinente, en raison de son efficacité supérieure. En comparaison, les deux autres méthodes de contrainte présentent certains inconvénients, notamment la possibilité de générer un point d'itération $k+1$ trop éloigné du point précédent k, compromettant ainsi la stabilité du processus. Par conséquent, seule l'équation de contrainte *Arclength* sera retenue et développée dans cette section.

L'équation de contrainte *Arclength* possèdent les avantages des deux autres types de contrainte, sans pour autant en avoir les inconvénients. Cette équation peut s'exprimer comme :

$$\frac{1}{\sqrt{1+||\bar{v}||^2}}|\bar{v}^t\Delta\bar{u}_k + \Delta\lambda| = l \tag{4}$$

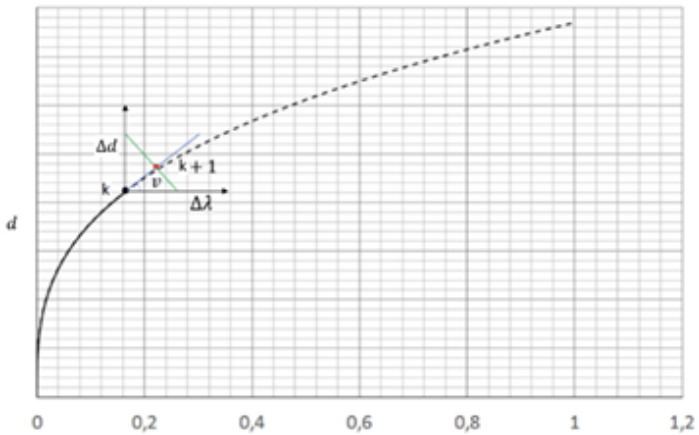


FIGURE 2.4 – Interprétation graphique de la contrainte [27].

La force de cette contrainte est qu'elle fonctionne quelque soit la rigidité de la structure. Ce qui n'est pas le cas des deux autres méthodes. En effet, lorsque la rigidité de la structure est faible, $||\bar{u}_k|| \to \infty$. L'Équation 4 devient alors : $||\Delta\bar{u}_k|| = l$, ce qui évite de trop grands déplacements à chaque itération. De même, lorsque la rigidité structurale est importante, $|\bar{v}| \to 0$, ce qui induit une modification de l'Équation 4 tel que : $|\Delta\lambda| = l$. Cette méthode combine donc à la fois les avantages des deux autres méthodes, qui sont développées dans l'Annexe C de [27].

Finalement, la nouvelle situation $k+1$ peut être déterminée en résolvant le système :

$$\begin{cases} \Delta\bar{u}_k = \bar{v}\Delta\lambda \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+||\bar{v}||^2}}|\bar{v}^t\Delta\bar{u}_k + \Delta\lambda| = l \end{cases} \Rightarrow |\Delta\lambda| = \frac{l}{\sqrt{1+||\bar{v}||^2}} \tag{5}$$

Il apparaît donc clairement que le choix de la valeur de $\Delta\lambda$ joue un rôle déterminant dans la convergence de la solution. Toutefois, au-delà de ce paramètre, la sélection de la longueur d'incrémentation l revêt également une importance majeure. Cette valeur doit être déterminée de manière judicieuse afin d'établir un compromis adéquat entre la précision de la solution obtenue et le temps de calcul requis pour y parvenir. Dans le cas particulier d'une structure de tenségrité composée de modules simplex, il a été démontré que la valeur $l = 0,01$ [12] constitue un choix pertinent, permettant de limiter l'erreur à un niveau acceptable tout en conservant une longueur d'incrémentation suffisamment faible.

2.1.7 Méthode linéaire adaptée

Après avoir défini l'ensemble des paramètres de la structure — à savoir la géométrie, les sections des éléments, les charges appliquées ainsi que les conditions aux appuis — une valeur de l est fixée, et l'indice d'avancement k est initialisé à 0.

À chaque itération k, la méthode linéaire des éléments finis est employée afin de déterminer l'état de la structure, lequel servira d'état initial pour l'itération suivante. Cette démarche nécessite tout d'abord le calcul des matrices de raideur locales $\bar{K}_{k,loc}$, modifiées pour prendre en compte le comportement non linéaire, permettant ensuite la construction de la matrice de raideur globale $\bar{K}_k$.

Cependant, cette dernière peut devenir singulière lorsque la rigidité de la structure est nulle. Il est alors nécessaire d'introduire une légère perturbation dans le système afin d'éviter cette singularité. Comme il sera détaillé dans la section 4.1.1, le simplex présente une rigidité nulle lorsque l'angle α atteint 30 [°] ; pour cette raison, la valeur initiale adoptée sera légèrement supérieure, soit $\alpha = 30.001$ [°].

Le système ainsi modifié peut alors être résolu à l'aide d'un algorithme proche de celui présenté en Annexe A, permettant de déterminer la vélocité incrémentale $\bar{v}$ ainsi que les réactions aux appuis $\bar{r}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_k & \bar{c}^t \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{D} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Les efforts internes $\bar{N}$ sont ensuite obtenus par post-traitement des résultats.

Une fois la vélocité incrémentale obtenue, on calcule le paramètre d'incrémentation grâce à l'équation de contrainte *Arclength* tel que :

$$|\Delta\lambda| = \frac{l}{\sqrt{1+||\bar{v}||^2}} \Leftrightarrow \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda \tag{7}$$

On peut dès lors avancer dans la solution et réitérer ce développement à l'incrément suivant.

Le processus itératif est interrompu lorsque la condition $\lambda_{k+1} = 1$ est satisfaite, ce qui correspond à l'application complète de la charge externe sur la structure. Une fois cette condition atteinte, les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes finaux peuvent être déterminés.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque la charge appliquée reste inférieure à la valeur cible, une nouvelle itération est effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis linéaire adaptée, en considérant le point suivant $k + 1$.

Il convient de noter que la méthode autorise, par construction, une valeur de λ_{k+1} supérieure à 1, ce qui entraînerait une surcharge par rapport à la charge externe visée. Afin de garantir la précision des résultats et de respecter strictement la condition d'arrêt, un critère de vérification spécifique a été introduit pour s'assurer que $\lambda = 1$ soit atteint de manière exacte.

Par ailleurs, afin de prévenir les risques de non-convergence, un nombre maximal d'itérations $k_{\max}$ est imposé, au-delà duquel le calcul est automatiquement interrompu : $k_{max} = \frac{10}{l}$. Cette valeur de k_{max} est suffisante pour permettre à la méthode de converger malgré les déformations importantes de la structure étudiée.

2.1.8 Algorithme de la méthode non linéaire des éléments finis

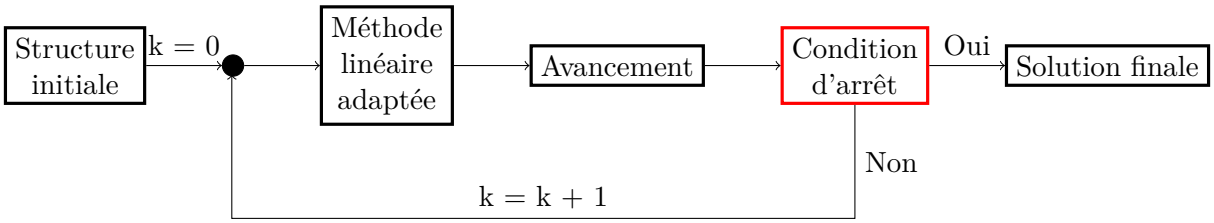


FIGURE 2.5 – Algorithme de la méthode non linéaire des éléments finis [27].

2.2 Méthode de la Relaxation Dynamique

Cette méthode numérique se distingue des autres approches de résolution existantes par sa capacité à intégrer le poids propre de la structure dans le calcul des efforts internes et des déplacements nodaux.

L'objectif principal de cette méthode est de déterminer les efforts internes ainsi que les déplacements des nœuds résultants de l'application des charges extérieures et du poids propre. La méthode de Relaxation Dynamique (qui sera nommée *RD* dans la suite de ce mémoire) repose sur un principe dit de form-finding, particulièrement pertinent pour l'analyse de structures sollicitées principalement en traction, telles que les structures en tenségrité. Ce principe permet, sous l'effet des charges appliquées, de réévaluer les coordonnées des nœuds afin d'aboutir à une configuration géométrique dans laquelle les efforts internes sont en équilibre avec les forces extérieures. En d'autres mots, cette méthode accepte les grands déplacements de la structure sous l'effet des charges qui lui sont appliquées, et tente ainsi, de trouver la géométrie idéale dans laquelle la structure est à l'équilibre.

Pour cela, la méthode modélise la structure à l'aide d'éléments finis et reformule le problème statique en un problème pseudo-dynamique. Le système ainsi obtenu simule le comportement d'une structure oscillant autour d'une position d'équilibre, et ce de manière itérative, jusqu'à atteindre une configuration stable dans laquelle les oscillations sont amorties et l'équilibre est atteint.

L'équation caractéristique de la méthode de la *RD* peut être formulée comme suit [33] :

$$\{f\} - [A]\{t\} = [M]\{\dot{v}\} + [C]\{v\} \tag{8}$$

Avec :

— $\{f\} - [A]\{t\}$ correspondants aux efforts résiduels évalués en chaque noeud. C'est-à-dire les efforts externes n'étant pas en équilibre avec les efforts internes de la structure dans sa géométrie déformée considérée.
— $\{\dot{v}\}$ et $\{v\}$ correspondants à l'accélération et la vitesse en chacun des nœuds.
— $[M]$ et $[C]$ correspondant aux masses nodales et à l'amortissement fictif de la structure.

L'algorithme a été implémenté en langage *Python* au sein de l'environnement *Grasshopper*, dans le but de permettre une analyse paramétrique des structures en tenségrité. Cette approche offre la possibilité de déterminer en temps réel la déformation de la structure, les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes, tout en assurant une paramétrisation souple et efficace. Cela permet d'explorer un large éventail de configurations structurales de manière rapide et optimisée.

Cette méthode de résolution sera ainsi employée tout au long du présent mémoire pour l'analyse et l'optimisation des structures en tenségrité. Les plug-ins complémentaires utilisés ainsi que la mise en œuvre concrète dans *Grasshopper* feront l'objet d'une présentation détaillée dans la section suivante.

2.3 Logiciel Grasshopper

Comme mentionné précédemment, la méthode de la *RD* constitue l'outil principal utilisé dans le cadre de ce mémoire pour l'ensemble des processus d'analyse et d'optimisation des structures en tenségrité et des structures treillis. Sa mise en œuvre est possible par l'intermédiaire du logiciel *Grasshopper*, dans lequel cette méthode est intégrée, via le plug-in *Muscle*, développé par **Jonas Feron**.

L'utilisation de *Grasshopper* pour la modélisation et l'analyse des structures en tenségrité présente de nombreux avantages. En particulier, son interface graphique intuitive et ses fonctionnalités de conception paramétrique permettent de définir la géométrie de la structure de manière souple et interactive. Cette approche paramétrique facilite considérablement les modifications de configuration sans nécessiter une re-modélisation complète de la structure.

Prenons, à titre d'exemple, un simplex, structure basique en tenségrité qui sera définit rigoureusement dans le Chapitre 4, défini par ses nœuds dans l'espace, et dont les barres et câbles sont représentés par les liaisons entre ces nœuds. Si l'on souhaite augmenter la taille du simplex, la paramétrisation garantit que, même après déplacement des trois nœuds supérieurs de la structure, les éléments de liaison (barres/câbles) restent attachés aux nœuds déplacés et non à leurs positions d'origine. Cela permet une adaptation dynamique de la géométrie, essentielle dans le cadre d'une optimisation structurale.

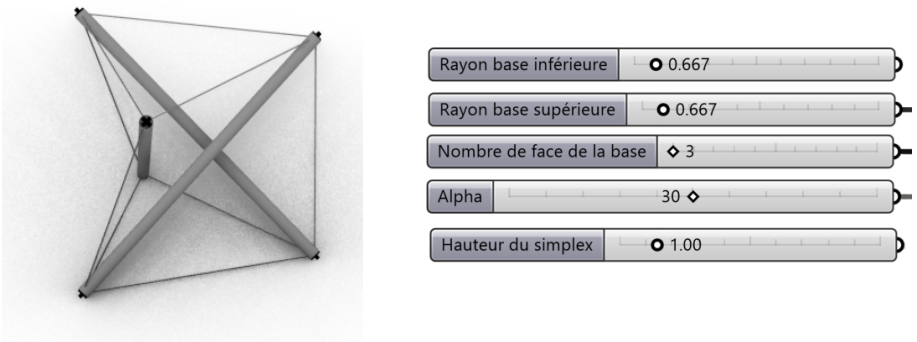


FIGURE 2.6 – Simplex avec une certaine hauteur modélisé de façon paramétrique dans *Grasshopper*.

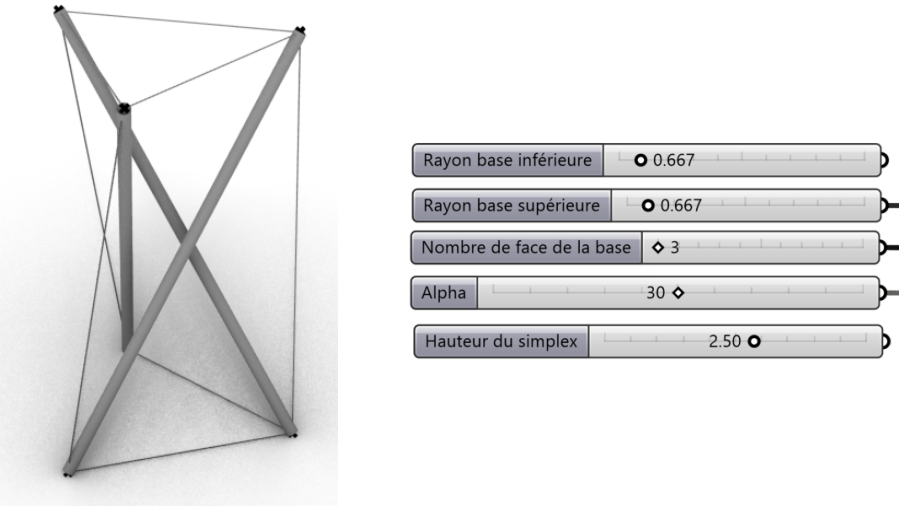


FIGURE 2.7 – Simplex avec une certaine hauteur modélisé de façon paramétrique dans *Grasshopper*.

Maintenant que l'utilité de *Grasshopper* a été présentée, cette section a pour objectif de présenter les différents plug-ins utilisés au sein de l'environnement *Grasshopper* pour l'analyse et l'étude des structures en tenségrité.

2.3.1 Plug-in *Muscle*

Développé par Jonas Feron, le plug-in *Muscle* permet l'analyse, l'étude et l'optimisation de structures en tenségrité. Il repose sur l'intégration de divers outils de calcul permettant de déterminer les déplacements nodaux et les efforts internes d'une structure présentant un comportement non linéaire. Ce plug-in a déjà démontré sa pertinence et son efficacité dans plusieurs travaux de recherche, notamment dans l'article coécrit par Jonas Feron, Basile Payen, João Almeida et Pierre Latteur, intitulé "MUSCLE : a new open-source *Grasshopper* plug-in for the interactive design of tensegrity structures", dans lequel une comparaison rigoureuse entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques obtenus avec *Muscle* est présentée [34].

Muscle propose un large éventail de méthodes de calcul, parmi lesquelles figurent les méthodes linéaires et non linéaires aux éléments finis, la méthode de la *RD*, ainsi que la méthode des Self-Stress Modes (qui n'est pas présenté dans ce mémoire mais qui a été défini de manière détaillée dans le mémoire de Théo Houriez et Violette Labrouche : "Étude expérimentale d'une structure en tenségrité" [30]) . Il combine ainsi une modélisation paramétrique flexible avec une approche par éléments finis à la fois robuste et performante.

Pour mener à bien l'étude et l'analyse d'une structure en tenségrité à l'aide de ce plug-in, plusieurs modules spécifiques doivent être mobilisés afin de définir avec précision la géométrie de la structure et ses propriétés mécaniques. Dans cette section, seuls les modules liés à la méthode de la *RD* seront présentés, dans la mesure où cette méthode constitue le cœur de l'approche adoptée pour l'analyse et l'optimisation des structures étudiées dans ce mémoire. Ces modules seront introduits de manière progressive et ordonnée, en suivant le déroulement logique de la méthode de résolution, afin de bien comprendre le rôle et l'articulation de chacun d'eux au sein du processus global.

Avant de procéder à la présentation détaillée des différents modules, il convient de schématiser la procédure générale à suivre dans *Grasshopper* pour utiliser *Muscle* sur une structure modélisée de manière paramétrique. Une fois la géométrie de la structure définie, *Muscle* permet d'associer aux éléments constitutifs de cette structure des caractéristiques matérielles et géométriques (module de Young, diamètre,...). Une fois ces éléments définis, une précontrainte est appliquée à la structure. Un premier calcul à l'aide de la méthode de la *RD* est alors effectué, afin d'évaluer les efforts internes ainsi que les déplacements nodaux résultant de cette précontrainte.

Sur la base de cette géométrie déformée, induite par la précontrainte, on applique ensuite les efforts extérieurs ainsi que le poids propre de la structure. Une seconde analyse à l'aide de la *RD* est alors réalisée, permettant d'obtenir la géométrie finale déformée de la structure, les déplacements nodaux finaux ainsi que les efforts internes totaux générés. Le schéma présenté à la Figure 2.8 illustre cette procédure avec en noir les étapes concernant uniquement *Grasshopper* et en bleu celles liées à *Muscle* et la *RD*.

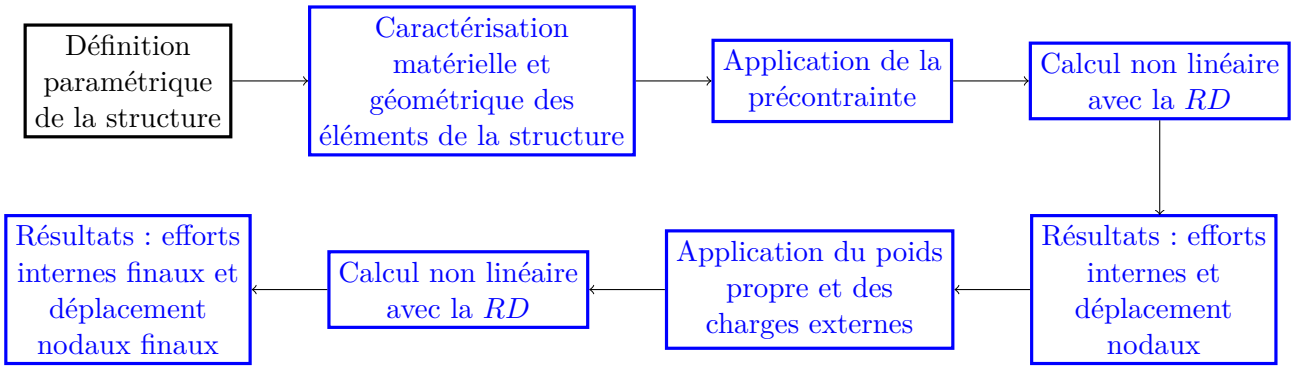


FIGURE 2.8 – Procédure de résolution d'une structure en tenségrité à l'aide de la *RD* et de *Muscle* sur le logiciel *Grasshopper*.

Modules matériau et section :

Après avoir défini la géométrie de la structure de façon paramétrique dans *Grasshopper*, il est nécessaire de définir les sections des éléments de cette structure, et leurs caractéristiques mécaniques. Le module Matériau permet dès lors de définir le module de Young E, la résistance caractéristique f_y des barres et des câbles de la structure, et leur masse volumique ρ (ici initialisée à zéro car le poids propre sera pris en compte lors de l'application des charges externes).

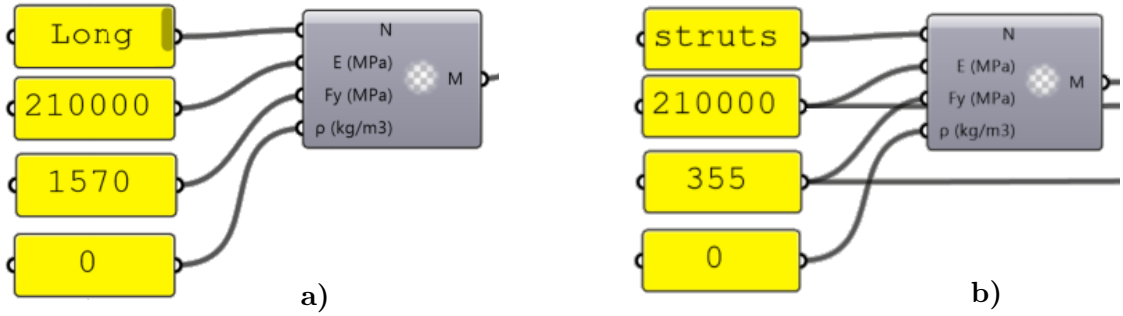


FIGURE 2.9 – Initialisation des caractéristiques mécaniques des câbles (a) et des barres (b).

Le module section quant à lui permet tout simplement de définir le diamètre des câbles, le diamètre et l'épaisseur des barres.

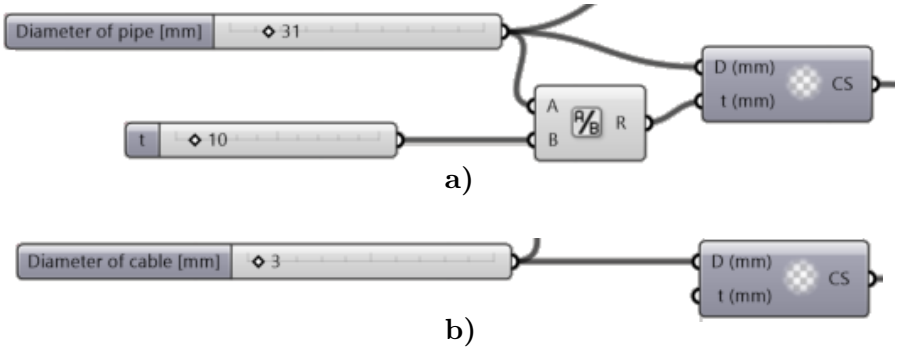


FIGURE 2.10 – Initialisation des sections de barres (a) et de câbles (b).

Modules barre et câble :

Ces deux modules permettent de modéliser et de configurer la géométrie de la structure par éléments finis. C'est-à-dire que sur base des lignes géométriques qui définissent les barres et les câbles (L), des longueurs de ces lignes (Free L), des sections (CS) et des matériaux choisis (M), ces modules vont générer par éléments finis les barres et câbles qui composent la structure. Concernant le module barre, il est possible d'y ajouter les propriétés de flambement (Buckl law, k), et pour le module câble il est possible d'autoriser ou de refuser de la compression dans les câbles (Allow Comp).



a) **b)**

FIGURE 2.11 – Initialisation des éléments câbles (a) et barres (b).

Module structure :

Sur base des éléments définis précédemment à l'aide des modules barre et câble, il est possible de définir la structure globale. L'input E permet d'introduire les éléments constitutifs de la structure, ici les barres et les câbles définis par les deux modules présentés ci-dessus. L'input Pt concerne les nœuds définissants la structure, c'est-à-dire les points de jonction entre les différentes éléments de celle-ci. Finalement l'input Spt concerne la définition des appuis, c'est-à-dire des nœuds qui seront bloqués dans une ou plusieurs directions de l'espace.

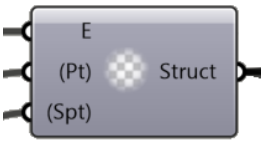


FIGURE 2.12 – Définition de la structure globale sur bas des éléments qui la composent.

Module précontrainte :

Ce module permet l'introduction de précontrainte dans la structure soit par allongement des éléments barres ou un raccourcissement des éléments câbles (DL). L'input E permet de choisir les éléments auxquels on applique de la précontrainte.

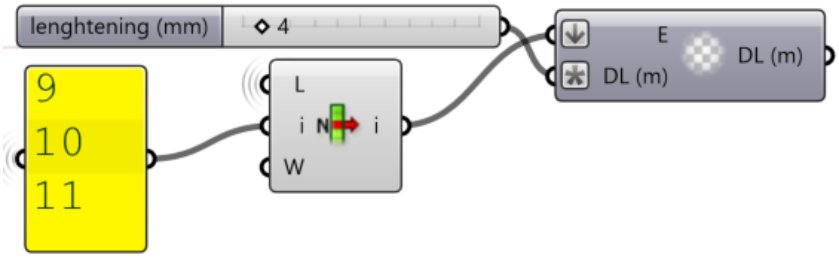


FIGURE 2.13 – Introduction de précontrainte dans les éléments barre.

Module application de charge :

Ce module permet d'appliquer les charges externes et le poids propre à la structure. Via l'input P, on définit les nœuds auxquels une charge sera appliquée. L'input V, quant à lui, correspond à un vecteur définissant l'orientation spatiale et la valeur de la force appliquée. L'output Load de ce module va finalement décrire les charges, leur orientation et les nœuds auxquels elles s'appliquent.



FIGURE 2.14 – Introduction de précontrainte dans les éléments barre.

Module de calcul :

Ce dernier module constitue l'élément central du processus de calcul. Il permet, à l'aide de la méthode de la *RD* décrite en Section 2.2, de déterminer les efforts internes ainsi que les déplacements nodaux de la structure soumise à une précontrainte initiale. Une première simulation est effectuée en appliquant uniquement cette précontrainte.

Par la suite, il est possible d'intégrer le poids propre de la structure ainsi que les charges extérieures. En appliquant à nouveau le même processus de calcul, la méthode permet d'obtenir la configuration déformée finale de la structure ainsi que les efforts internes correspondants, résultants de l'action combinée de la précontrainte, du poids propre et des charges appliquées.

Les inputs struct, Load et Delta L sont ceux qui nous intéressent : le premier prend en entrée la structure qui a été définie à l'aide du module structure, le second prend en compte les charges appliquées et le poids propre de la structure. Le dernier correspond à la précontrainte définie par le module précontrainte. On aura donc dans un premier temps ce module de calcul avec le troisième input vide étant donné qu'on ne considère que l'application de la précontrainte. Dans un second temps, un deuxième module de calcul aura l'input Delta L vide étant donné que la précontrainte aura déjà été appliquée précédemment.

L'interface de dessin de *Rhino*, dans lequel est intégré *Grasshopper*, permet de visualiser la déformée de la structure, avec les éléments en compression en rouge, et les éléments en traction en bleu, résultant du passage par le module de calcul utilisant la *RD*.

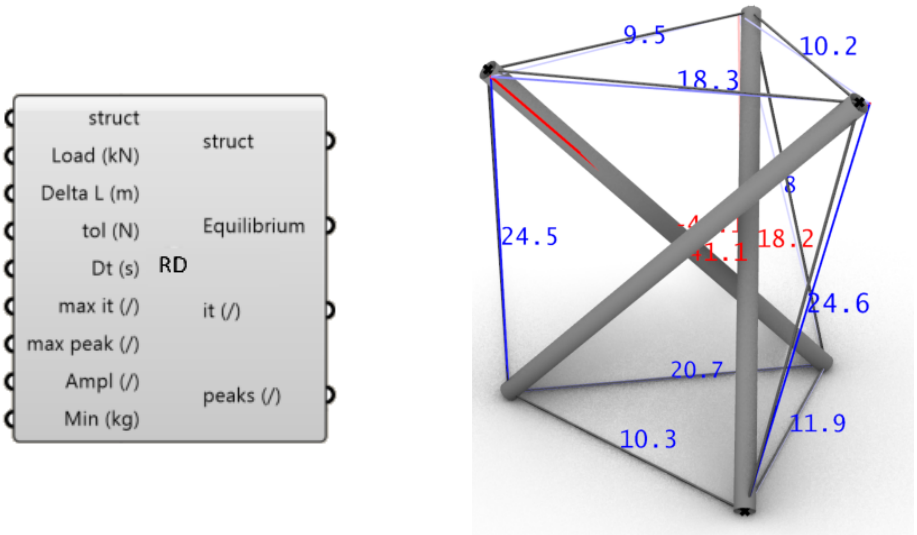


FIGURE 2.15 – Module de calcul par la méthode de le *RD* et résultat obtenu visible dans *Rhino*.

2.3.2 Plug-in *Galapagos*

Le second plug-in mobilisé dans le cadre de ce mémoire est *Galapagos*, un algorithme d'optimisation génétique fondé sur les principes de la théorie de l'évolution de Charles Darwin. Concrètement, *Galapagos* permet de maximiser ou de minimiser une fonction objective, appelée fitness, qui dépend elle-même d'un ensemble de paramètres variables, désignés sous le terme de génome.

L'algorithme explore différentes combinaisons de ces génomes, générant ainsi une population de solutions possibles. Son objectif est de faire évoluer cette population au fil des générations, en sélectionnant et recombinant les solutions les plus performantes, jusqu'à convergence vers un optimum — qu'il s'agisse d'un maximum ou d'un minimum — en fonction du critère défini. Dans le cadre de ce mémoire, la recherche et la validation d'une solution avec *Galapagos* se fait à l'aide d'une formule d'optimisation qu'il faut minimiser. En effet, cette formule d'optimisation va retourner une valeur spécifique à chaque test qui doit être la plus petite possible. Une valeur obtenue en dessous d'une certaine limite assure que la solution obtenue est valide et respecte tous les critères imposés. Cette formule est donc construite de sorte que les solutions non valides ait une valeur très importante et que les solutions qui respectent tous les critères aient une très petite valeur. Cela assure que *Galapagos* nous donnera non seulement la meilleure solution, mais aussi une solution qui soit valide vis à vis des contraintes du problème. Cette formule d'optimisation sera présentée dans le Chapitre 4, lorsque le processus d'optimisation des structures en tenségrité et des treillis sera expliqué rigoureusement.

Bien que cette méthode puisse s'avérer relativement lente et parfois imprécise, elle présente l'avantage de pouvoir converger vers des solutions dans des cas où les problèmes d'optimisation sont instables ou complexes. À ce titre, cet outil constitue un atout significatif dans le processus d'optimisation automatique des structures en tenségrité.

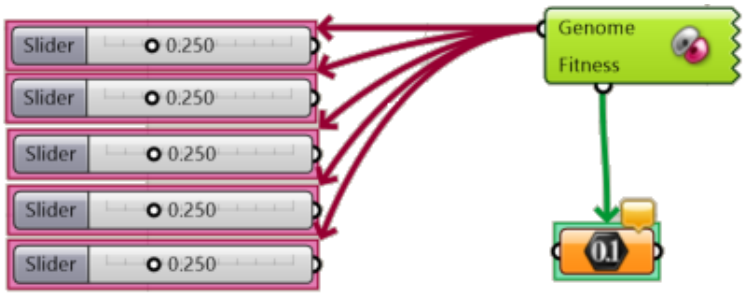


FIGURE 2.16 – Plug-in *Galapagos* avec les génomes en rose et le fitness en vert.

Dans le cadre du présent mémoire, ce plug-in constitue l'un des deux outils utilisés pour l'optimisation des structures en tenségrité étudiées, l'autre étant un processus d'optimisation manuelle basée sur les indicateurs morphologiques, outil de calcul qui sera présenté dans le Chapitre 3.

CHAPITRE 3 :

INDICATEURS MORPHOLOGIQUES ET ALGORITHMES D'OPTIMISATION DE STRUCTURES EN TENSÉGRITÉ

3 Indicateurs morphologiques et algorithmes d'optimisation de structures en tenségrité

Cette section a pour objectif de présenter le concept des indicateurs morphologiques, un outil robuste permettant de généraliser les conclusions d'une méthode d'optimisation à n'importe quel type de structure en tenségrité, et l'algorithme permettant d'optimiser les structures étudiées. En effet, selon le contexte et les contraintes définissant un projet, il existe de nombreuses façons de concevoir une structure aboutissant à des configurations satisfaisantes du point de vue de la stabilité et du comportement structural.

De toutes les structures solutions d'un cas d'étude émane une géométrie optimale respectant toutes les contraintes tout en étant optimisée. Des structures solutions de différents contextes peuvent en apparence n'avoir rien en commun, pourtant, grâce aux indicateurs morphologiques, des points communs entre ces structures peuvent apparaître. Les indicateurs morphologiques permettent ainsi de mettre en comparaison ces différentes structures grâce à un artifice de calcul qui rend les paramètres définissant celles-ci adimensionnels. Cette adimensionalisation permet de mettre en évidence les points communs géométriques, matériels ou encore structuraux entre deux structures en apparence très éloignées l'une de l'autre du point de vue de leur caractéristiques.

L'algorithme d'optimisation peut quant à lui être défini comme une méthode systématique visant à déterminer la solution optimale d'un problème, en fonction de critères ou de contraintes donnés. Cette solution optimale est généralement celle qui permet de minimiser ou de maximiser un ou plusieurs paramètres, en fonction des exigences du projet, tout en limitant les effets qui engendreraient un non respect de ces critères. Il est évident que cette solution optimale peut prendre plusieurs formes dépendantes des paramètres ou des caractéristiques que l'on veut minimiser ou maximiser.

Dans le cadre particulier de ce mémoire, la méthode d'optimisation consiste, pour un contexte et un état de charge donné, à déterminer les dimensions optimales des barres et des câbles (diamètre, épaisseur), ainsi que la géométrie globale de la structure (rapport entre la hauteur et la largeur de celle-ci) minimisant le volume de l'ouvrage, dans une optique de réduction des coûts et d'amélioration des performances. Parmi les trois approches principales d'optimisation identifiées dans la littérature pour les structures en tenségrité [12] :

— L'ajustement de la précontrainte
— L'optimisation des sections des éléments
— L'optimisation de la géométrie globale de la structure

Seule deux d'entre elles seront retenues, à savoir l'optimisation des sections des éléments et de la géométrie globale de la structure. L'ajustement de la précontrainte ne constitue pas ici un paramètre à optimiser, mais un paramètre variable au service des deux autres approches d'optimisation. En d'autres mots, pour différents états de précontrainte, on tentera de déterminer les sections des éléments et la géométrie globale permettant d'optimiser le volume de la structure, tout en assurant que l'ajout de la précontrainte atteigne l'état recherché et n'induise pas des efforts internes inacceptables.

La Section 3.1 se concentre sur la définition du concept des indicateurs morphologiques afin de bien cerner les concepts et la façon dont ceux-ci serviront le processus d'optimisation. La Section 3.2 va ensuite se concentrer sur la présentation d'un algorithme générale d'optimisation de structure en tenségrité afin de minimiser les éléments mentionnés précédemment.

3.1 Indicateurs morphologiques

La présente section s'appuie largement sur les travaux Pierre Latteur et Jonas Feron, qui ont largement contribué à l'introduction et au développement du concept d'indicateurs morphologiques

dans le cadre de l'optimisation et du prédimensionnement de structures telles que les treillis, arcs, poutres et câbles [35]. Ces auteurs ont également démontré l'intérêt de ces indicateurs dans le design et l'optimisation de passerelles en tenségrité, composées de modules prismatiques appelées simplex [36], [32].

3.1.1 Paramétrisation d'une structure en tenségrité

L'optimisation du volume constitue un enjeu central dans le processus de conception d'une structure en tenségrité. Cette démarche s'avère toutefois particulièrement complexe, en raison du grand nombre de paramètres intervenant dans la définition et la caractérisation de la structure. Ces paramètres peuvent concerner la précontrainte, la topologie, les sections, les matériaux, ou encore les efforts internes. De plus, la modélisation des structures en tenségrité repose sur des calculs non linéaires, ce qui ajoute un niveau supplémentaire de complexité à l'analyse.

Ci-dessous sont présentés les principaux paramètres permettant de définir une structure en tenségrité de manière paramétrique :

H	Hauteur de la structure	$[m]$
D	Largeur de la structure	$[m]$
ρ_s, ρ_c	Masse volumique des barres et des câbles	$[kg/m^3]$
E_s, E_c	Module de Young des barres et des câbles	$[MPa]$
σ_s, σ_c	Contrainte maximale admissible des barres et des câbles	$[MPa]$
D_s, D_c	Diamètres des barres et des câbles	$[mm]$
e	Épaisseur des barres	$[mm]$
A_s	Section des barres composants la structure	$[m^2]$
I_s	Inertie des barres composants la structure	$[m^4]$
V	Volume totale de la structure	$[m^3]$
F	Charge totale appliquée sur la structure	$[N]$

TABLE 2 – Paramètres définissant une structure en tenségrité [28][36].

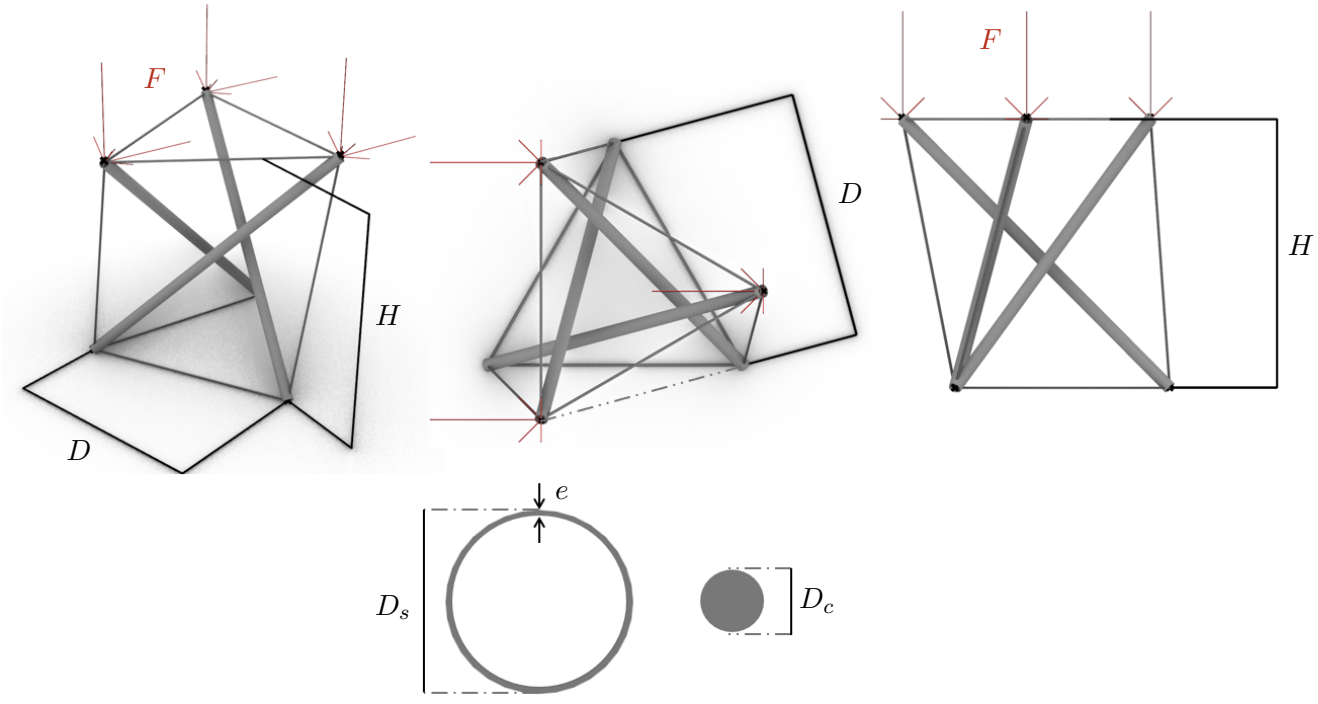


FIGURE 3.1 – Représentation des paramètres sur un simplex modélisé sur le logiciel *Grasshopper*.

Il a été démontré qu'il est possible d'optimiser une structure en tenségrité en identifiant, au sein d'une famille de structures tridimensionnelles, non linéaires, hyperstatiques, précontraintes et sollicitées uniquement par des efforts normaux, la configuration géométrique qui permet à la fois de maximiser le volume tout en assurant une certaine rigidité. La démarche s'appuie sur l'utilisation d'un algorithme d'optimisation combinant les critères de rigidité et de volume. Pour simplifier le problème et en améliorer l'efficacité, cette méthodologie fait appel à des paramètres adimensionnels, appelés indicateurs morphologiques, qui permettent de réduire significativement la dimension du problème en limitant le nombre de variables à considérer lors du processus d'optimisation.

3.1.2 Indicateurs morphologiques primaires et secondaires

Il existe deux familles d'indicateurs morphologiques : indicateurs primaires et secondaires [1]. D'une part, les indicateurs morphologiques primaires expriment de manière adimensionnelle les paramètres définissant la géométrie de la structure et les matériaux qui la composent :

$\frac{H}{D}$	Indicateur d'élancement géométrique
$q = \frac{I_s}{A_s^2}$	Indicateur de la géométrie des sections des barres
$\psi = \frac{\sigma_s D}{\sqrt{qE_sF}}$	Indicateur de flambement
$\phi = \frac{\rho D}{\sigma}$	Indicateur de poids propre
$\frac{E}{\sigma}$	Indicateur de raideur du matériau

Table 3 – Indicateurs morphologiques primaires.

Les indicateurs morphologiques primaires jouent un rôle déterminant dans le processus d'optimisation, dans la mesure où ils sont définis comme des rapports entre différents paramètres géométriques et matériels caractérisant la structure. Leur variation influence directement la configuration optimale obtenue. Les indicateurs morphologiques secondaires, quant à eux, correspondent aux grandeurs à optimiser, à savoir dans le présent cas le volume de la structure. Celui-ci, avec la rigidité qui lui est associé, constituent des critères d'évaluation de la performance structurale et permettent ainsi de comparer l'efficacité relative de différentes configurations.

L'objectif de l'optimisation consiste donc à faire varier les indicateurs primaires afin d'améliorer les valeurs des indicateurs secondaires. Les principaux indicateurs morphologiques secondaires à prendre en compte dans ce cadre sont les suivants :

$W = \frac{\sigma_s V}{FH} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c)$	Indicateur de volume
$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma_s H} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c)$	Indicateur de déplacement

Table 4 – Indicateurs morphologiques secondaires.

Dans le cas où les caractéristiques matérielles de la structure sont définies, le rapport $\frac{E}{\sigma_s}$ présent dans la formule de l'indicateur de déplacement constitue une constante. On va dès lors par facilité, négliger cette constante et ne considérer que le rapport $\frac{\delta}{H}$ correspondant au déplacement nodal δ pondéré par la hauteur de la structure H.

On remarque que dans le cas linéaire, les deux indicateurs secondaires s'expriment de la même manière, et ne dépendent que des indicateurs primaires. Le passage au cas non-linéaire ne vérifie pas cette affirmation. En effet, les indicateurs secondaires, dans le cas non-linéaire ne dépendent plus exclusivement des indicateurs primaires. On confirmera cette information dans la Section 3.1.3.

1. Les formules définissant les indicateurs morphologiques, tirées de la littérature, ont été adaptées pour correspondre aux cas qui seront étudiés dans ce mémoire

3.1.3 Indicateur de précontrainte

Comme mentionné précédemment, les structures en tenségrité présentent généralement une rigidité insuffisante, ce qui se traduit par un comportement fortement non linéaire. Pour remédier à cette limitation, il est courant d'introduire une précontrainte dans les éléments structuraux. Cette précontrainte consiste à raccourcir les câbles ou à allonger les barres, de manière à imposer des efforts internes de traction ou de compression avant même l'application des charges externes et la considération du poids propre. Ce procédé permet d'augmenter la rigidité globale de la structure, ce qui se traduit par des déplacements plus faibles sous l'effet des sollicitations extérieures, comparativement à une structure non précontrainte.

Il est donc essentiel d'introduire une précontrainte initiale dans la structure afin de renforcer sa rigidité et de limiter les déformations. Cette précontrainte influence directement la performance finale de l'ouvrage, tant en termes de rigidité que de volume, et doit de ce fait être intégrée dans l'analyse à travers un nouvel indicateur morphologique. Avant de définir cet indicateur, il convient toutefois de clarifier plusieurs notions fondamentales relatives à la précontrainte [12] :

— **État de précontrainte** : représentation adimensionnelle de la manière dont les efforts de précontrainte sont répartis au sein de la structure.

— **Niveau de précontrainte** P : scalaire exprimant l'intensité de la précontrainte introduite dans la structure ($[N]$).

— **Scénario de précontrainte** : combinaison d'un état de précontrainte et d'un niveau de précontrainte. Ce scénario est représenté sous forme vectorielle, indiquant l'effort appliqué à chaque élément.

Sur cette base, il devient possible d'introduire un nouvel indicateur morphologique secondaire, à savoir l'indicateur de précontrainte. Celui-ci exprime le rapport entre le niveau de précontrainte introduit dans les barres et la charge externe totale appliquée à la structure. Les indicateurs secondaires déjà présentés vont quant à eux, dans le cas d'une structure avec un comportement non-linéaire, dépendre d'un nouveau paramètre, à savoir l'indicateur de précontrainte P/F.

$W = \frac{\sigma_s V}{FH} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c, P/F)$	Indicateur de volume
$\frac{H}{\delta} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c, P/F)$	Indicateur de déplacement
$\frac{P}{F} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c)$	Indicateur de précontrainte

TABLE 5 – Indicateurs morphologiques secondaires pour les structures non-linéaires précontraintes.

3.1.4 Indicateur d'efficacité matérielle

Il reste à introduire un dernier indicateur morphologique secondaire, permettant de disposer de l'ensemble des outils nécessaires à la mise en œuvre d'un processus d'optimisation complet d'une structure en tenségrité à l'aide des indicateurs morphologiques. Il s'agit de l'indicateur d'efficacité matérielle, défini comme le rapport entre le poids propre de la structure et la charge externe totale qui lui est appliquée [35].

Cet indicateur se révèle particulièrement pertinent dans le cas des structures en tenségrité de grande dimension, pour lesquelles le poids propre n'est pas négligeable par rapport aux charges d'exploitation. Il permet ainsi d'évaluer l'efficacité avec laquelle la matière est utilisée pour résister aux sollicitations externes. De ce fait, l'indicateur d'efficacité matérielle peut être exprimé de la manière suivante :

$$\frac{\rho V}{F} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c) < 3 \tag{9}$$

On remarque facilement que cet indicateur peut s'exprimer comme le produit des indicateurs de volume et de poids propre :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho V}{F} \cdot \frac{\sigma H}{\sigma H} = \frac{\rho H}{\sigma} \cdot \frac{\sigma V}{FH} = \phi \cdot W \tag{10}$$

3.1.5 Critères d'optimisation sur base des indicateurs morphologiques

Maintenant que l'ensemble de nos indicateurs morphologiques ont été définis, il est possible de déterminer les critères que les indicateurs morphologiques secondaires doivent respecter, afin d'obtenir la géométrie qui soit la plus optimale possible :

$$\begin{cases} min(W) = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c, P/F) \\ \dfrac{H}{\delta} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c, P/F) \\ \dfrac{P}{F} = f(H/D, \psi, E_c/\sigma_c, E_s/\sigma_s, \phi_c, \phi_s, q, D_s, D_c) < 50 \end{cases} \tag{11}$$

La borne supérieure pour le rapport $\frac{P}{F}$ illustre simplement une limite au delà de laquelle les cas ne valent plus la peine d'être étudiés. Avoir une configuration optimale dont la précontrainte appliquée est beaucoup trop importante n'a pas beaucoup de sens et c'est donc nécessaire d'encadrer ce critère pour que les solutions obtenues soient pertinentes.

3.2 Méthode d'optimisation en considérant les indicateurs morphologiques

Cette section s'appuie largement sur des travaux antérieurs ayant déjà exploré l'optimisation des structures en tenségrité [28][27][12]. L'objectif est ici de présenter l'algorithme général (voir Figure 3.7) employé pour optimiser ce type de structure, en poursuivant un objectif clair : la minimisation du volume. Les différentes étapes constitutives de cet algorithme seront détaillées afin de clarifier la méthodologie d'optimisation adoptée, laquelle sera appliquée aux cas d'étude présentés dans la suite de ce mémoire.

Avant d'entamer le processus d'optimisation, il est essentiel de bien comprendre le contexte du problème ainsi que les contraintes qui lui sont associées. Dans le cadre de la conception et du dimensionnement de structures, ces contraintes peuvent être de nature variée : espace de construction restreint, dimensions imposées, considérations économiques, cas de charge spécifiques, type de matériau utilisé, etc. Ces éléments influencent fortement la configuration optimale d'une structure et doivent donc être intégrés de manière rigoureuse dans l'algorithme, afin d'aboutir à une solution cohérente et réaliste, en adéquation avec l'ensemble des exigences du problème.

3.2.1 Contraintes du problème

Les premières contraintes à considérer concernent les propriétés mécaniques des matériaux employés. Les structures en tenségrité analysées dans ce mémoire sont supposées constituées de câbles et de tubes en acier. Les paramètres ci-dessous représentent les caractéristiques mécaniques de l'acier qui seront prises en compte comme données d'entrée dans le processus d'optimisation :

- Le module de Young de l'acier pour les câbles et les barres (E_c et E_s) ;
- La contrainte admissible dans les câbles et les barres (σ_c et σ_s) ;
- La masse volumique des aciers utilisés (ρ_c et ρ_s).

Outre ces propriétés, deux autres paramètres concernant la géométrie et le chargement doivent être définis : H ou D et F. Les paramètres H et D correspondent à une dimension géométrique imposée de la structure (respectivement la hauteur et la largeur), permettant notamment de calculer

les indicateurs de poids propre des barres et des câbles, notés respectivement ϕ_s et ϕ_c. Le paramètre qu'on choisi de fixer interviendra aussi dans le calcul de l'indicateur de volume et de déplacement, et influencera les valeurs de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$. Le paramètre F, quant à lui, représente la charge totale appliquée à la structure, traduisant le contexte de chargement auquel celle-ci est soumise. Fixer sa valeur permettra à la fois de calculer les indicateurs de volume et de flambement.

Une fois les paramètres fixes du problème définis (correspondants aux deux premières étapes de l'algorithme illustré par la Figure 3.7), il est nécessaire d'introduire deux hypothèses supplémentaires concernant respectivement l'indicateur de flambement et l'indicateur d'élancement géométrique.

Hypothèses relatives à l'indicateur de flambement ψ

Dans l'expression définissant l'indicateur de flambement ψ, seul le paramètre q demeure indéterminé. Ce dernier reflète la géométrie de la section transversale des barres, en particulier le rapport entre le diamètre extérieur D_s et l'épaisseur e des tubes. Ainsi, pour chaque valeur différente arbitrairement fixée de l'indicateur de flambement ψ, entre 0 et 100 (0 étant un contexte sans flambement et 100 un contexte dans lequel le flambement est prépondérant), est associé une valeur q qui dépend du rapport $\frac{D_s}{e}$ choisi. L'algorithme d'optimisation sera donc exécuté plusieurs fois, pour chaque rapport $\frac{D_s}{e}$ considéré, et donc par conséquent pour chaque indicateur de flambement associé, afin de déterminer une structure à la fois la plus légère possible et présentant une rigidité structurale maximale par rapport à la condition de flèche imposée (c'est-à-dire des déplacements nodaux minimaux tolérables). Les bornes concernant les valeurs de ψ illustre simplement le fait que pour des sensibilités au flambement très importantes ($\psi \geq 100$), l'algorithme donne des structures lourdes et structurellement inefficace.

On présente ici l'algorithme général d'optimisation pour un cas de charge F fixe restant constant tout au long de l'analyse, et donc pour une variation de ψ qui dépend de la variation $\frac{D_s}{e}$. On verra dans la suite de ce mémoire (Chapitre 4) qu'il est possible de fixer la valeur de q et d'étudier la variation de ψ en modifiant le cas de charge considéré. Que ça soit en fixant F et faisant varier q, ou inversement, on a désormais défini ψ (troisième étape de l'algorithme illustré par la Figure 3.7).

Hypothèses relatives à l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$

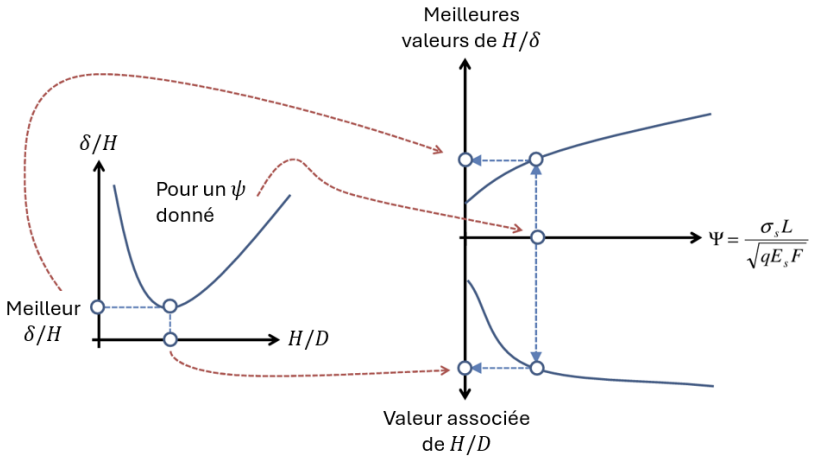


FIGURE 3.2 – Courbe d'efficacité [36].

Pour chaque valeur choisie de l'indicateur ψ, une série de valeurs de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, entre 0 et 15, sera imposée (quatrième étape de l'algorithme illustré par la Figure 3.7). Cette démarche vise à identifier, parmi les différentes configurations géométriques, celle qui optimise simultanément la réduction du volume (W) de la structure et la limitation des déplacements

nodaux ($\frac{H}{\delta}$). L'algorithme permettra ainsi de déterminer, pour chaque valeur testée de ψ, un rapport optimal $\frac{H}{D}$ correspondant à une configuration géométrique performante au regard des objectifs fixés. Ces différents rapports $\frac{H}{D}$ optimaux pour chacune des valeurs de ψ testées permettent de construire une courbe d'efficacité qui donnera, pour une valeur de ψ le rapport $\frac{H}{D}$ idéal, et son déplacement nodal correspondant $\frac{H}{\delta}$. Cette courbe d'efficacité peut aussi représenter, pour chaque valeur de ψ testée, l'indicateur de volume W optimal et son indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{D}$ associé.

3.2.2 Objectifs de l'algorithme d'optimisation

Comme expliqué brièvement dans l'introduction de ce chapitre, l'objectif de cet algorithme est de minimiser le volume et donc la quantité de matière utilisée pour résister à l'effet du chargement. Pour ce faire, le processus va jouer sur plusieurs paramètres géométriques qu'il va faire varier jusqu'à obtenir la combinaison idéale. Ces différents paramètres concernent le diamètre des tubes D_s et le diamètre des câbles D_c. L'algorithme va donc, pour chaque $\frac{H}{D}$ considéré, trouver les valeurs de D_s et D_c optimales. Cela permettra ensuite de mettre en comparaison les résultats pour chaque $\frac{H}{D}$ et trouver le rapport minimisant le volume.

Ce processus de recherche de la combinaison $D_s - D_c$ optimale pour chaque $\frac{H}{D}$ se fera pour différents états de précontrainte. Le but est aussi de voir jusqu'à quel niveau de précontrainte il faut aller pour rivaliser avec la rigidité d'un treillis.

3.2.3 Application de la précontrainte de la structure

À présent que les contraintes et hypothèses du modèle sont clairement établies, il est possible d'initier le processus d'optimisation. Cette démarche repose sur une approche itérative de type essai-erreur, visant progressivement à converger vers la solution recherchée.

L'objectif de cette optimisation est de trouver la configuration dont le volume est minimal tout en assurant un certain état de précontrainte. Le cœur du problème réside donc dans la recherche d'un équilibre optimal entre volume minimal et rigidité structurale, tout en veillant à ne pas générer de contraintes normales excessives dans les éléments. L'idéal serait d'avoir une configuration dans laquelle un maximum de précontrainte est appliqué pour atteindre l'état de précontrainte voulu, tout en ayant un volume le plus faible possible. C'est-à-dire que la configuration géométrique devrait être telle que la précontrainte permettant d'atteindre le niveau requis est quasi égal à la précontrainte maximale admissible de cette configuration. Si la précontrainte appliquée pour atteindre l'état de précontrainte objectif est bien plus faible que la précontrainte maximale admissible de la configuration, c'est que la quantité de matière peut être diminuée.

L'introduction de la précontrainte dans la structure repose sur le choix d'un scénario adapté. De nombreuses configurations sont envisageables, chacune conduisant à des résultats d'optimisation différents. Il est notamment possible d'appliquer une précontrainte uniforme à l'ensemble des barres ou câbles, ou encore de sélectionner spécifiquement les éléments à contraindre. Cette diversité de scénarios possibles complexifie le processus d'optimisation. Par souci de simplicité et d'efficacité, il a été décidé, dans le cadre de ce mémoire, d'adopter une précontrainte uniforme appliquée aux barres de la structure.

Les travaux de Igor Bouckaert et Alexandre Flamant soutiennent cette hypothèse. Ils s'appuient notamment sur les conclusions de Jonas Feron [12] [28], qui a mis en évidence que l'application d'une précontrainte uniforme dans les câbles ne permettait pas de maintenir leur tension après l'application du poids propre et des charges extérieures. Par ailleurs, la précontrainte dans les barres favorise une répartition plus homogène des efforts internes et une mise en tension plus uniforme des câbles. Ainsi, bien que cette approche ne constitue pas nécessairement la solution optimale du point de vue théorique, elle présente l'avantage d'être plus aisée à mettre en œuvre dans le cadre d'un processus d'optimisation itératif, ce qui justifie son emploi dans le présent travail.

Dans la résolution numérique de la RD, l'application de la précontrainte se fait en plusieurs étapes :

— Une fois la géométrie modélisée avec les coordonnées des nœuds, les longueurs des câbles et des barres fixées, on applique la précontrainte uniforme dans les barres par allongement de celles-ci (Figure 3.3).

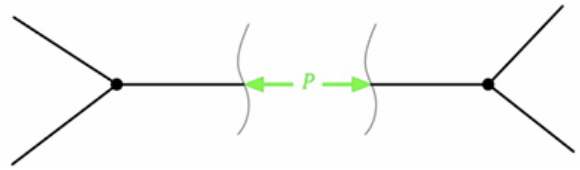


FIGURE 3.3 – Application de la précontrainte [12].

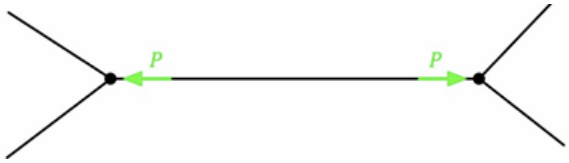


FIGURE 3.4 – Extériorisation de la force équivalente [12].

— Les contraintes internes induites par cet allongement sont ensuite extériorisées. C'est-à-dire qu'on va appliquer une force équivalente P aux extrémités de la barre. Les effets de cet allongement ou de cette force appliquée aux nœuds est exactement la même (Figure 3.4).

— Les nœuds dont les coordonnées étaient initialement fixés vont maintenant se déplacer sous l'effet de cette charge considérée désormais comme un effort externe appliquée à la structure. Ces déplacements nodaux vont étendre la précontrainte dans les éléments adjacents à la barre, leur induisant une contrainte normale également.

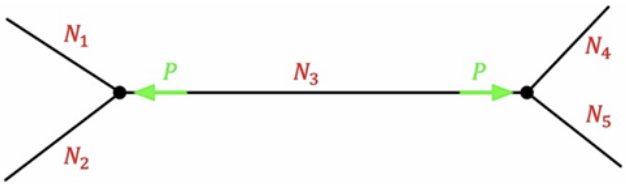


FIGURE 3.5 – Calcul des efforts internes induits [12].

— La précontrainte P est a nouveau intériorisée et additionnée aux efforts internes apparus dans les éléments.

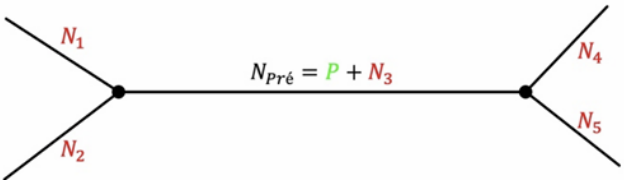


FIGURE 3.6 – Efforts internes résultants [12].

En tenant compte du mode d'application de la précontrainte dans le cadre de la RD, il est désormais possible de déterminer la quantité de précontrainte à introduire dans la structure (correspondants aux étapes illustrées en bleu sur la Figure 3.7). Dans un premier temps, une valeur initiale de la précontrainte, notée P_j, est fixée de manière arbitraire. Une fois le poids propre et les actions extérieures appliquées, il convient de vérifier si l'état de précontrainte est atteint. Dans le cas contraire, un processus itératif est engagé, consistant à augmenter P_j par un incrément de précontrainte ΔP, afin de renforcer la pré-compression dans les barres. À chaque itération, les efforts internes sont réévalués, avec pour objectif de vérifier si ceux-ci restent admissibles. L'algorithme itératif se poursuit jusqu'à la satisfaction des conditions d'arrêt définies.

Deux critères d'arrêt sont considérés dans ce processus d'application de la précontrainte. Premièrement, si la précontrainte appliquée permet d'assurer un niveau de précontrainte recherché, alors le

processus est interrompu. Deuxièmement, une limite supérieure est imposée à la précontrainte afin d'éviter une sursollicitation trop importante. Cette limite a été fixée à $P < 50F$. Si cette borne est franchie, la configuration est alors jugée irréalisable d'un point de vue structural et cela indique une nécessité d'augmenter les sections pour atteindre le niveau de précontrainte requis.

3.2.4 Optimisation des sections des éléments de la structure

Le processus d'optimisation des sections (correspondants aux étapes illustrées en vert sur la Figure 3.7) intègre dans son procédé de résolution l'algorithme d'application de la précontrainte. En effet, initialement, on fixe les dimensions des sections des éléments, c'est-à-dire le diamètre des barres D_s et le diamètre des câbles D_c. On procède à l'application de la précontrainte jusqu'à atteindre le niveau de précontrainte recherché. On considère ensuite les charges externes et le poids propre et on revérifie si les sections choisies sont adaptées aux efforts internes générés. Si les sections sont sous-dimensionnées, on modifie ces dimensions et on effectue à nouveau la démarche d'application de la précontrainte, en considérant le nouveau poids propre de la structure. La condition d'arrêt de l'optimisation des sections est que les sections trouvées pour atteindre un certain état de précontrainte, à l'itération i, soient exactement les mêmes que celles obtenues à l'itération précédente $i - 1$. C'est-à-dire jusqu'à ce que les dimensions des sections tolèrent la quantité de précontrainte qu'il est nécessaire d'appliquer pour atteindre l'état de précontrainte recherché.

3.2.5 Algorithme global d'optimisation de structure en tenségrité

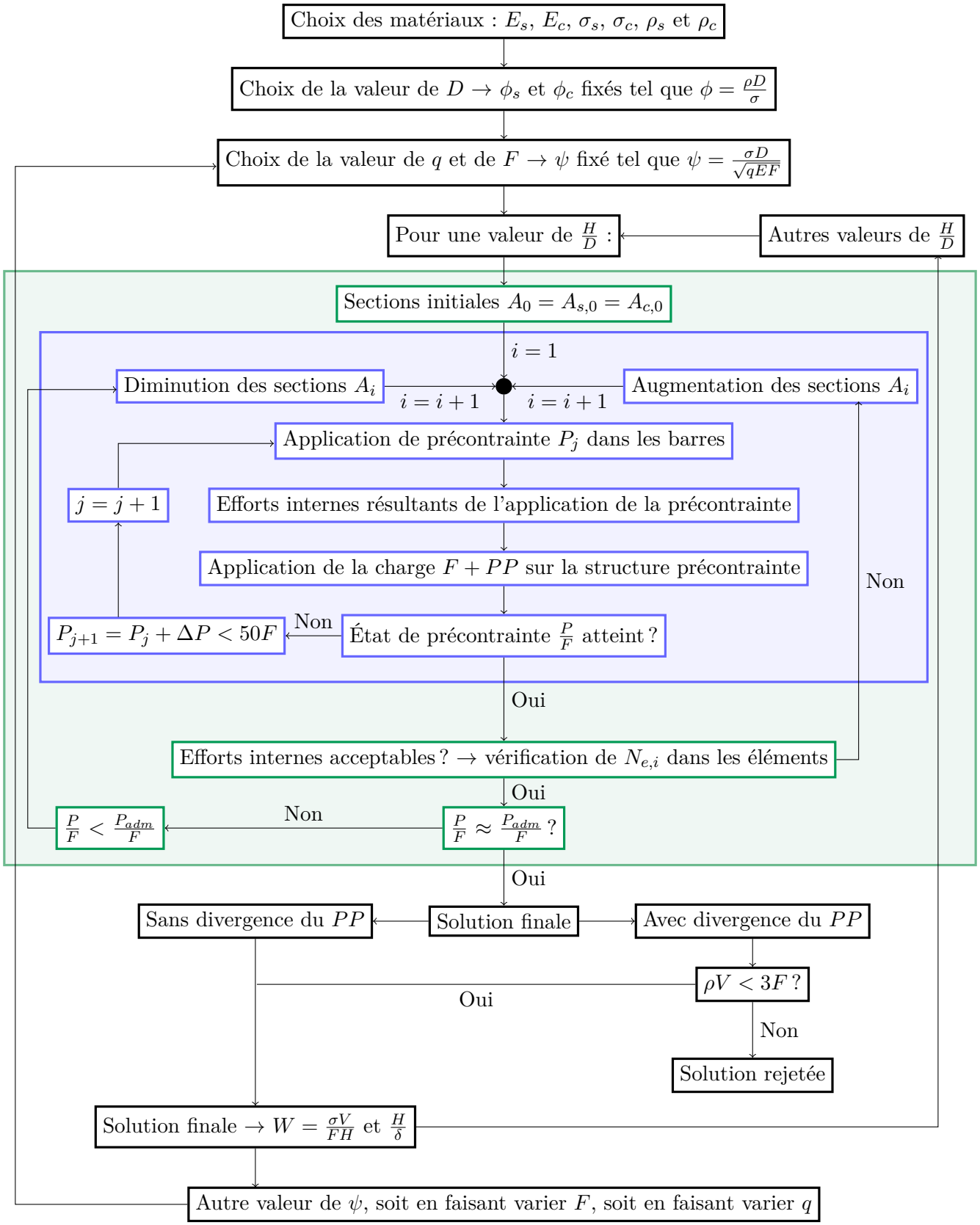


FIGURE 3.7 – Algorithme d'optimisation sur base des indicateurs morphologiques [27].

CHAPITRE 4 :

OPTIMISATION D'UN SIMPLEX TENSÉGRITÉ ET COMPARAISON DE SES CARACTÉRISTIQUES AVEC SON HOMOLOGUE TREILLIS

4 Optimisation d'un simplex tenségrité et comparaison de ses caractéristiques avec son homologue treillis

Ce chapitre a pour objectif principal de comparer deux systèmes structuraux — la tenségrité et le treillis — à travers l'analyse d'une structure élémentaire. Comme mentionné précédemment, ces deux types de structures présentent de nombreuses similitudes : elles ne sont sollicitées que par des efforts normaux, leurs éléments sont assemblés par des articulations rotulées, et les charges extérieures sont appliquées uniquement aux nœuds, évitant ainsi l'apparition de moments de flexion. La distinction majeure entre ces deux systèmes réside dans la nature des éléments en traction. Dans une structure en tenségrité, ces éléments sont des câbles, caractérisés par une faible rigidité, nécessitant l'introduction d'un état de précontrainte pour garantir la stabilité de l'ensemble. À l'inverse, les structures treillis sont constituées d'éléments rigides, aussi bien en compression qu'en traction, ne requérant pas de précontrainte, et présentant un comportement linéaire. Ces différences fondamentales, implique donc, malgré de nombreuses similitudes, des comportement structuraux assez distincts.

En raison de leurs similarités conceptuelles, la tenségrité est souvent perçue comme une alternative prometteuse aux treillis traditionnels, notamment en raison de son esthétisme plus épuré et de son apparente légèreté. La littérature présente fréquemment les structures en tenségrité comme étant à la fois plus légères, en raison de l'utilisation de câbles fins, et plus rigides, grâce à l'effet de la précontrainte. Toutefois, cette comparaison demeure encore largement spéculative. En effet, la tenségrité reste peu développée dans le domaine du génie civil ; les structures existantes relèvent majoritairement de l'art ou de l'architecture, et ne permettent pas une confrontation directe avec des structures treillis strictement équivalentes. Ainsi, l'absence d'analyses comparatives rigoureuses entre des configurations véritablement équivalentes invite à nuancer ces conclusions et justifie une étude approfondie visant à répondre à la question suivante : **La tenségrité est-elle réellement plus légère et plus rigide qu'une structure en treillis ?**

Afin de répondre à cette interrogation, ce chapitre propose une étude comparative fondée sur une unité de base en tenségrité, le simplex, et sur son équivalent en treillis. Le simplex sera tout d'abord défini de manière paramétrique, puis modélisé sous forme de treillis en conservant la même géométrie et les mêmes dimensions, à l'exception des câbles, remplacés par des barres rigides en acier. Une fois ces structures présentées, celles-ci seront l'objet d'une optimisation et d'une comparaison de leurs caractéristiques. L'étude débutera avec un cas de référence, qui sera exposé de manière détaillée afin de bien comprendre toute la démarche d'étude de ce mémoire. Cette méthodologie précise sera exposée afin de clarifier le processus d'optimisation et de mise en œuvre des calculs, permettant d'évaluer rigoureusement le volume et la rigidité de chaque configuration.

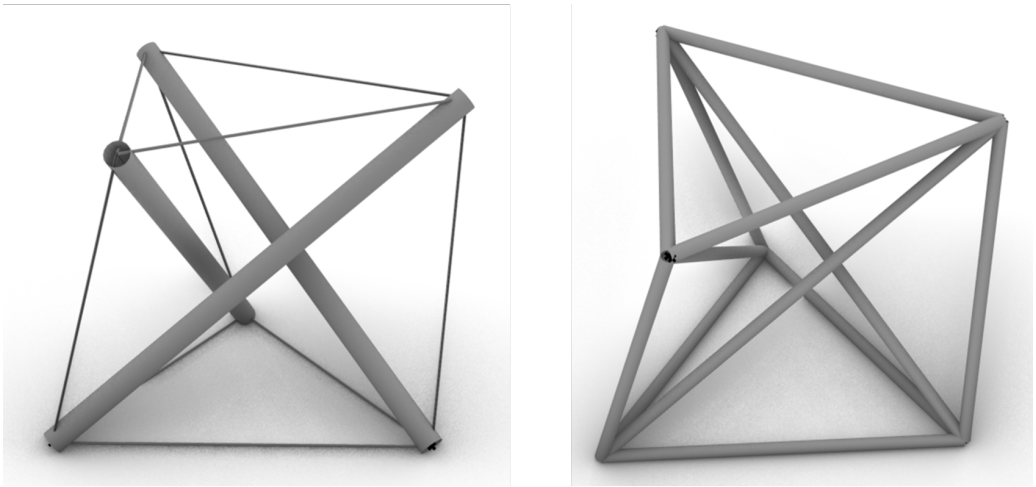


FIGURE 4.1 – Simplex tenségrité et treillis homologue modélisés sur le logiciel *Grasshopper*.

4.1 Définition du simplex tenségrité

Il est légitime de s'interroger sur le choix d'étudier exclusivement le simplex (Figure 4.2 a-b) dans cette analyse, compte tenu de la diversité des modules élémentaires existants. Cependant, les études précédentes menées dans le cadre de la modélisation de passerelles piétonnes en tenségrité ont conclu que le simplex constituait le module élémentaire le plus efficace et le plus léger [27]. Sa géométrie, composée uniquement de douze éléments, lui confère un volume de matière nettement inférieur à celui des autres modules de tenségrité prismatiques. Bien que des modules tels que le pentaplex (Figure 4.2 c-d) ou l'hexaplex (Figure 4.2 e-f) nécessitent une précontrainte réduite en raison de leur rigidité intrinsèque, ils présentent un nombre d'éléments plus élevé, entraînant ainsi un poids propre et un volume plus importants. Ces alternatives peuvent s'avérer pertinentes pour des passerelles de faible portée, où leur rigidité accrue, leur moindre élancement et leur consommation de matière quasi équivalente en feraient des options préférables au simplex. Le Chapitre 6 se penchera sur l'étude de ces autres modules élémentaires (quadruplex, pentaplex et hexaplex) afin de présenter une comparaison entre tenségrité et treillis la plus large possible.

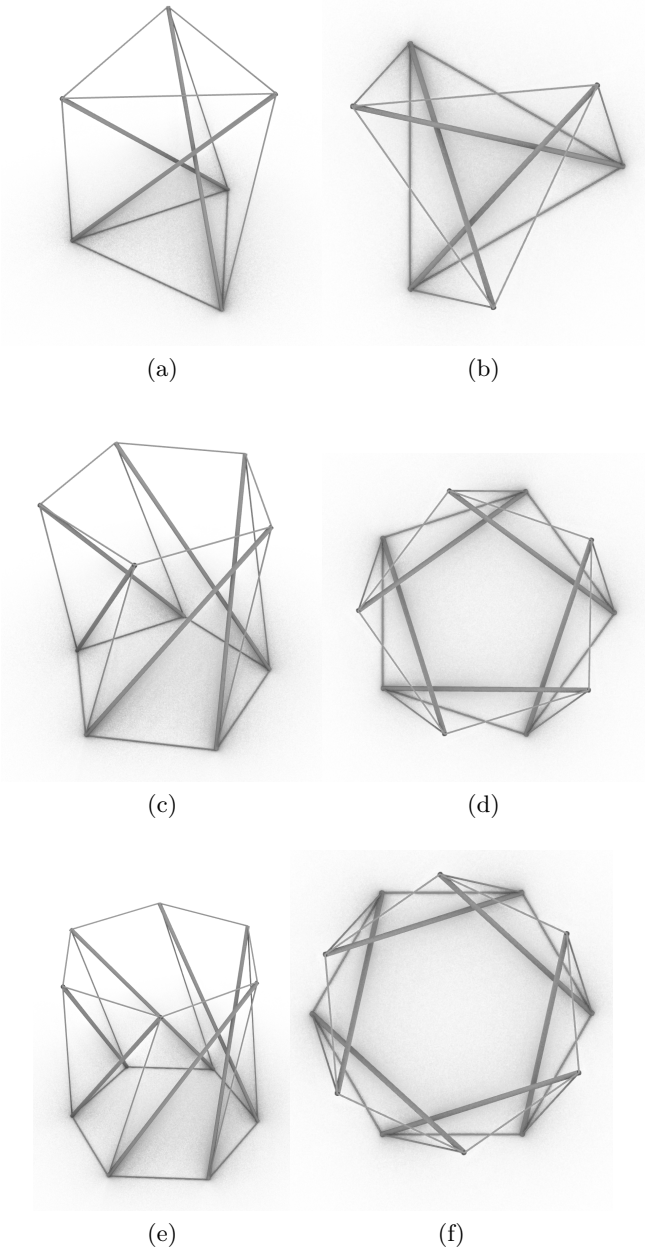


FIGURE 4.2 – Géométrie d'un simplex (a et b), d'un pentaplex (c et d) et d'un hexaplex (e et f) modélisés sur le logiciel *Grasshopper*.

4.1.1 Caractéristiques du simplex régulier

Le simplex est donc le module prismatique élémentaire le plus simple qui existe pour les structures en tenségrité. Il est composé de 3 barres (représentés en rouge - Figure 4.3) et de 9 câbles (représentés en bleu - Figure 4.3). On distingue parmi les 9 câbles deux catégories : les câbles longitudinaux c_l, faisant la jonction entre la base inférieure et supérieure, et les câbles transversaux c_t formant les deux bases. Un angle de rotation α entre les deux bases peut également être introduit.

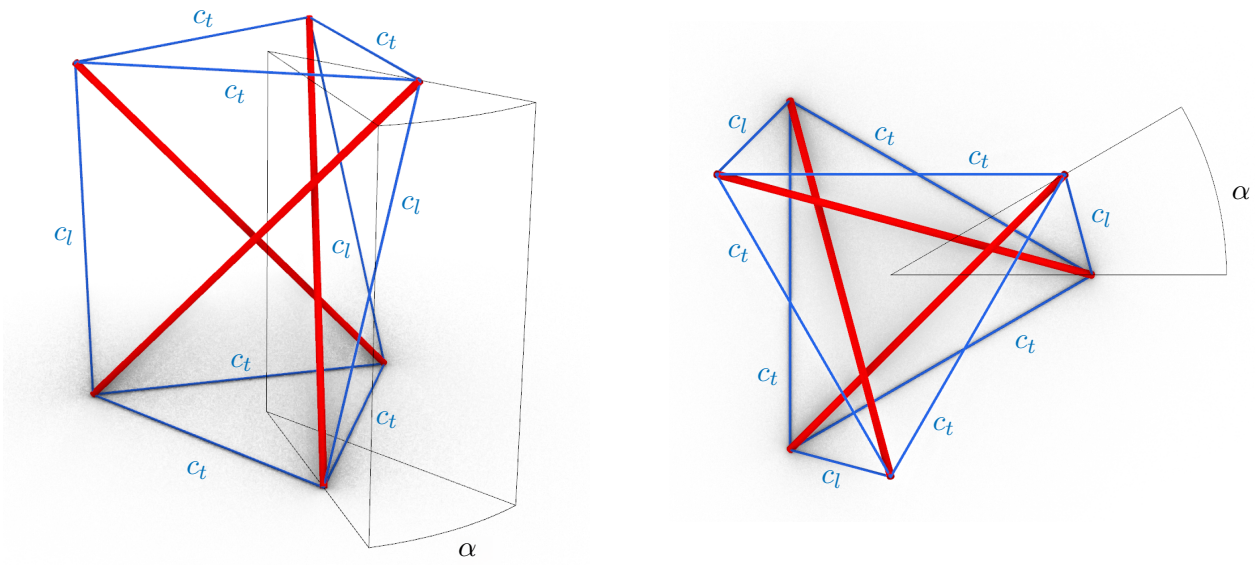


FIGURE 4.3 – Éléments composants un simplex dont l'angle de rotation est $\alpha = 30°$.

On peut aisément comprendre le comportement de ce module en considérant celui-ci dans sa configuration la plus basique, c'est-à-dire lorsque le simplex est régulier. Dans cette configuration, les câbles longitudinaux et transversaux sont de même longueur l_c et les barres ont une longueur l_b. Dans cette configuration spécifique, il existe une relation permettant de lier les longueurs l_c et l_b à l'angle de rotation α [12][28].

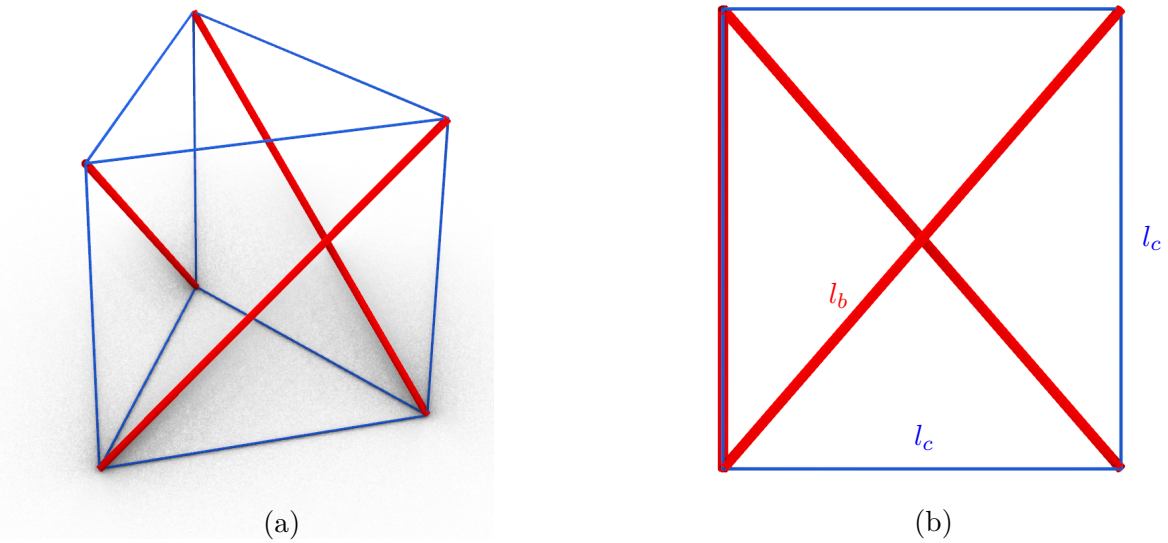


FIGURE 4.4 – Simplex régulier vue 3D (a) et vue latérale (b).

Cette relation peut s'écrire comme :

$$r \equiv \frac{l_b}{l_c} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\alpha + 60)} \tag{12}$$

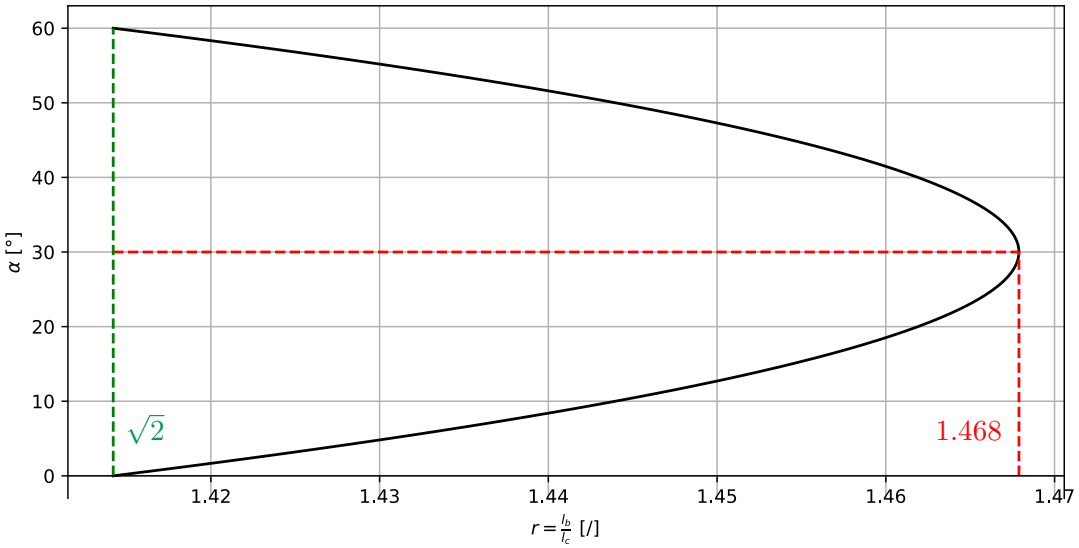


FIGURE 4.5 – Variation de α en fonction du paramètre r [28].

Cette relation permet de caractériser le comportement et les propriétés du simplex. En effet, lorsque le rapport de longueur entre les barres et les câbles, noté r, est inférieur à $\sqrt{2}$, la configuration géométrique du simplex ne peut exister. Si ce rapport se situe dans l'intervalle $[\sqrt{2}; 1.468]$, alors deux configurations géométriques sont possibles, chacune étant associée à un angle de rotation α. Enfin, lorsque $r = 1.468$, une solution unique existe, correspondant à une géométrie pour laquelle l'angle de rotation est $\alpha = 30°$. Dans cette configuration, la structure présente une rigidité nulle, ce qui implique que la moindre perturbation engendre une torsion du système, conduisant à un équilibre à $\alpha = 30 \pm \epsilon$.

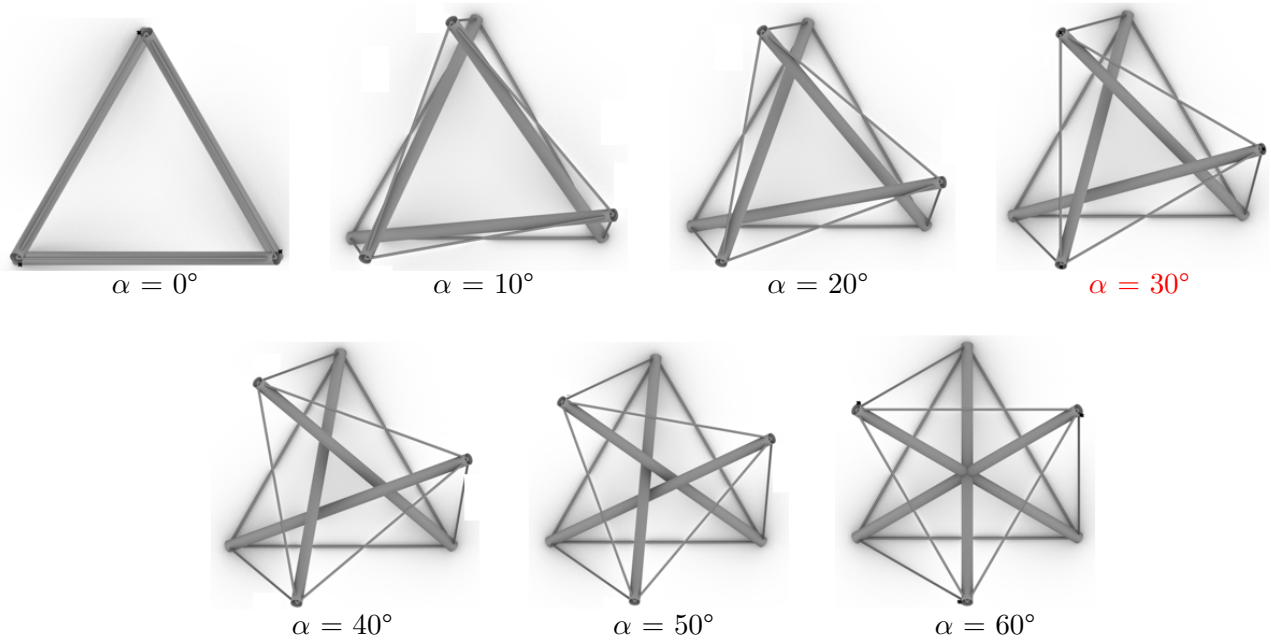


FIGURE 4.6 – Variation de l'angle de rotation α entre les deux bases.

Il convient également de noter que cette configuration avec $\alpha = 30°$ correspond à l'état d'équilibre du système avant chargement et prise en compte du poids propre. Si la longueur initiale des câbles est insuffisante, ceux-ci subiront un allongement sous l'effet de la traction, tandis que les barres se raccourciront par compression. Le système évoluera alors vers un état d'équilibre où l'angle de rotation sera de $\alpha = 30°$. Cette configuration initiale permet donc de minimiser la quantité de précontrainte à ajouter dans la structure pour que celle-ci atteigne une rigidité suffisante. Cette configuration induit un état d'autocontrainte, conférant à la structure une certaine rigidité et stabilité intrinsèque, une fois les charges externes et le poids propre appliquée au simplex [12].

4.1.2 Caractéristiques du simplex irrégulier

Il est tout à fait possible de rendre le simplex irrégulier en introduisant des paramètres supplémentaires, en complément de ceux qui définissent le simplex régulier. Dans le cas précédemment étudié, la géométrie du module était déterminée par trois paramètres : l_c, l_b et α. Dans la présente approche, le simplex sera défini par de nouveaux paramètres, permettant ainsi d'ajuster sa géométrie de manière infiniment variable et d'accéder à un ensemble de configurations bien plus diversifiées que celui obtenu avec les trois paramètres initiaux :

— r_a : le rayon du cercle circonscrit de la base supérieure du simplex.

— r_b : le rayon du cercle circonscrit de la base inférieure du simplex.

— α : l'angle de rotation relatif de la base supérieure par rapport à la base inférieure.

— H : la hauteur du simplex.

La modélisation de ce nouveau simplex irrégulier est réalisée à l'aide du logiciel *Grasshopper* (Figure 4.7), présenté précédemment dans ce mémoire. Comme il a déjà été mentionné, *Grasshopper* permet une modélisation paramétrique des structures, offrant ainsi la possibilité de faire varier les paramètres définissant la géométrie sans nécessiter la recréation d'un nouveau modèle à chaque modification. Cette approche paramétrique facilite l'exploration d'un large éventail de configurations géométriques (Figure 4.8) et se révèle particulièrement utile lors de la phase d'étude et d'optimisation de la structure.

Comme illustré par la Figure 4.7, la modification de la géométrie du simplex s'effectue de manière instantanée en ajustant les différents curseurs du logiciel. Par ailleurs, nous verrons ultérieurement que, dans le cadre de l'optimisation, une relation dynamique sera établie entre ces curseurs et le module *Galapagos*. Cette interaction permettra d'optimiser la géométrie du simplex en maximisant ou minimisant les paramètres ciblés afin d'identifier la configuration optimale.

Deux autres paramètres interviennent dans la définition de la géométrie du simplex sur *Grasshopper* : le nombre de faces des bases de la structure et le nombre de câbles supplémentaires ajoutés. Le premier paramètre a été introduit afin de permettre l'étude d'autres modules élémentaires, tels que le quadruplex, le pentaplex ou encore l'hexaplex (voir Chapitre 6).

Le second paramètre concerne l'ajout de câbles supplémentaires dans le but d'accroître la rigidité de la structure. Cette notion sera développée plus en détail dans le Chapitre 5.

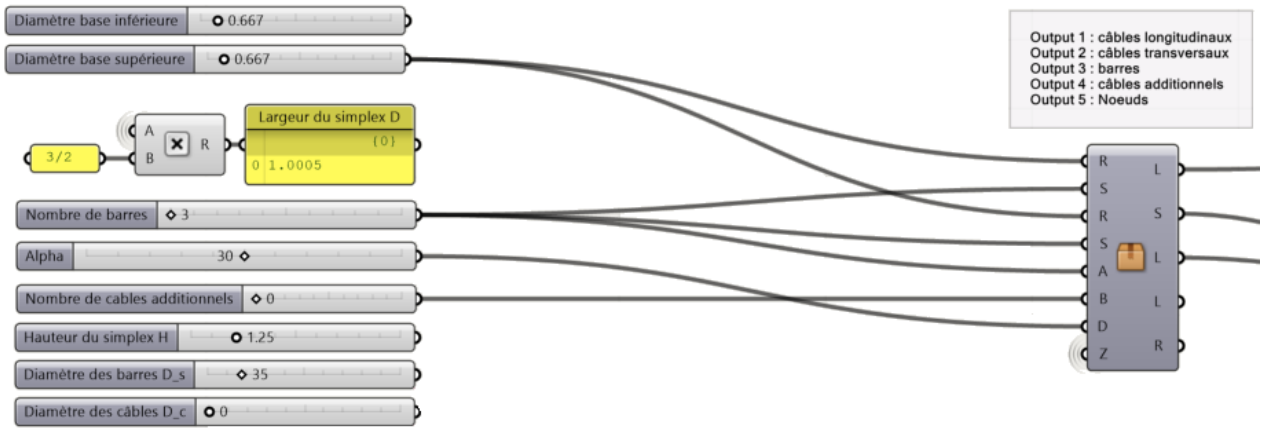


FIGURE 4.7 – Définition de la géométrie du simplex sur le logiciel *Grasshopper*.

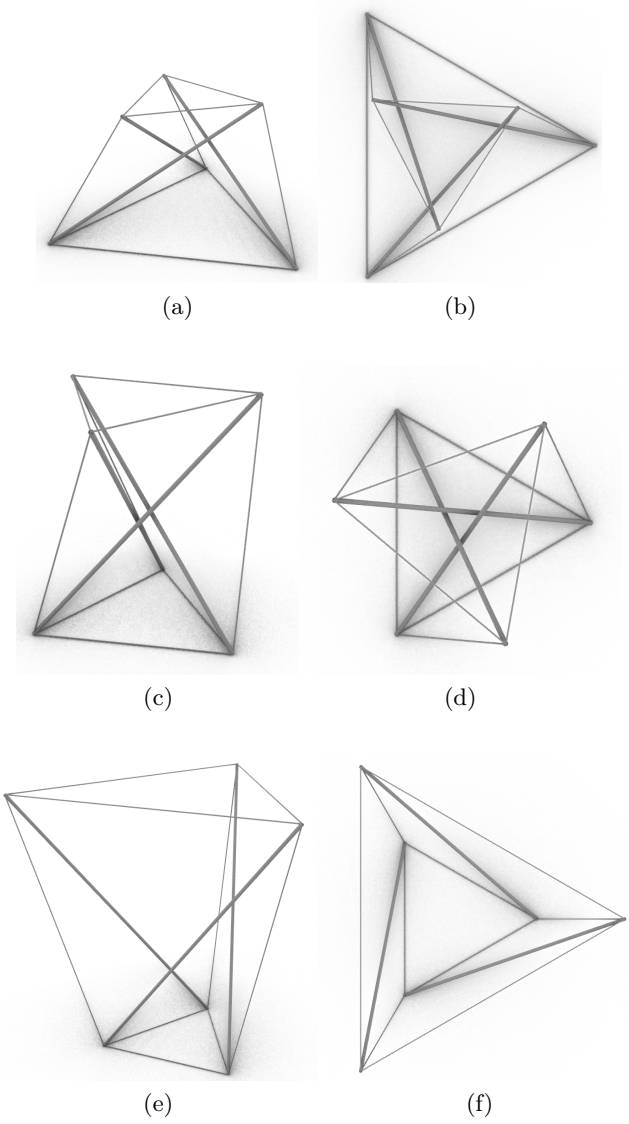


FIGURE 4.8 – Différentes configurations d'un simplex irrégulier modélisées sur le logiciel *Grasshopper*.

4.2 Cas d'étude initial : définition des caractéristiques du simplex $S0$ et du scénario de chargement

Maintenant qu'une définition rigoureuse du simplex et de sa paramétrisation ont été établies, il est possible d'entamer l'étude visant à répondre à la problématique présentée en introduction de ce chapitre. Afin de garantir une compréhension optimale des outils mobilisés : les indicateurs morphologiques (Section 3.1), les logiciels utilisés (*Grasshopper* - Section 2.3, *Galapagos* - Section 2.3.2, *Muscle* - Section 2.3.1), ou encore des méthodes d'optimisation appliquées (manuelle et automatique, Section 3.2), l'étude débutera par la présentation détaillée d'un cas concret de référence. Ce cas initial, rigoureusement exposé, constituera la base méthodologique de l'ensemble du processus d'analyse. Dans un souci de clarté et afin de maintenir une approche aussi générale que possible, les paramètres mentionnés ci-dessous seront décrits qualitativement, sans en spécifier les valeurs numériques. Les valeurs précises retenues pour les calculs sont disponibles en Annexe B. Dans les sections suivantes, une généralisation de cette démarche sera ensuite appliquée pour l'ensemble des cas d'étude envisagés, en vue d'aboutir à une conclusion globale fondée sur l'ensemble des résultats obtenus.

4.2.1 Caractéristiques matérielles et géométriques du simplex

Caractéristiques matérielles

Contrairement aux travaux précédents sur la tenségrité menés à l'EPL, notamment le mémoire de Nicolas Danzin et Romain Antoine : "Structure en tenségrité : analyse critique des résultats numériques sur base d'essais expérimentaux sur un simplex instrumenté de grande taille" [29], ainsi que l'article de Jonas Feron : "Experimental testing of a tensegrity simplex : Self-stress implementation and static loading" [33], qui considèrent des tubes en aluminium et des câbles en acier, le présent mémoire considère exclusivement l'acier pour les barres et pour les câbles de notre simplex $S0$ [1].

Ce choix soulève légitimement la question du recours à l'acier, compte tenu de la masse volumique nettement plus faible de l'aluminium. Trois raisons principales motivent cependant cette décision. Premièrement, l'acier présente un module de Young plus de trois fois supérieur à celui de l'aluminium, ce qui garantit une rigidité accrue des éléments constitutifs du simplex. Deuxièmement, le recours à un seul matériau permet une homogénéisation des propriétés mécaniques de la structure, évitant ainsi la nécessité de distinguer les paramètres des barres de ceux des câbles. Enfin, le coût du matériau a également influencé ce choix : l'acier, plus économique, constitue une option avantageuse dans la perspective de travaux futurs visant la réalisation d'un simplex optimisé à échelle réelle.

Caractéristiques	Aluminium	Acier
Poids volumique $[kg/m^3]$	2700	7850
Module de Young $[MPa]$	62	210
Prix	++	+

TABLE 6 – Caractéristiques de l'acier et de l'aluminium.

Une fois le matériau constituant le $S0$ déterminé, il est possible de définir les paramètres mécaniques associés à ce choix.

Paramères	Description
ρ $[kg/m^3]$	Poids volumique de l'acier
E $[MPa]$	Module de Young de l'acier
σ_s $[MPa]$	Contrainte maximale admissible dans les barres
σ_c $[MPa]$	Contrainte maximale admissible dans les câbles

TABLE 7 – Caractéristiques matérielles du $S0$.

1. Le simplex $S0$ fait référence à un simplex classique sans câble additionnel.

Caractéristiques géométriques

Afin de définir rigoureusement le $S0$ dans sa globalité, trois caractéristiques liées à la géométrie de celui-ci sont encore à définir. La première concerne l'angle relatif entre les bases supérieure et inférieure. Comme mentionné dans la Section 4.1.1, l'angle initialement recommandé pour la configuration du $S0$ est de $\alpha = 30°$ (voir Figure 4.3).

En raison de la grande diversité de profils disponibles sur le marché, il convient de fixer un modèle de barre caractérisé par un rapport constant entre le diamètre extérieur et l'épaisseur, noté $\frac{D_s}{e}$. Ce rapport jouera un rôle déterminant dans les développements ultérieurs de l'étude, ce qui justifie sa définition explicite.

Enfin, le troisième paramètre concerne le rayon du cercle circonscrit aux bases supérieure et inférieure du $S0$, c'est-à-dire le cercle passant par les trois sommets de chaque base. Ce rayon, noté r_b, peut également être exprimé différemment, comme proposé dans l'article de **Jonas Feron** : « Optimization of footbridges composed of prismatic tensegrity modules » [36]. Dans cette publication, le rayon est converti en une dimension équivalente qui est nommée D dans ce mémoire, et qui correspond à la distance entre les deux points les plus éloignés de la base, lorsqu'elle est observée en vue de dessus. En d'autres termes le rayon est converti pour obtenir la largeur du $S0$.

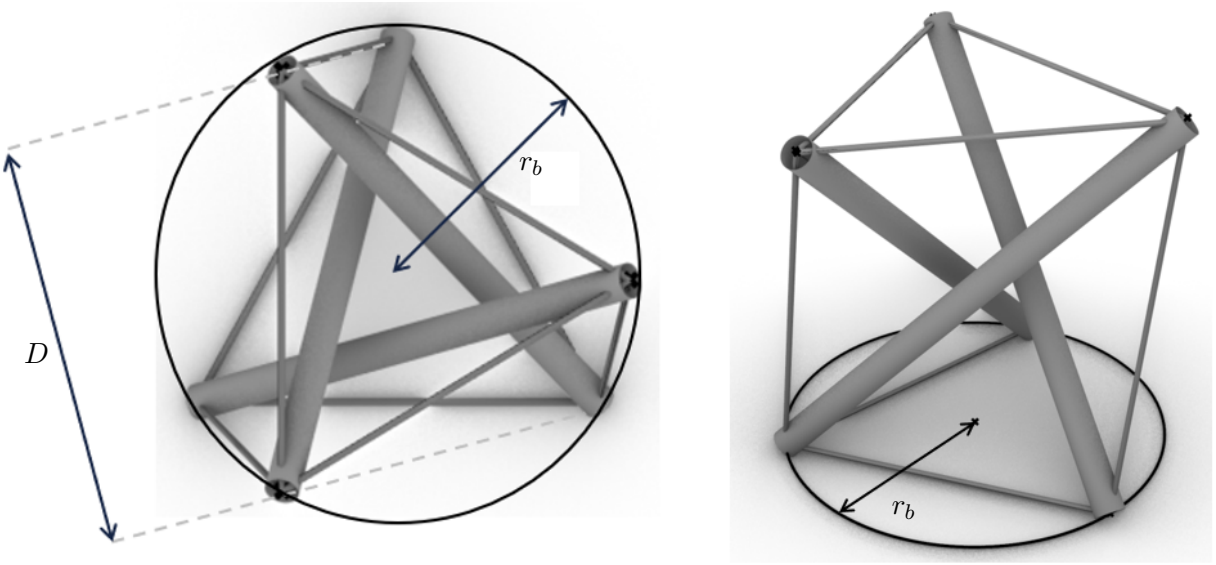


FIGURE 4.9 – Représentation du rayon du cercle circonscrit r_b et de la largeur de la base D.

Paramètres	Description
α [°]	Angle relatif entre les deux bases du simplex
$\frac{D_s}{e}$ [/]	Rapport entre le diamètre D_s des barres et leur épaisseur e
r_b [m]	Rayon du cercle circonscrit définissant la base du simplex
D [m]	Largeur de la base du simplex valant $\frac{3}{2}r_b$

TABLE 8 – Caractéristiques géométriques du $S0$.

4.2.2 Scenario de chargement

Maintenant que la géométrie du $S0$ ainsi que les matériaux qui le composent ont été rigoureusement définis, il ne reste plus qu'à établir le scénario de chargement externe. Celui-ci viendra s'ajouter au poids propre de la structure. Pour une structure aussi triviale que le simplex, trois scenarii de chargement sont possibles :

— Chargement vertical des trois nœuds supérieurs (selon l'axe z).
— Chargement horizontal des trois nœuds supérieurs (selon l'axe x ou y).
— Combinaison d'un chargement vertical et horizontal des trois nœuds supérieurs.

Dans un cas de chargement réaliste d'une structure, il est fort probable que différents efforts externes agissent selon des orientations différentes. Ainsi, le cas de chargement qui sera retenu sera le troisième, c'est-à-dire une combinaison d'un chargement vertical et horizontal s'appliquant sur les trois nœuds supérieurs. Néanmoins les deux autres cas seront tout de même abordés dans le Chapitre 6 afin d'avoir une étude du simplex la plus complète possible et ainsi explorer tous les cas de charge qu'il est possible de rencontrer.

On note F la charge externe totale appliquée à la structure. Cette charge est répartie en deux composantes : une horizontale selon l'axe x et une verticale selon l'axe z. Chacune de ces composantes est ensuite répartie équitablement entre les trois nœuds supérieurs du simplex. Ainsi, chaque nœud reçoit une charge verticale et une charge horizontale, toutes deux égales à $\frac{F}{6}$.

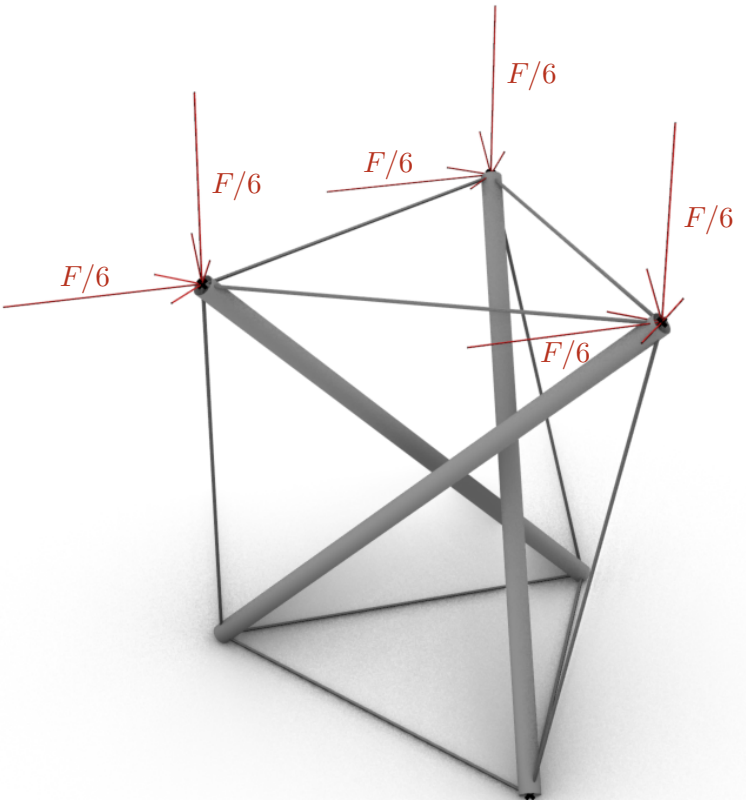


FIGURE 4.10 – Illustration du scenario de chargement du $S0$.

4.2.3 Paramètres encore inconnus

Il apparaît clairement que les paramètres définis dans les deux sections précédentes ne permettent pas, à eux seuls, de caractériser pleinement la forme optimisée du $S0$. Ils constituent une base initiale pour l'étude, dont l'objectif est désormais d'explorer les paramètres restants afin d'identifier la combinaison optimale de ces derniers, dont les valeurs restent à ce stade inconnues. Ces paramètres sont au nombre de trois :

— H : la hauteur du $S0$.
— D_s : le diamètre des barres composants le $S0$.
— D_c : le diamètres des câbles composants le $S0$.

Ces trois paramètres constitueront le cœur du processus d'optimisation dont l'objectif, dans le cas étudié ici et pour plusieurs niveaux de précontrainte, est de déterminer la combinaison de valeurs permettant d'obtenir le volume minimal tout en satisfaisant un critère de rigidité prédéfini. Un dernier paramètre interviendra également dans le processus d'optimisation : la précontrainte appliquée à la structure. Toutefois, ce paramètre ne relève pas des caractéristiques géométriques ou matérielles du $S0$.

4.2.4 Adimentionnalisation des paramètres à l'aide des indicateurs morphologiques

Les Sections 4.2.1 et 4.2.2 ont permis de définir les caractéristiques géométriques et mécaniques du $S0$ dans le cadre de ce premier cas d'étude, ainsi que le scenario de sollicitation auquel il est soumis. La Section 4.2.3 s'est quant à elle attachée à identifier les paramètres variables dont les valeurs optimales restent à déterminer. L'objectif est désormais de reformuler ces paramètres et caractéristiques sous une forme adimensionnelle. Cette adimensionnalisation présente de nombreux avantages, déjà brièvement évoqués en Section 3.1.

Dans un premier temps, les indicateurs morphologiques adimensionnels constituent des outils particulièrement puissants dans le cadre d'une démarche d'optimisation structurale. En effet, leur caractère sans dimension permet de généraliser les résultats obtenus à partir d'un ensemble restreint de cas d'étude, soigneusement choisis, à un grand nombre de structures différentes partageant les mêmes valeurs adimensionnelles.

Dans un second temps, ces indicateurs permettent d'agréger plusieurs paramètres en un seul, réduisant ainsi la complexité du processus d'optimisation en limitant le nombre de variables à prendre en compte.

Le tableau ci-après présente un récapitulatif des paramètres définissant le $S0$ dans ce premier cas d'étude. Les valeurs fixées pour ce cas d'étude mais qui le resteront pour les autres cas y sont indiquées en noir, les valeurs fixées pour ce cas-ci mais dont les valeurs changeront lorsqu'un autre cas sera étudié y sont indiquées en orange, tandis que les paramètres variables, dont les valeurs doivent être optimisées, sont représentés en bleu.

Paramères	Description
$\rho\ [kg/m^3]$	Poids volumique de l'acier
$E\ [MPa]$	Module de Young de l'acier
$\sigma_s\ [MPa]$	Contrainte maximale admissible dans les barres
$\sigma_c\ [MPa]$	Contrainte maximale admissible dans les câbles
$\alpha\ [°]$	Angle relatif entre les deux bases du simplex
$r_b\ [m]$	Rayon du cercle circonscrit définissant la base du simplex
$D\ [m]$	Largeur de la base du simplex valant $\frac{3}{2}r_b$
$\frac{D_s}{e}\ [/]$	Rapport entre le diamètre D_s des barres et leur épaisseur e
$F\ [kN]$	Charge externe totale d'appliquant à la structure
$H\ [m]$	Hauteur du simplex
$D_c\ [mm]$	Diamètre des barres du simplex
$D_s\ [mm]$	Diamètres des câbles du simplex
$P\ [kN]$	Précontrainte appliquée à la structure

TABLE 9 – Paramètres définissant le $S0$.

En se basant sur les indicateurs morphologiques présentés dans les Tableaux 3 et 4, on peut maintenant faire le lien entre les paramètres et ces indicateurs afin que dans le reste de ce mémoire, seul les indicateurs morphologiques restent utilisés.

— Sur base des paramètres D et H, on peut définir l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$. Cet indicateur, de par son numérateur, sera variable dans le processus d'optimisation, dont le but sera, pour chaque $\frac{H}{D}$ étudié, de trouver la valeur de l'indicateur de volume W optimale. Le but final sera de pouvoir définir la valeur de $\frac{H}{D}$ donnant la géométrie avec le meilleur indicateur de volume pour tous les cas étudiés.

— Sur base du paramètre $\frac{D_s}{e}$, on peut définir l'indicateur de la géométrie des sections des barres q. Dans ce cas d'étude initiale, cet indicateur reste constant. On verra plus tard qu'il devra varier afin de considérer les autres cas d'études.

— Sur base des paramètres D, σ_s, E, F, et sur base de l'indicateur de géométrie des sections q, il est possible de définir l'indicateur de flambement ψ. Dans ce cas d'étude initial, cet indicateur reste constant. On verra par la suite que cet indicateur, en le faisant varier, définira les autres cas d'études.

— Sur base des paramètres ρ, D et σ_s ou σ_c, il est possible de définir les indicateurs de poids propre ϕ_s et ϕ_c respectivement pour les barres et les câbles. Étant donné que tous les paramètres définissant ces indicateurs sont constants, ceux-ci le resteront pour tous les cas étudiés.

— Sur base des paramètres E et σ_s ou σ_c, il est possible de définir les indicateurs de raideur du matériau des barres et des câbles $\frac{E}{\sigma_s}$ et $\frac{E}{\sigma_s}$. Comme les paramètres définissant ces indicateurs sont constants, ceux-ci le resteront quelque soit le cas étudié.

Parmi tous ces indicateurs morphologiques primaire nous avons donc :

— Les indicateurs de raideur du matériaux $\frac{E}{\sigma_s}$ et $\frac{E}{\sigma_c}$, ainsi que les indicateurs de poids propre ϕ_c et ϕ_s qui seront constants dans tous les cas étudiés dans ce mémoire. Leurs valeurs numériques sont mentionnées dans l'Annexe B.

— Les indicateurs de flambement ψ et de géométrie des sections des barres q qui sont constants pour un cas d'étude donné, mais varieront lorsqu'un autre cas sera considéré. Les valeurs numériques pour chaque cas étudié sont mentionnées dans l'Annexe B.

— L'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ qui sera une variable dans tous les cas étudiés.

Il reste maintenant à obtenir les indicateurs morphologiques secondaires :

— Sur base des paramètres F et P, il est possible d'obtenir l'indicateur de précontrainte. Au cours de l'optimisation, le but sera, pour différents niveaux de précontrainte $\frac{P}{F}$, de trouver le W optimal pour chaque $\frac{H}{D}$ étudié.

— Sur base des paramètres σ_s, D_s, D_c, F et H, il est possible d'obtenir l'indicateur de volume W. Cet indicateur est l'indicateur à minimiser dans chaque cas étudié. Pour chaque combinaison des indicateurs $\frac{H}{D}$ et $\frac{P}{F}$, l'algorithme d'optimisation a pour but de trouver la valeur minimale de W respectant les conditions imposées.

Les indicateurs morphologiques utilisés dans le cadre du processus d'optimisation ont désormais été définis rigoureusement, en tenant compte de leur rôle spécifique au sein de l'algorithme. La suite de ce mémoire s'appuiera exclusivement sur ces grandeurs adimensionnelles, afin de garantir une démarche aussi générale et transposable que possible. Le tableau suivant présente un récapitulatif de l'ensemble de ces indicateurs. Les valeurs constantes sont indiquées en noir, celles qui sont fixées pour le cas d'étude considéré mais susceptibles de varier selon d'autres cas sont indiquées en orange, et enfin, les paramètres devant être déterminés au cours du processus d'optimisation apparaissent en bleu.

Indicateurs	Description
$\frac{E}{\sigma_s}$-$\frac{E}{\sigma_c}$	Indicateurs de raideur du matériau
ϕ_s-ϕ_c	Indicateurs de poids propre du matériau
ψ	Indicateur de flambement
q	Indicateur de géométrie des sections
$\frac{H}{D}$	Indicateur d'élancement géométrique
W	Indicateur de volume
$\frac{H}{\delta}$	Indicateur de déplacement nodal

TABLE 10 – Indicateurs morphologiques définissant le $S0$.

4.3 Optimisation d'un simplex tenségrité pour différents états de précontrainte et de son treillis homologue

Jusqu'à présent, ce mémoire a présenté de manière générale les objectifs de l'étude ainsi que les méthodes envisagées pour les atteindre. Il a notamment été établi que l'objectif principal consistait à évaluer si une structure simplex en tenségrité pouvait se révéler plus légère et plus rigide que son équivalent en treillis.

Pour répondre à cette problématique, une méthode d'optimisation fondée sur l'utilisation d'indicateurs morphologiques a été présentée. Cette méthode vise, pour un cas d'étude donné, à identifier la configuration optimale de la structure — en particulier les paramètres adimensionnels tels que le rapport $\frac{H}{D}$, W et $\frac{H}{\delta}$ — pour un état de précontrainte spécifique.

Dans un second temps, en considérant plusieurs états de précontrainte, l'objectif est de sélectionner, parmi l'ensemble des configurations optimisées, celle présentant le volume minimal tout en satisfaisant un critère de rigidité prédéfini, qui sera dès lors considéré comme la solution idéale du cas d'étude considéré.

La présente section expose en détail la méthode de résolution employée dans le cadre de cette étude, dans une perspective plus appliquée, afin de conduire aux résultats nécessaires pour répondre à la problématique initiale.

4.3.1 Méthode d'optimisation manuelle pour différents états de précontrainte

Toutes nos hypothèses ayant été définies et présentées dans les Sections 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 et 4.2.4, il est maintenant possible de trouver l'ensemble de nos résultats.

Dans le cadre de cette méthode de résolution manuelle, la première étape consiste à faire varier l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, dans le but d'identifier la valeur conduisant à une configuration structurale optimale. L'objectif est donc, pour chaque état de précontrainte considéré, de déterminer le rapport $\frac{H}{D}$ le plus adapté. Cet indicateur est exploré sur une plage de valeurs comprises entre $\frac{H}{D} = 0.5$ et $\frac{H}{D} = 4$. Le choix de la borne inférieure repose sur des considérations géométriques et mécaniques : une structure trop aplatie, c'est-à-dire significativement plus large que haute, présente un intérêt limité d'un point de vue structural. Intuitivement, ce type de configuration ne favorise ni la rigidité ni la stabilité, et apparaît donc peu pertinent. La borne supérieure a été fixée selon une logique similaire. Des structures présentant un élancement trop élevé sont également peu adaptées à des applications réelles, notamment en raison de leur vulnérabilité aux déformations induites par des charges horizontales. Ces dernières peuvent générer d'importants moments fléchissants, compromettant ainsi la rigidité globale de la structure. Un élancement important induit également des dimensions de barres importantes, augmentant donc significativement la sensibilité au flambement.

Comme mentionné précédemment, le rapport $\frac{H}{D}$ sera déterminé pour différents états de précontrainte. L'indicateur de précontrainte considéré, noté $\frac{P}{F}$, variera selon les valeurs suivantes : 1, 3, 5, 7

et 10. La variation de cet état de précontrainte poursuit un double objectif. D'une part, elle permet de comparer les valeurs optimales de $\frac{H}{D}$ pour les différents niveaux de précontrainte, et ainsi d'évaluer l'évolution de ce paramètre en fonction de la quantité de précontrainte introduite. D'autre part, elle vise à identifier la quantité minimale de précontrainte nécessaire pour conférer au simplex une rigidité suffisante — soit équivalente à celle d'une structure treillis de référence, soit conforme au critère de flèche imposé dans le cadre de cette étude.

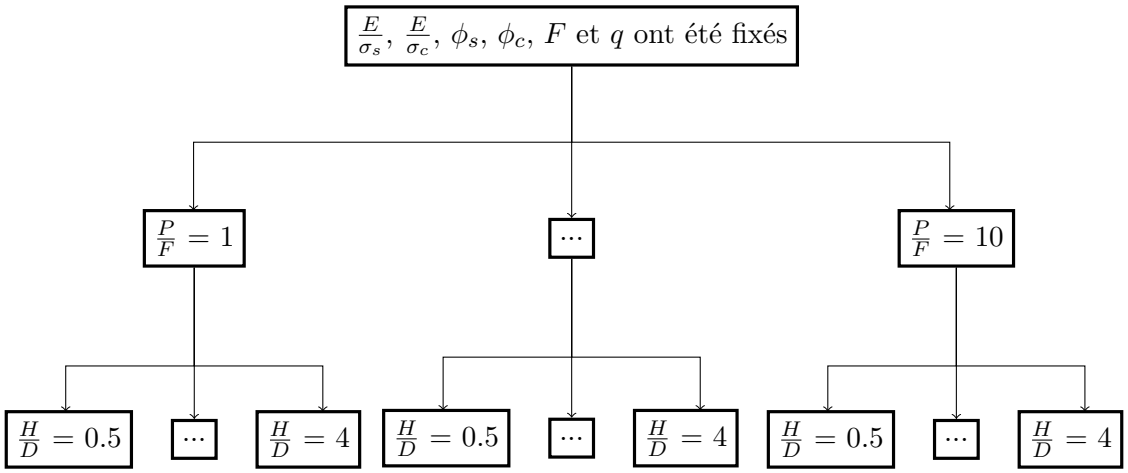


FIGURE 4.11 – Schéma des différents $\frac{P}{F}$ étudiés et des $\frac{H}{D}$ considérés pour chacun de ces $\frac{P}{F}$.

Maintenant qu'on a une arborescence claire des états de précontrainte et des indicateurs d'élancement géométrique associés à considérer, il est maintenant possible de s'attaquer à trouver la valeur de l'indicateur de volume optimal. Par essais-erreurs progressifs, on fera varier les diamètres des barres et des câbles, et la précontrainte en millimètres p pour trouver les combinaisons $D_s - D_c - p$ valides et donnant l'état de précontrainte recherché, parmi lesquels se trouve la solution minimale. Pour savoir si une solution est valide ou non, il est nécessaire d'introduire la formule d'optimisation utilisée dans ce processus, qui a été implémentée dans *Grasshopper*.

Cette formule d'optimisation associe à chaque combinaison $D_s - D_c - p$ une certaine valeur qui est donc à minimiser et qui dépend des différents éléments intervenant dans cette formule d'optimisation. Celle-ci peut être définie comme suit :

$$\text{Min } (W^2 + N_l + N_t + N_s + N_{add} + u) \tag{13}$$

Avec :

— W : l'indicateur de volume qui est calculé en direct dans *Grasshopper* à chaque variation de la combinaison $D_s - D_c - p$. Celui-ci est mis au carré dans la formule d'optimisation afin d'accentuer les écarts de valeurs entre les différentes solutions, malgré des combinaisons $D_s - D_c - p$ admissibles proches. Cela permet ainsi de converger plus facilement vers la solution.

— N_l : Le second terme de la fonction d'optimisation est associé à la contrainte relative à l'effort interne maximal admissible dans les câbles longitudinaux. En effet, si l'objectif principal de l'optimisation consiste à minimiser le volume de la structure, il est néanmoins essentiel de garantir la faisabilité structurale du simplex. Autrement dit, la solution obtenue doit être en mesure de résister aux charges appliquées. Cela implique que les efforts internes générés dans les câbles longitudinaux ne doivent en aucun cas excéder la valeur limite admissible de l'effort normal dans ces éléments. Cette condition prend la forme suivante :

$$\text{If } (N_{\text{Ed}} - N_{\text{adm}} < 0, 5000, 0) \tag{14}$$

Plus précisément, pour chaque combinaison $D_s - D_c - p$, on calcule la différence entre l'effort normal effectif et l'effort normal admissible dans les câbles longitudinaux. Si cette différence est négative, induisant donc un effort interne supérieur à l'effort maximale admissible, $N_l = 5000$, dans le cas contraire si la condition est respectée, $N_l = 0$. Ce poids de 5000 appliqué en cas de non respect de la condition permet d'exclure cette solution étant donné sa valeur beaucoup trop importante et la distinguer des solutions admissibles dont les valeurs seront nettement inférieures.

— N_t - N_s - N_{add} : Ces trois termes font, à l'instar de N_l, référence aux contraintes liées aux efforts internes maximaux admissibles dans les différents éléments de la structure, à savoir les câbles transversaux, les barres, et les câbles additionnels [1]. La valeur de ces termes dépendra, de manière identique, du respect ou non de la condition énoncée à l'Équation 14.

— u : Finalement, le dernier terme de cette formule d'optimisation concerne le déplacement nodal maximal d'un des trois nœuds supérieurs du simplex. Comme pour les termes liés aux efforts internes dans les différents éléments de la structure, le terme u est lui aussi soumis à une condition qui dictera sa valeur.

Cette condition prend la forme suivante :

$$\text{If } (\frac{H}{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} > 1, d, 5000) \tag{15}$$

Cette condition vise à évaluer le déplacement nodal maximal des nœuds supérieurs de la structure, défini comme la distance entre la position initiale (x_1, y_1, z_1) et la position finale (x_2, y_2, z_2). L'objectif est de vérifier que ce déplacement ne soit pas excessif, afin de garantir une certaine rigidité structurale.

Dans le cadre de cette étude, un critère de rigidité égal à 1 a été imposé. Bien que relativement peu contraignant, ce seuil a été délibérément choisi afin d'éliminer les solutions présentant une déformée finale qui divergeait de la géométrie initiale, ce qui permet d'assurer une rigidité minimale du $S0$. Cette valeur volontairement faible permet toutefois de conserver une certaine liberté dans l'exploration des configurations géométriques, l'objectif étant avant tout de minimiser le volume pour un état de précontrainte donné. La rigidité associée à cette configuration est ensuite évaluée a posteriori, afin de juger de la pertinence de la solution du point de vue de sa rigidité comparée à celle de son homologue treillis ou de la condition de flèche imposée.

À partir de la fonction d'optimisation définie précédemment, la démarche adoptée consiste, pour chaque valeur de $\frac{H}{D}$, à initialiser arbitrairement une combinaison de valeurs faibles pour les paramètres D_s et D_c. La quantité de précontrainte p appliquée à la structure est ensuite augmentée progressivement jusqu'à atteindre la valeur maximale admissible permettant d'obtenir une solution structuralement valide.

Si, au cours de ce processus, l'état de précontrainte cible — défini par le rapport $\frac{P}{F}$ — est atteint sans violer les contraintes imposées, alors la configuration obtenue est considérée comme optimale pour les paramètres étudiés. Dans le cas contraire, les valeurs de D_s et D_c sont augmentées par petites incréments, et la procédure est répétée avec une nouvelle augmentation de la précontrainte. Ce processus itératif permet ainsi de converger progressivement vers la configuration optimale correspondant à une combinaison donnée de $\frac{H}{D}$ et de $\frac{P}{F}$. En répétant cette démarche pour toutes les combinaisons $\frac{H}{D} - \frac{P}{F}$, on obtient finalement le graphe illustré à la Figure 4.12.

1. Comme mentionné précédemment dans ce chapitre, l'étude porte ici sur le cas d'un simplex $S0$ ne comportant pas de câbles additionnels. Par conséquent, le terme N_{add} est nul dans cette configuration. Il n'interviendra qu'au moment où l'introduction de câbles additionnels sera envisagée.

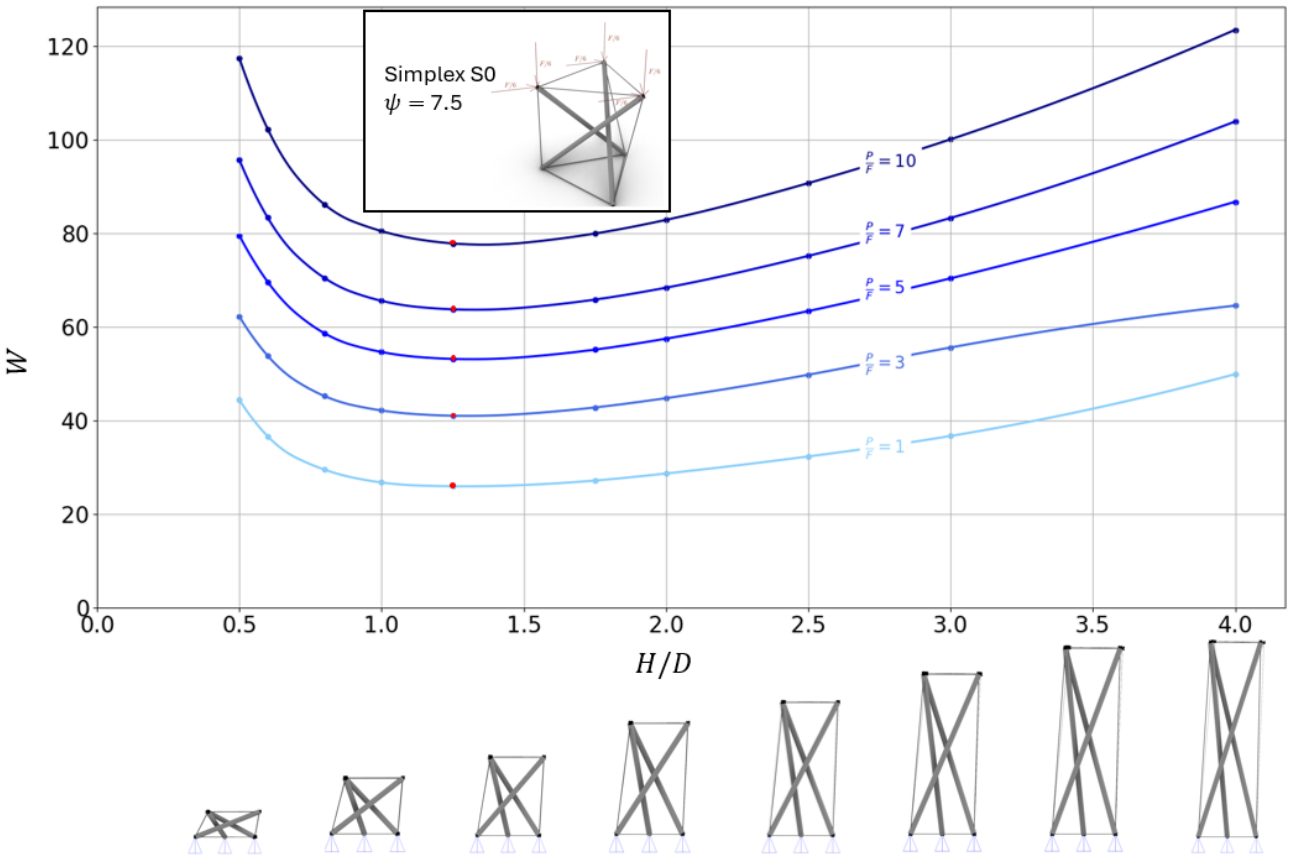


FIGURE 4.12 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$.

L'analyse du graphique présenté en Figure 4.12 permet de tirer plusieurs observations significatives. Tout d'abord, on constate que pour des valeurs extrêmes de $\frac{H}{D}$, le volume de matière nécessaire augmente considérablement. Cette tendance confirme la pertinence du choix des bornes inférieure et supérieure adoptées pour cet indicateur. En effet, dans ces configurations extrêmes, la structure nécessite un surdimensionnement pour compenser un déficit de rigidité, ce qui se traduit par une augmentation de l'indicateur de volume W, tendant vers l'infini lorsque $\frac{H}{D}$ tend respectivement vers 0 ou vers l'infini.

Ensuite, une deuxième observation importante concerne l'effet de l'état de précontrainte sur le volume de matière. Il apparaît clairement que l'augmentation de $\frac{P}{F}$ entraîne une hausse du volume requis. Ce résultat est cohérent d'un point de vue mécanique : une précontrainte plus importante induit des efforts internes plus élevés, nécessitant des sections plus importantes pour assurer la résistance de la structure.

Enfin, une première conclusion intéressante peut être formulée sur la base de cette figure. L'objectif était d'identifier, pour chaque niveau de précontrainte, le rapport $\frac{H}{D}$ minimisant le volume. Dans le cas présent, il apparaît que ce rapport optimal est identique pour tous les états de précontrainte considérés et se situe aux alentours de $\frac{H}{D} = 1.25$ (indiqué en rouge sur la Figure 4.12). Bien qu'il soit probable que cette valeur optimale varie légèrement en fonction du $\frac{P}{F}$ considéré, la détermination de la valeur exacte nécessiterait l'évaluation d'un grand nombre de valeurs très proches autour de $\frac{H}{D} = 1.25$, celle-ci peut raisonnablement être considérée comme une approximation à la fois fiable et suffisamment précise.

De la même manière, il est possible d'obtenir le graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de $\frac{H}{D}$ pour les différents états de précontrainte considérés (Figure 4.13).

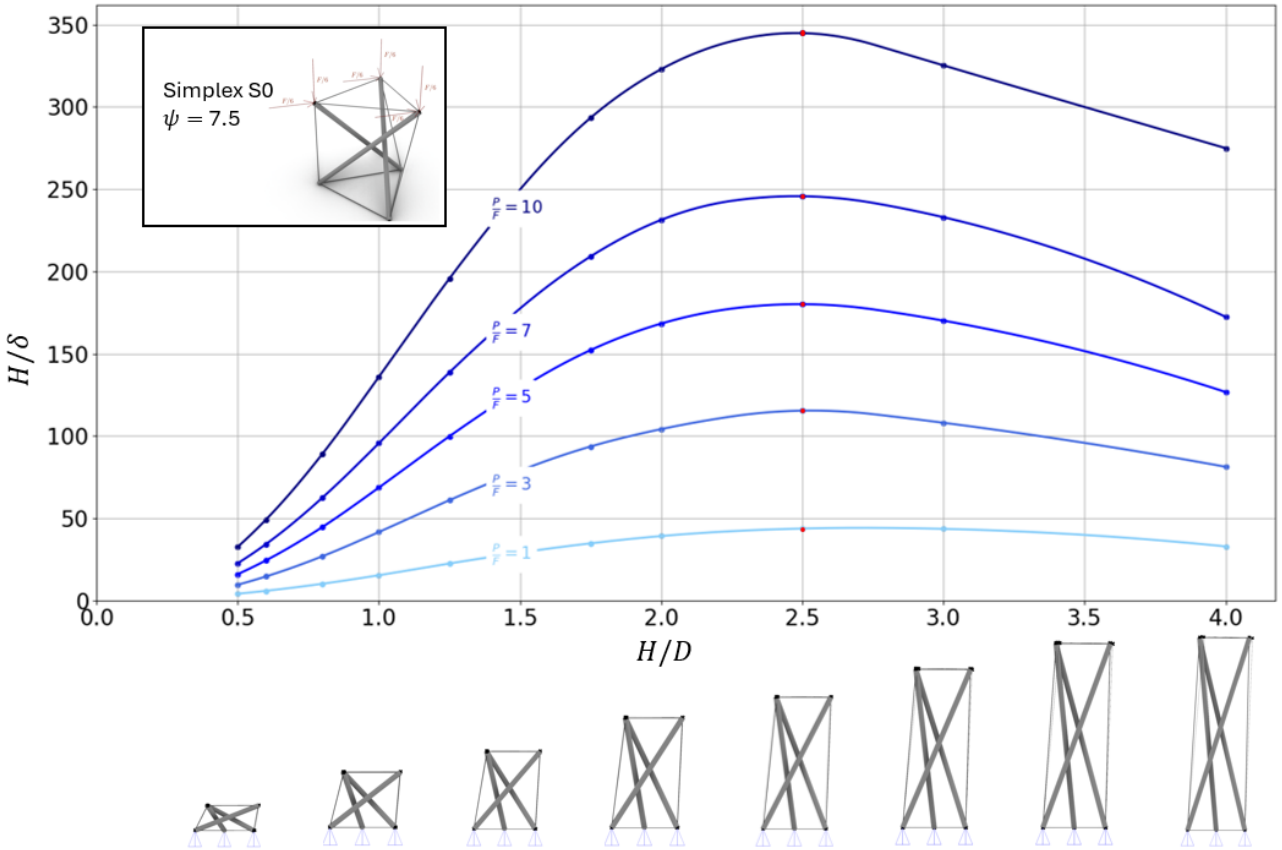


FIGURE 4.13 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$.

Ce second graphique permet de formuler de nouvelles conclusions concernant les paramètres optimaux pour la rigidité du $S0$ de volume minimal. En premier lieu, on observe que, pour une valeur donnée de $\frac{H}{D}$, la rigidité de la structure est globalement proportionnelle à la quantité de précontrainte appliquée. Cette observation met en évidence la nécessité de trouver un compromis adéquat : introduire une précontrainte suffisamment faible pour limiter le volume de matière, tout en garantissant qu'elle soit assez importante pour assurer un niveau de rigidité satisfaisant.

On observe également que, comme cela a déjà été mentionné, les valeurs extrêmes du rapport $\frac{H}{D}$ conduisent à des configurations structurellement peu rigides. Dans le cas d'un simplex fortement aplati, la structure ne dispose pas d'une hauteur suffisante pour offrir une résistance efficace aux charges verticales. À l'inverse, un simplex trop élancé présente une faible capacité à résister aux sollicitations horizontales, notamment aux moments fléchissants induits. Cette double limitation explique la forme en cloche de la courbe : la rigidité augmente dans un premier temps avec l'élancement, traduisant une amélioration de la résistance verticale, puis diminue au-delà d'un certain seuil, en raison d'une réduction de la résistance aux charges horizontales.

Enfin, il est à noter que, tout comme dans le graphique précédent (Figure 4.12), le rapport $\frac{H}{D}$ correspondant à la rigidité maximale apparaît comme indépendant de l'état de précontrainte considéré. Dans le cas présent, cette valeur optimale se situe aux environs de $\frac{H}{D} = 2.5$. Bien que cette valeur puisse légèrement fluctuer selon le niveau de précontrainte $\frac{P}{F}$, elle constitue une estimation robuste et fiable dans le cadre de cette analyse.

Puis-ce qu'on est dans le cas d'une structure non-linéaire, il est normal d'obtenir une valeur de $\frac{H}{D}$ différente selon qu'on veut minimiser le volume ou maximiser la rigidité. Il faut donc, sur base des résultats obtenus jongler entre volume faible mais rigidité suffisante.

Pour plus de clarté, il est possible de combiner ces deux graphes en un seul. En identifiant le volume des combinaisons $D_s - D_c - p$ donnant une certaine rigidité, il est possible, sur la Figure 4.12, de définir des zones de rigidité permettant directement de trouver, pour une rigidité souhaitée, la configuration avec le volume minimale.

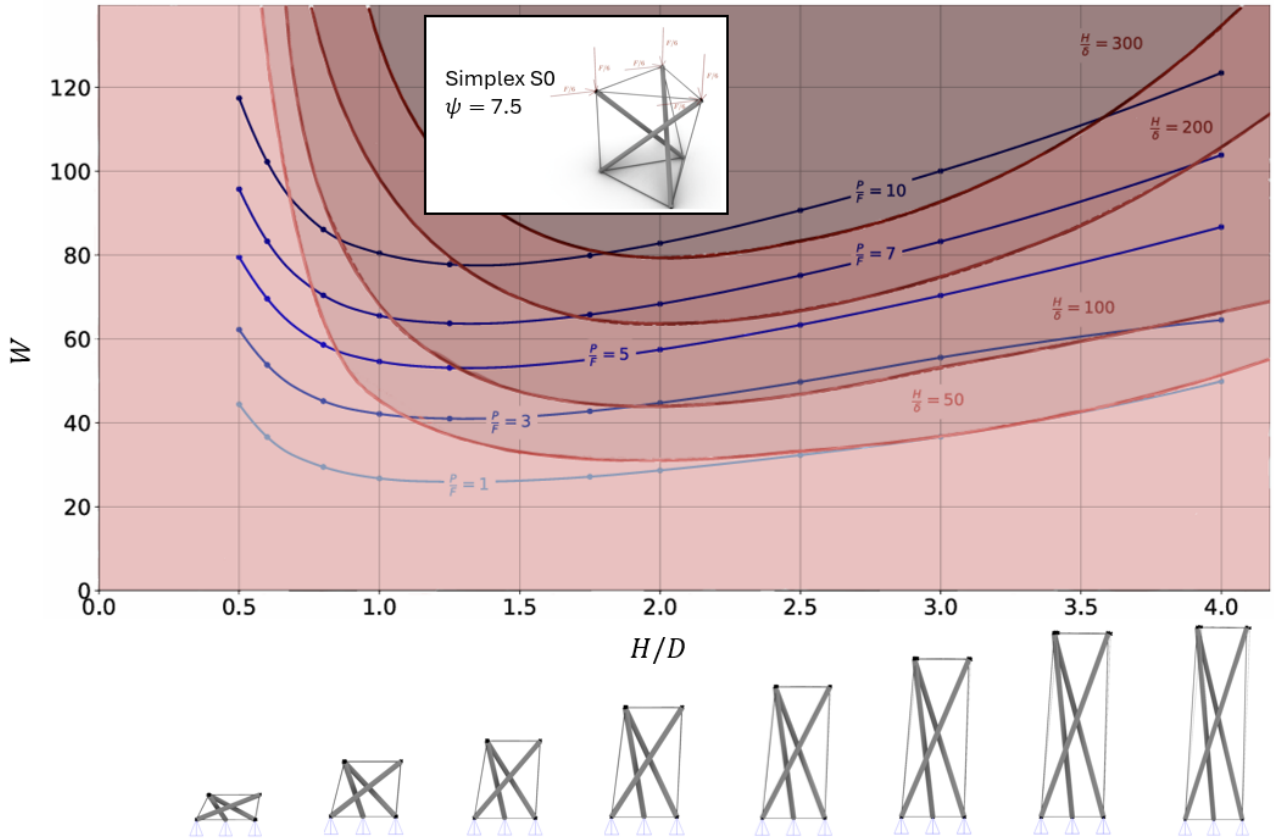


FIGURE 4.14 – Zones indiquant la rigidité atteinte par les différents indicateurs de volume W mesurés.

4.3.2 Méthode d'optimisation manuelle d'un treillis homologue au simplex

Afin de procéder à une comparaison rigoureuse entre les structures en tenségrité et les structures treillis, il est nécessaire d'appliquer une démarche d'optimisation similaire à une structure treillis équivalente à celle en tenségrité. Toutefois, dans le cas du treillis, cette démarche s'avère considérablement simplifiée. En effet, la seule variable à déterminer pour optimiser l'indicateur de volume W est le diamètre D_s des barres composant la structure.

Cette simplification s'explique par la nature du treillis, constitué exclusivement de barres identiques, et par son comportement linéaire. L'absence de câbles et de précontrainte supprime la complexité introduite dans le cas du simplex en tenségrité, où trois variables – à savoir D_s, D_c et p - devaient être ajustées simultanément. L'optimisation du treillis devient ainsi un problème unidimensionnel, ne nécessitant que la variation de D_s pour atteindre une solution optimale.

La formulation de l'optimisation diffère également. Dans une structure treillis, il n'existe plus de distinction stricte entre les éléments en traction et ceux en compression, contrairement au cas du simplex. Il convient donc de s'assurer, pour chaque barre, que l'effort interne résultant des charges appliquées ne dépasse ni la limite admissible en traction, ni celle en compression. Par conséquent, la fonction d'optimisation dans le cas du treillis T [1] prend la forme suivante :

$$\text{Min } (W^2 + N_{trac} + N_{comp} + u) \tag{16}$$

1. Le treillis T fait référence à un treillis équivalent au simplex $S0$.

Avec :

— W : l'indicateur de volume qui est calculé en direct dans *Grasshopper* à chaque variation du diamètre des barres D_s. Celui-ci est mis en carré dans la formule d'optimisation afin d'accentuer les écarts de valeurs entre les différentes solutions, malgré des valeurs de D_s admissibles proches. Cela permet ainsi de converger plus facilement vers la solution.

— N_{trac} - N_{comp} : Les deux termes suivants font référence aux conditions liées aux efforts internes dans les barres du T. Plus précisément, grâce à une implémentation rigoureuse dans *Grasshopper*, ces deux conditions vont répertorier respectivement l'effort maximal de traction pour N_{trac} et l'effort maximal de compression pour N_{comp}. Une fois ces valeurs identifiées, celles-ci passeront par la même condition présentée à l'Équation 14 et ainsi, N_{trac} et N_{comp} prendront une valeur nulle si l'effort interne est inférieur à l'effort maximal admissible, et une valeur de 500 dans le cas contraire.

— u : Finalement, le dernier terme de cette formule d'optimisation concerne le déplacement nodal maximal des trois nœuds supérieurs du T. Etant donné le caractère linéaire, la géométrie déformée peut être confondue avec la géométrie initiale. Il n'y ainsi aucun risque d'avoir des géométries déformées divergentes, si la condition sur les efforts internes est respectée. C'est pourquoi aucune condition sur cette valeur n'est appliquée.

Toutefois, avant d'entamer le processus d'optimisation manuelle du T, il convient d'examiner une dernière variable encore indéterminée. Dans le cas du $S0$, les études préalables ont mis en évidence qu'un angle de 30° entre les bases inférieures et supérieures, avant la prise en compte du poids propre et des charges extérieures, correspondait à une configuration optimale. Cette conclusion ne peut cependant pas être directement transposée au T analogue, dont le comportement structural diffère.

Il est donc nécessaire d'analyser au préalable l'angle optimal à adopter entre la base supérieure et la base inférieure. Cette étape permet de garantir que le processus d'optimisation débute sur des hypothèses géométriques cohérentes et adaptées au type de structure étudié.

Étant donné que nous avons un cas de charge dans lequel à la fois des efforts verticaux et horizontaux agissent, il est très compliqué de trouver l'angle idéal. En effet, cet angle va varier selon l'orientation qu'on choisit de la charge horizontale. L'orientation dans l'espace de celle-ci ayant été choisie de manière arbitraire, la valeur de α qui sera choisie ici correspondra à l'angle idéal pour ce cas particulier de l'orientation spatiale de la charge horizontale.

Afin de déterminer la valeur optimale de l'angle α, une valeur de $\frac{H}{D} = 1.25$ est retenue. Ce rapport correspond à celui qui minimise le volume dans le cas du $S0$, et constitue ainsi une référence pertinente pour cette analyse. Une fois ce rapport fixé, une première phase d'optimisation est menée à l'aide de l'outil *Galapagos*. Conformément à la méthodologie décrite en Section 2.3.2, la fonction d'optimisation adoptée constitue le critère de performance à minimiser (ou "fitness"), tandis que les variables α (l'angle entre les bases) et D_s (le diamètre des barres) composent le génome. Après exécution de l'algorithme, l'optimisation automatique fournit une valeur optimale de α = -20°. Il est probable que cette valeur optimale d'angle varie légèrement en fonction du rapport $\frac{H}{D}$. Toutefois, dans la mesure où le rapport de 1.25 s'est révélé être le plus performant pour la structure en tenségrité, il apparaît raisonnable d'adopter cette même configuration géométrique pour la structure en treillis, et d'y associer l'angle optimal pour le T.

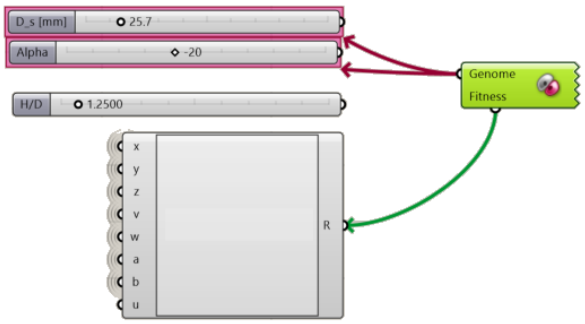


FIGURE 4.15 – Illustration de l'optimisation automatique de l'angle α avec *Galapagos*.

Maintenant qu'on a défini la valeur de α pour le cas du T, on peut, de manière analogue, procéder à la même optimisation manuelle que pour le $S0$. Pour chaque rapport $\frac{H}{D}$, on démarre d'une valeur initiale faible du diamètre D_s et on l'augmente progressivement jusqu'à l'obtention d'une configuration structuralement admissible. Ce processus permet de tracer la courbe représentée en Figure 4.16.

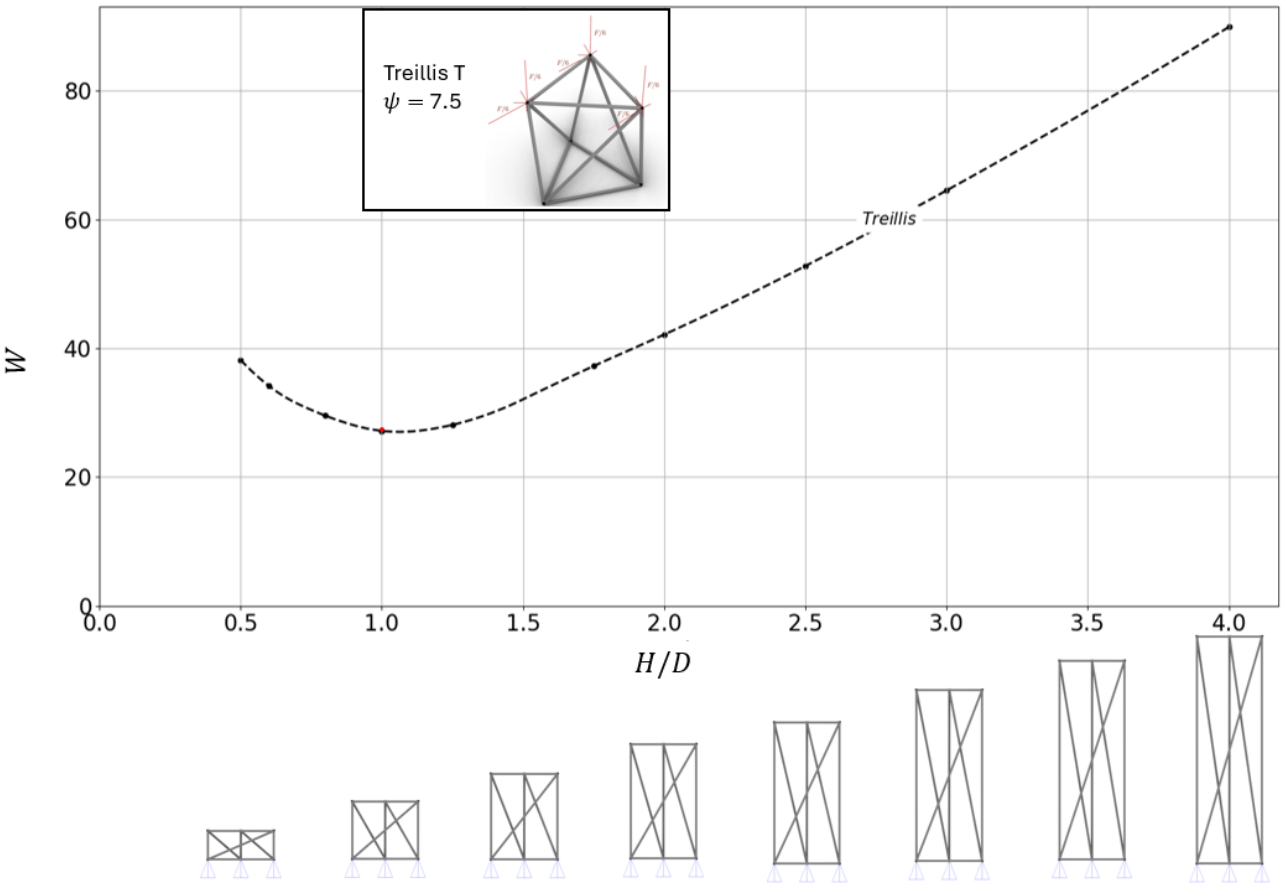


FIGURE 4.16 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour le T homologue au $S0$.

L'évolution de l'indicateur de volume W en fonction du rapport d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, présente une tendance similaire à celle observée pour la structure en tenségrité. Les configurations aplaties, caractérisées par de faibles valeurs de $\frac{H}{D}$, perdent en rigidité verticale, ce qui entraîne une augmentation significative de la quantité de matière nécessaire, pouvant tendre vers l'infini quand $\frac{H}{D}$ approche de zéro. Inversement, les structures très élancées deviennent moins efficaces face aux sollicitations horizontales, ce qui induit également une hausse notable du volume requis.

Une seconde observation importante réside dans la valeur du rapport $\frac{H}{D}$ minimisant le volume de la structure. Il apparaît que cette valeur ($\frac{H}{D} = 1$) est proche mais pas identique à celle obtenue pour le $S0$. Comme évoqué précédemment, bien que cette valeur corresponde à une estimation issue des mesures effectuées et non à une détermination analytique exacte, elle peut être considérée comme une approximation à la fois fiable et représentative du comportement optimal de la structure.

Grâce à cette démarche il est également possible d'obtenir le graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$.

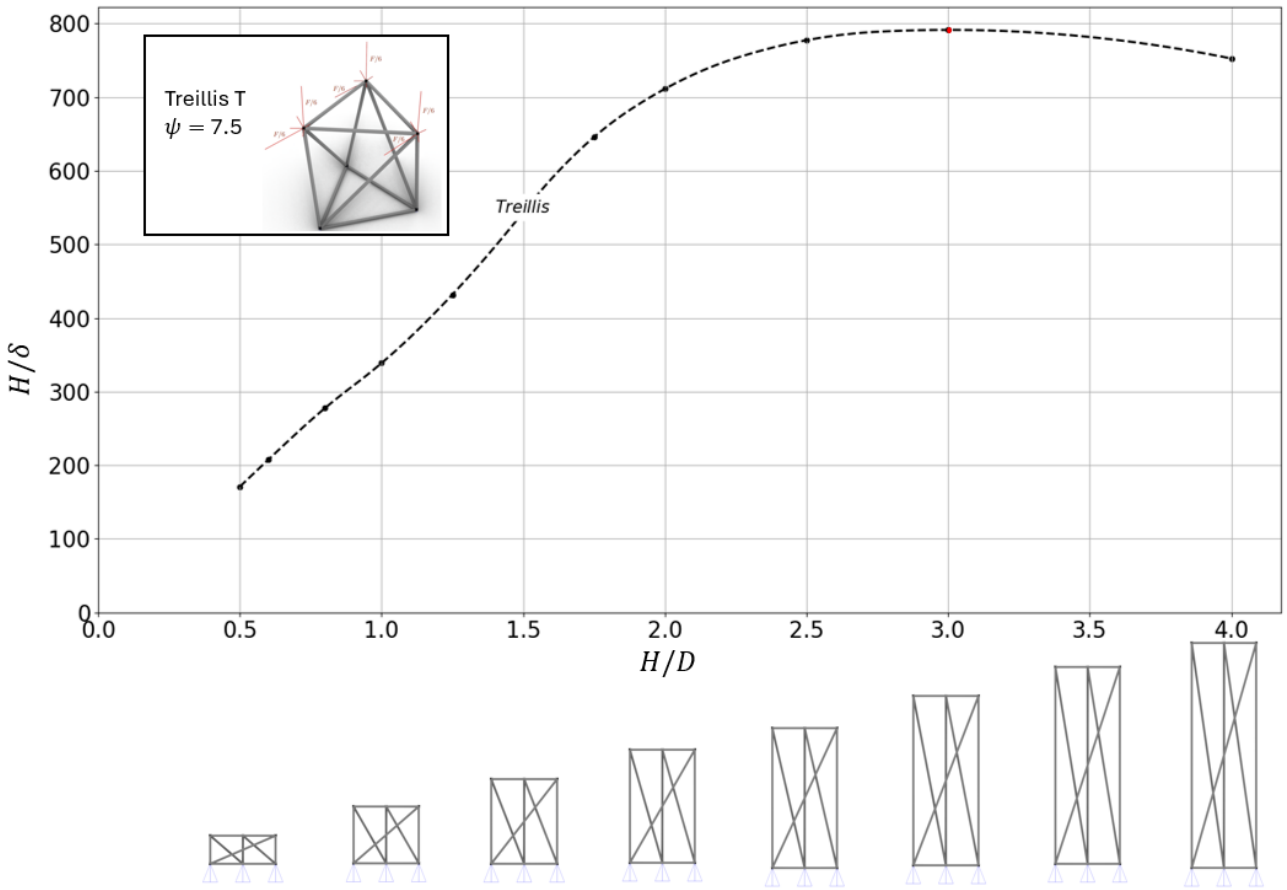


FIGURE 4.17 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour le T homologue au $S0$.

La courbe obtenue pour le T présente une évolution similaire à celle observée dans le cas du $S0$. Les valeurs extrêmes du rapport $\frac{H}{D}$ conduisent, comme précédemment, à des configurations moins rigides : un $\frac{H}{D}$ faible correspond à des structures peu rigides verticalement, tandis qu'un $\frac{H}{D}$ élevé est associé à une diminution de la rigidité horizontale. Ces résultats confirment l'existence d'un rapport $\frac{H}{D}$ optimal, garantissant une rigidité verticale sans induire une trop grande instabilité horizontale.

Dans le cas du T, ce rapport optimal est atteint pour $\frac{H}{D} = 3$. Cette valeur, relativement proche de celle identifiée pour le simplex, suggère une cohérence dans le comportement mécanique des deux types de structures. Elle met en évidence le fait que les indicateurs de performance — en l'occurrence, le volume de matière et le déplacement nodal — évoluent de manière similaire en fonction du rapport d'élancement, quel que soit le système structural considéré.

Maintenant qu'on a pu étudier l'évolution de l'indicateur de volume optimal et du déplacement nodal associé, il est possible de comparer ces deux systèmes structuraux et d'en tirer certaines conclusions intéressantes.

4.3.3 Comparaison du poids propre et de la rigidité d'un simplex tenségrité avec son homologue treillis

Après avoir effectué la méthode d'optimisation manuelle aussi bien sur le $S0$ que sur le T, il est maintenant possible de développer une comparaison détaillée et fiable entre ces deux systèmes structuraux. En effet, on a ici une structure en tenségrité et son homologue exacte en format treillis ce qui permet une mise en comparaison pertinente permettant de tirer un certain nombre de conclusions très importantes sur le sujet.

Tout d'abord concentrons nous sur le graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ présenté à la Figure 4.18. Ce graphe peut se diviser en trois parties distincts.

La première zone d'analyse concerne les faibles valeurs d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ (inférieures ou égales à 0.8). Dans cet intervalle, on observe que l'indicateur de volume associé à la structure en treillis est systématiquement inférieur à ceux obtenus pour les différents états de précontrainte du simplex. Ce constat s'explique aisément : dans ces configurations très aplaties, le déficit de rigidité est plus marqué pour le simplex que pour le treillis. En conséquence, la structure en tenségrité nécessite une quantité de matière plus importante afin de satisfaire les contraintes mécaniques imposées. Cette hypothèse sera vérifiée et renforcée lors de l'analyse comparative des indicateurs de déplacement nodal du T et du $S0$ pour différentes valeurs de $\frac{H}{D}$.

La seconde zone d'analyse concerne les valeurs du rapport d'élancement géométrique comprises entre 0.8 et 2.25. Dans cet intervalle, l'indicateur de volume associé à la structure en treillis demeure globalement inférieur à celui du simplex, à l'exception notable de la courbe correspondant au $S0$ soumis à un état de précontrainte de $\frac{P}{F} = 1$, laquelle présente des volumes légèrement plus faibles. Cette portion du graphe met ainsi en évidence que certaines configurations de simplex peuvent effectivement se révéler plus légères que le treillis homologue, en particulier lorsque la quantité de précontrainte introduite reste faible.

La dernière zone d'analyse concerne les rapports d'élancement géométrique compris entre 2.25 et 4. Dans cette plage de valeurs, on observe que l'indicateur de volume associé au treillis devient progressivement supérieur à celui du simplex, en particulier pour les états de précontrainte correspondant à $\frac{P}{F} = 3$ et $\frac{P}{F} = 5$.

Une explication relativement simple peut être avancée pour justifier cette tendance. Dans le cas du T, c'est l'effort de compression maximal qui dimensionne l'ensemble des barres. À mesure que le rapport d'élancement $\frac{H}{D}$ augmente, la longueur des barres les plus sollicitées en compression croît, ce qui entraîne une augmentation significative de la sensibilité au flambement et donc forcément du volume des barres. Par conséquent, le volume total du treillis tend à croître de manière de plus en plus marquée avec l'élévation de $\frac{H}{D}$.

En revanche, dans une structure en tenségrité (le simplex), les éléments sont dimensionnés séparément selon leur type d'effort : les barres sont dimensionnées en fonction de l'effort de compression maximal, tandis que les câbles le sont en fonction de l'effort de traction le plus élevé. Ainsi, si les barres du simplex peuvent subir une évolution volumique similaire à celle observée dans le treillis (leur sensibilité au flambement croit avec l'élancement), les câbles, eux, connaissent une augmentation de volume plus modérée. Cela s'explique par le fait que la résistance admissible à la traction est généralement bien plus élevée que celle à la compression, rendant l'effort de traction moins contraignant en termes de dimensionnement. On pourrait dans ce cas imaginer une courbe avec une évolution moindre pour des $\frac{H}{D}$ élevé, si on discriminait le diamètre des barres en traction et en compression.

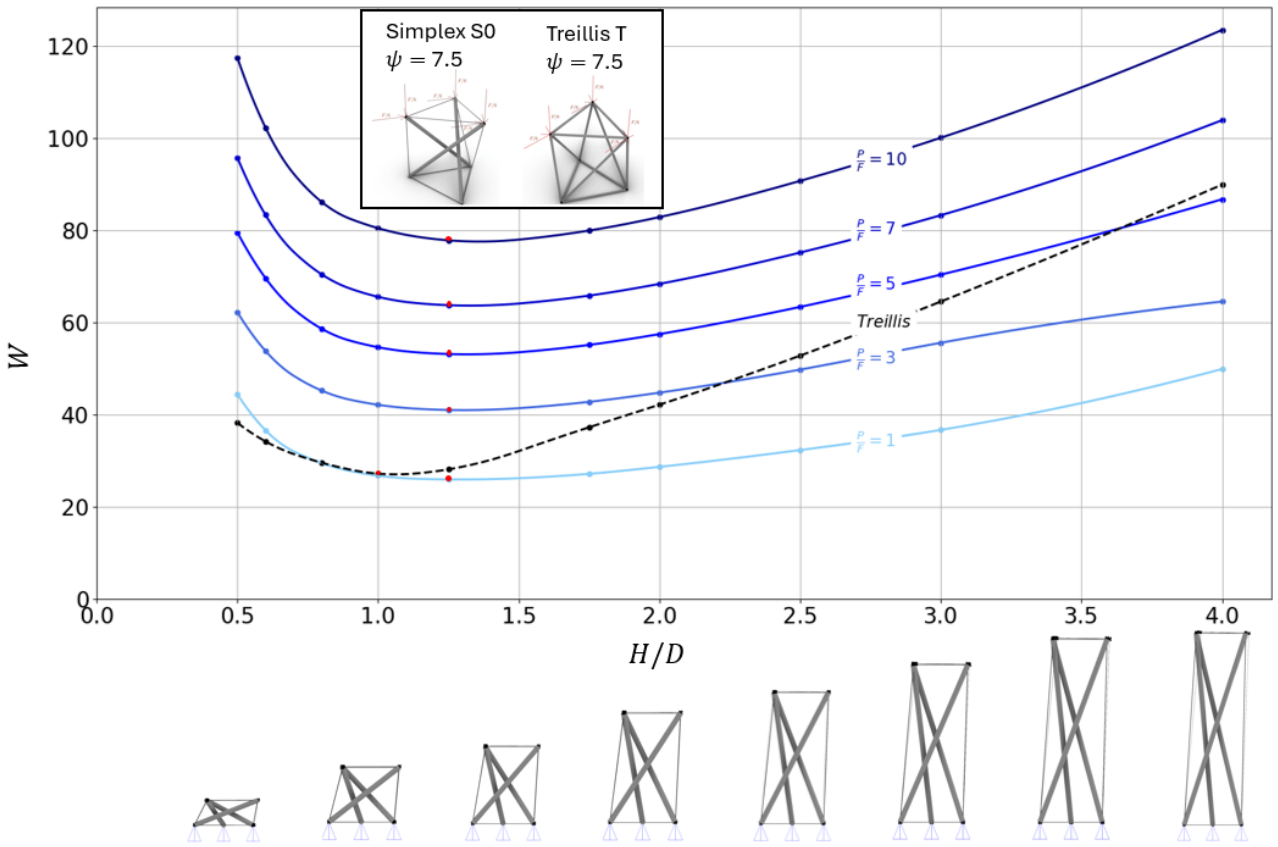


FIGURE 4.18 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T.

La Figure 4.18 a permis de comparer l'indicateur de volume entre la structure treillis T et le simplex $S0$ soumis à différents états de précontrainte. Il est désormais pertinent d'examiner les rigidités associées à ces configurations optimisées en volume (Figure 4.19). Cette analyse croisée permet de mettre en perspective les résultats précédemment obtenus. En effet, certaines configurations présentent un simplex plus léger qu'un treillis, mais cette économie de matière soulève une question essentielle : à quel prix en termes de rigidité structurale cela se traduit-il ?

Il est aisé de constater que la rigidité du modèle treillis, associée aux indicateurs de volume optimisé précédemment déterminés, s'avère significativement supérieure à celle des configurations simplex, et ce, quel que soit l'état de précontrainte étudié ici. De manière générale, la courbe représentant l'évolution du déplacement nodal de T suit une tendance similaire à celle observée pour les modèles simplex, tout en atteignant des valeurs de rigidité nettement plus élevées.

Prenons comme exemple la configuration de $S0$ présentant la rigidité maximale, à savoir pour un rapport $\frac{H}{D} = 2.5$ et un état de précontrainte $\frac{P}{F} = 10$. Pour ce même élancement, le T atteint une rigidité presque deux fois supérieure. Cette observation se vérifie pour l'ensemble des rapports $\frac{H}{D}$ étudiés : de manière générale, la rigidité du treillis est approximativement deux fois plus élevée que celle du modèle simplex avec un état de précontrainte de $\frac{P}{F} = 10$.

Ces résultats permettent de recontextualiser les observations faites concernant l'indicateur de volume. En effet, certaines configurations simplex peuvent présenter des volumes optimisés par rapport à leurs homologues en treillis, mais cette optimisation se fait au détriment de la rigidité. Il en résulte des structures un peu plus légères mais environ deux fois moins rigides. Bien que l'objectif principal ne soit pas nécessairement de maximiser la rigidité, cette propriété demeure un critère essentiel à prendre en compte. Dans une application réelle, la minimisation du volume de matière constitue un objectif pertinent, mais il faut toutefois s'assurer que les exigences en matière de flèche soient respectées,

afin d'éviter des déplacements excessifs susceptibles de compromettre la stabilité et la sécurité de la structure vis-à-vis de ses usagers.

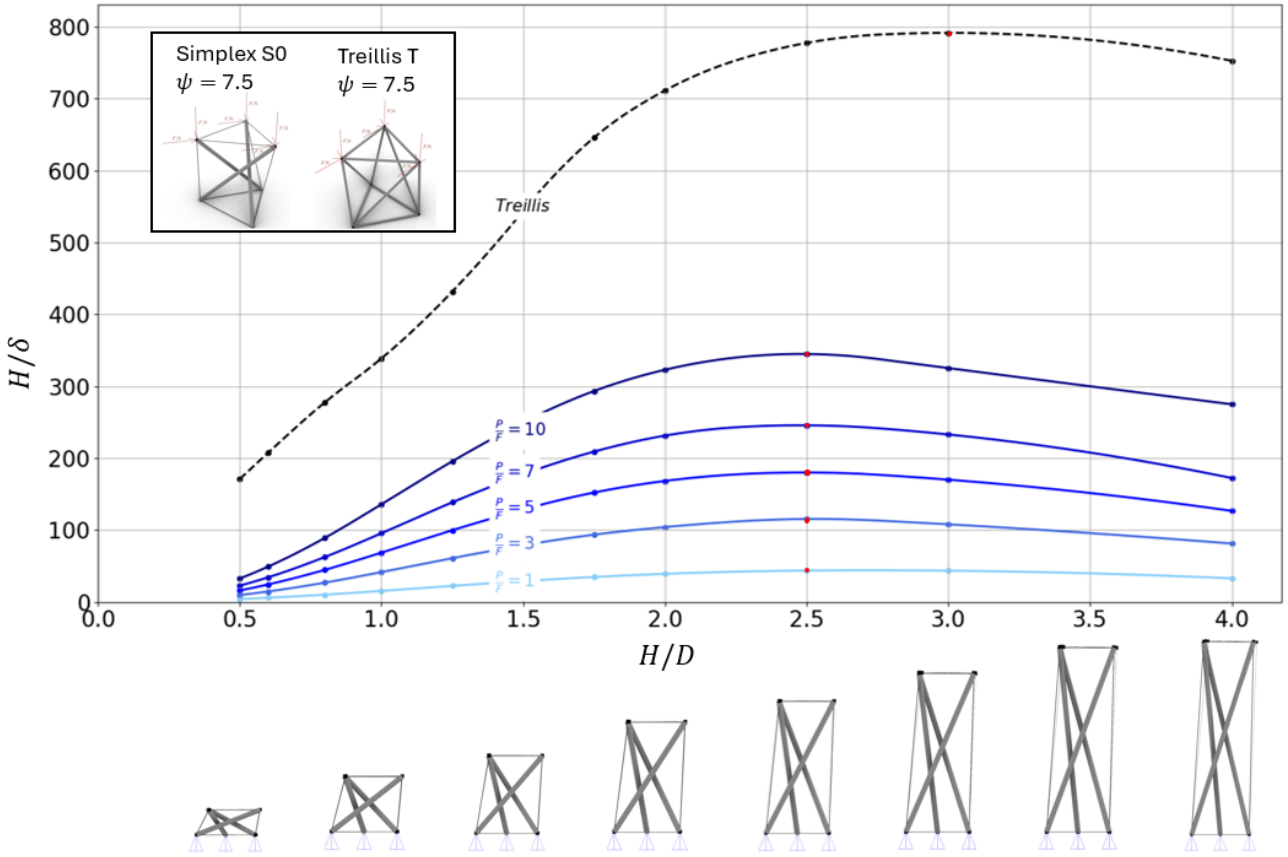


FIGURE 4.19 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T.

4.3.4 Méthode d'optimisation automatique à l'aide de *Galapagos*

La méthode d'optimisation manuelle a permis d'analyser et de mieux comprendre l'évolution conjointe de l'indicateur de volume optimisé et de la rigidité associée en fonction de l'élancement de la structure (dans le cas des modèles simplex et treillis) ainsi que de l'état de précontrainte (uniquement pour le modèle simplex). Cette démarche a ainsi permis de comparer rigoureusement les deux systèmes structuraux à travers les différentes configurations étudiées. Toutefois, cette comparaison peut être approfondie à l'aide d'une méthode d'optimisation automatique utilisant *Galapagos*.

En se basant sur les résultats issus de la courbe d'évolution de l'indicateur de volume du T, la configuration correspondant à un rapport $\frac{H}{D} = 1.25$ sera retenue pour la suite de l'étude. Bien que cette valeur ne corresponde pas à l'élancement optimal pour le treillis, elle représente en revanche la configuration la plus efficace pour le modèle simplex en terme de volume. Elle constitue donc un choix pertinent dans le cadre de cette analyse comparative. Pour cet indicateur d'élancement géométrique les caractéristiques du T sont les suivantes :

Indicateur de volume W	28.1
Indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$	431

TABLE 11 – Caractéristique du T optimisé pour un élancement $\frac{H}{D} = 1.25$.

À partir de cette configuration du modèle treillis et à l'aide de l'outil *Galapagos*, deux comparaisons seront effectuées entre le S_0 et le T. La première visera à identifier le simplex présentant un indicateur de volume équivalent à celui du treillis, afin de comparer les rigidités respectives. La seconde

consistera à déterminer celui dont la rigidité est identique à celle du treillis, et à comparer cette fois les indicateurs de volume. Cette double approche comparative permet de fournir une évaluation la plus fiable et la plus complète possible, afin de tirer des conclusions solides quant aux caractéristiques de légèreté et de rigidité du modèle simplex par rapport à son homologue en treillis.

Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique

Dans cette première comparaison, le diamètres des barres D_S, le diamètres des câbles D_c et la précontrainte p appliquée, constituent le génome de l'optimisation. Le fitness quant à lui correspond à la formule d'optimisation présentée à l'Équation 13 mais est tout de même légèrement modifiée pour s'adapter à ce qu'on recherche. La nouvelle formulation de cette formule d'optimisation est la suivante :

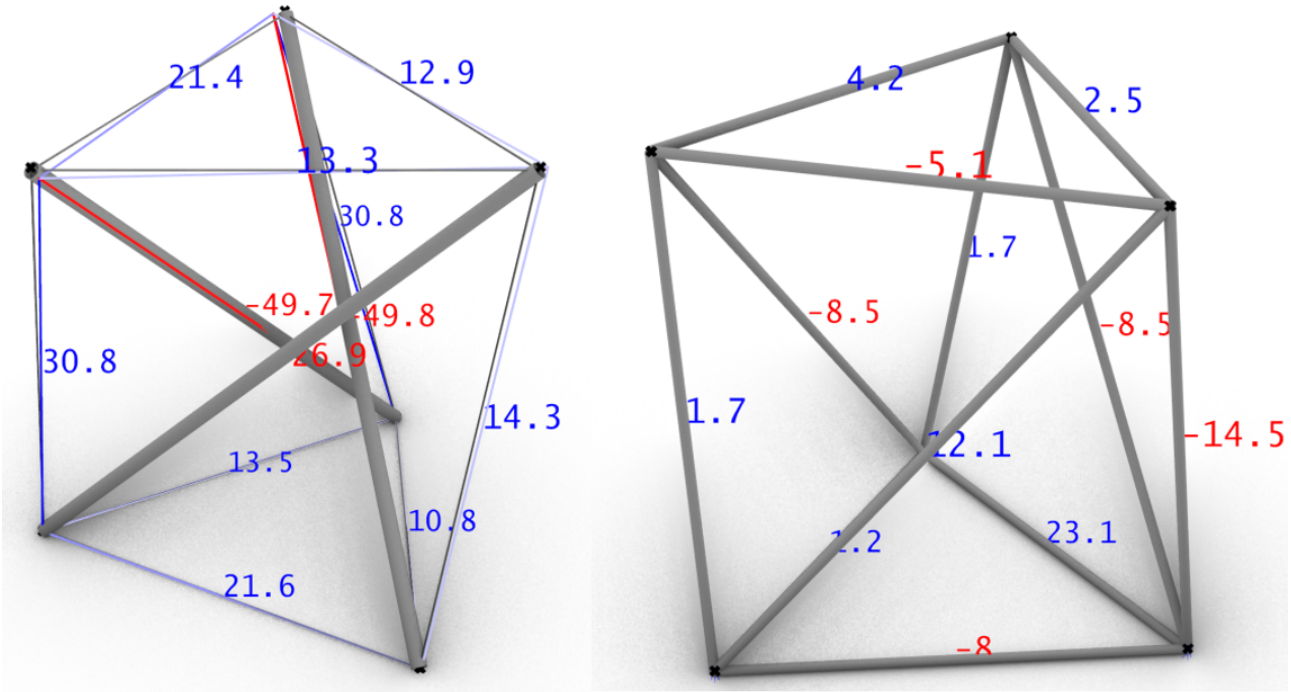
$$\text{Min } (W^2 + N_l + N_t + N_s + N_{add} + u + Q) \tag{17}$$

Le terme Q vient s'ajouter afin de créer une condition sur la valeur de W pour le simplex. En effet étant donné qu'on veut comparer les deux systèmes structuraux pour un même W, il faut exclure toutes les solutions dont le volume n'est pas identique à celui du T. Ainsi, la condition qui guide la valeur de Q prend la forme suivante :

$$\text{IF } (W_{S0} \geq 28.1, 0, 5000) \tag{18}$$

Cette condition va donc exclure toutes les combinaisons de volume plus faible que celle de T et étant donné que *Galapagos* cherche à minimiser la valeur obtenue par la formule d'optimisation, celui-ci tentera automatiquement de trouver une valeur de W aussi proche possible du volume du treillis T.

Après avoir lancé *Galapagos* avec cette formule d'optimisation, on obtient les résultats suivants, présentés à la Figure 4.20.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.01}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{26.3}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.2}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.01}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$

FIGURE 4.20 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W.

On observe ici de manière encore plus marquée l'écart significatif de rigidité entre le modèle simplex et le modèle treillis. Il apparaît clairement que le gain en matière permis par le modèle simplex engendre une perte considérable en termes de rigidité. En effet, celle-ci est environ $\frac{431}{26.3} = 16.4$ fois inférieure à celle du modèle treillis. Ce résultat met en évidence que, à volume équivalent, les structures en treillis offrent des performances mécaniques nettement supérieures à celles des structures en tenségrité.

Cette observation remet ainsi en question l'idée, jusqu'alors répandue, selon laquelle les structures en tenségrité constitueraient une alternative prometteuse aux structures treillis. Toutefois, avant de pouvoir tirer une conclusion définitive, il demeure nécessaire d'effectuer la seconde comparaison, laquelle permettra d'évaluer dans quelle mesure une structure en tenségrité est plus lourde ou, potentiellement, plus légère qu'une structure treillis équivalente en termes de rigidité.

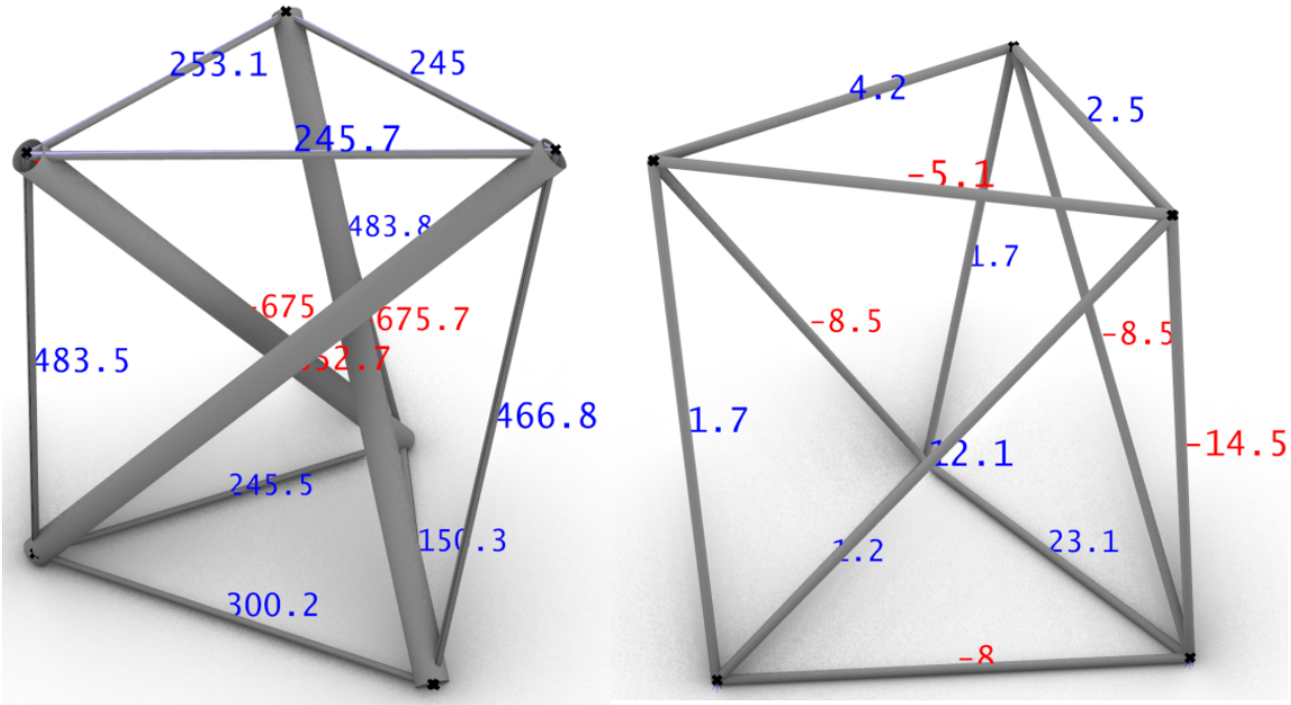
Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{D}$ identique

Dans le cadre de cette seconde comparaison, les mêmes paramètres — à savoir D_s, D_c et p — sont utilisés pour constituer le génome de l'algorithme *Galapagos*. La fonction d'optimisation (fitness de *Galapagos*) demeure identique à celle présentée dans l'Équation 17, à l'exception de la suppression du terme Q et d'une légère modification apportée à la condition imposée sur la valeur de u, dans le but d'introduire un critère de rigidité stricte dans le processus d'optimisation.

En effet, dans la mesure où l'objectif est ici de déterminer la configuration optimisée du modèle simplex dont la rigidité est équivalente à celle du treillis, il est impératif d'exclure toutes les solutions ne satisfaisant pas ce seuil de rigidité. La condition associée (analogue à celle de l'Équation 15) est donc reformulée de manière à garantir cette exigence, et s'exprime ainsi :

$$\text{If } (\frac{H}{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \geq 431, d, 5000) \tag{19}$$

Cette nouvelle optimisation automatique permet d'obtenir les résultats présentés à la Figure 4.21.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{133.3}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{22.5}$

$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.01}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$

FIGURE 4.21 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$.

Les conclusions sont davantages confirmées avec cette seconde comparaison. Quand on observe la différence de volume, il est clair que les structures en tenségrité ont un besoin beaucoup plus important en quantité de matière pour assurer une rigidité aussi stricte que celle proposée par le treillis. La différence de matière est tel que le $S0$ a un volume $\frac{133.3}{28.01} = 4.75$ fois plus important que le T pour obtenir une rigidité similaire.

Il est maintenant clair que lorsqu'on compare deux structures identiques dont l'une est en tenségrité et l'autre en treillis, le treillis présente les caractéristiques mécaniques et structurales beaucoup plus avantageuses, avec :

— A volume égal, une rigidité 16 fois supérieure
— A rigidité égale, un volume 5 fois inférieur

Il convient à présent de vérifier la validité de cette conclusion de manière plus générale et systématique. En effet, l'analyse menée jusqu'ici repose sur un cas particulier défini à partir d'un ensemble d'hypothèses spécifiques. Les sections suivantes s'attacheront donc à explorer une série de cas d'étude complémentaires, afin de fournir une évaluation plus globale et robuste de la conclusion formulée dans cette première analyse.

4.4 Variation de l'indicateur de flambement avec le scénario de chargement F choisi

La section précédente (Section 4.3) avait pour objectif d'analyser les configurations optimisées d'un modèle simplex S_0 et d'un modèle treillis T dans le cadre d'un premier cas d'étude, fondé sur un ensemble d'hypothèses spécifiques. Il convient toutefois de souligner que ces hypothèses initiales présentent un caractère relativement arbitraire. Il est donc légitime de s'interroger sur l'impact potentiel d'une modification de ces hypothèses sur les résultats obtenus. En se référant aux Tableaux 9 et 10, qui récapitulent l'ensemble des paramètres et indicateurs morphologiques intervenant dans cette étude, on observe que certains paramètres (identifiés en orange) demeurent constants dans le cadre d'un cas d'étude donné, mais peuvent varier pour générer de nouvelles configurations expérimentales. C'est précisément l'objectif poursuivi dans cette section.

Dans le cadre du premier cas d'étude, les hypothèses adoptées conduisaient à une valeur de l'indicateur de flambement $\psi = 7.5$, ce qui correspond à une situation dans laquelle l'influence du flambement reste modérée. L'expression de cet indicateur montre qu'il dépend notamment de la force appliquée à la structure F et de l'indicateur géométrique des sections q, ce dernier étant directement lié au rapport $\frac{D_s}{e}$. Ainsi, en faisant varier les valeurs de F et de $\frac{D_s}{e}$, il est possible de générer de nouveaux cas d'étude caractérisés par des valeurs de ψ différentes. Cette section se concentre sur la variation de la valeur de F, tandis que la section suivante abordera la variation de $\frac{D_s}{e}$.

L'objectif de cette démarche est d'examiner le comportement des structures dans des contextes où la sensibilité au flambement serait soit accrue (valeurs élevées de ψ), soit négligeable (valeurs de ψ proches de zéro), et ainsi d'évaluer la robustesse des résultats obtenus dans le cas de référence face à des conditions de flambement plus ou moins contraignantes.

4.4.1 Application d'une force 10x plus petite

Pour bien comprendre ce choix de diminuer la valeur de la force F appliquée à la structure dans ce second cas d'étude, reprenons la formule définissant l'indicateur de flambement ψ :

$$\psi = \frac{\sigma_s D}{\sqrt{q E_s F}} \tag{20}$$

En se référent au Tableau 9, on remarque que les facteurs σ_s, D et E_s restent fixes tout au long de cette étude. On a également défini dans l'introduction de cette section que, dans un premier temps, nous garderons q fixe et feront varier F, avant de procéder à la démarche inverse. Étant donné que le paramètre F apparaît au dénominateur de l'expression de ψ, une diminution de la charge appliquée créera un nouveau cas dont la sensibilité au flambement est plus importante (valeur de ψ plus élevée). Les nouvelles valeurs numériques utilisées sont présentées en Annexe C [1] .

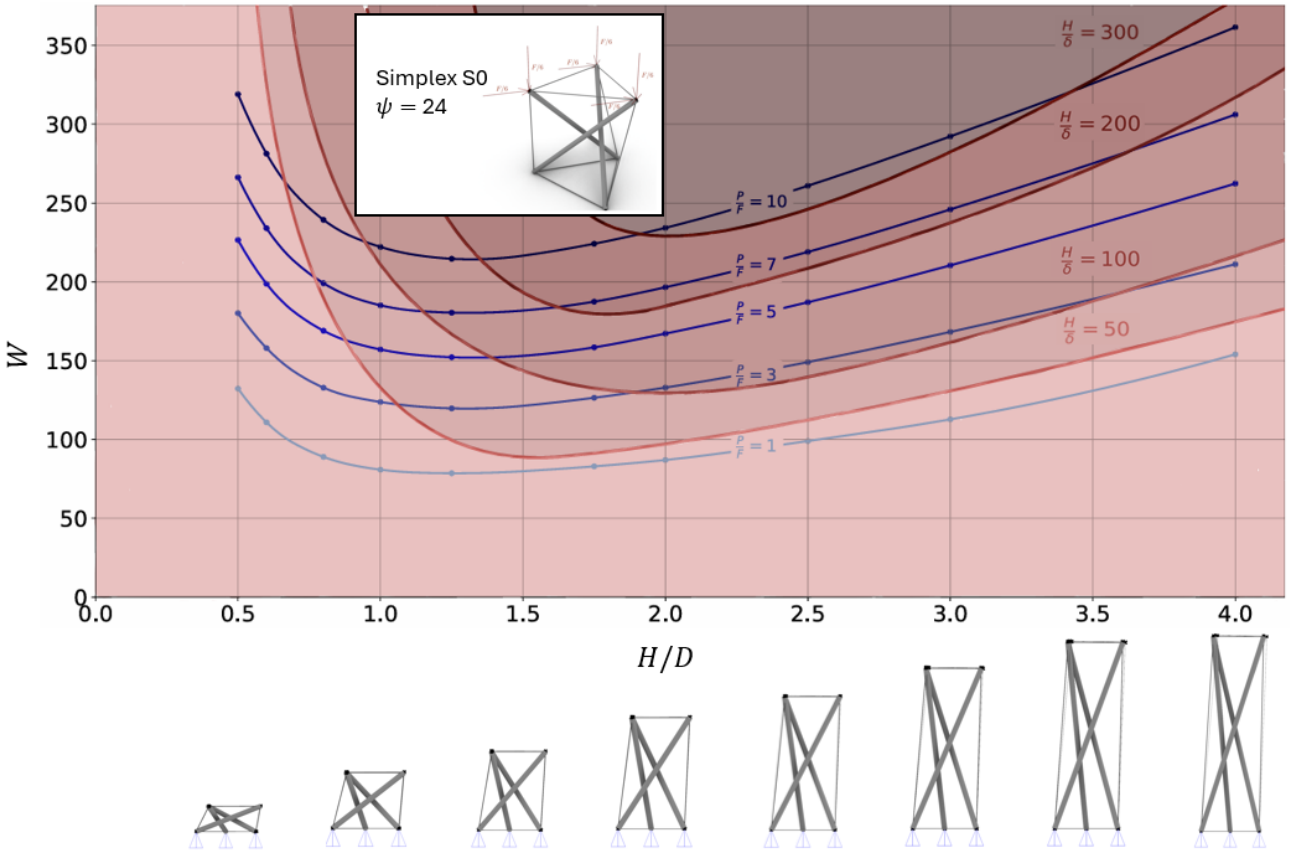


FIGURE 4.22 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 24$.

Par une procédure d'optimisation similaire à celle présentée à la section précédente, il est possible d'obtenir le graphe de la Figure 4.22. Premièrement, l'analyse de l'axe des ordonnées révèle que le $S0$ présente un volume nettement plus élevé que dans le cas précédent. Ce résultat est cohérent, la sensibilité accrue au flambement, traduite ici par une valeur plus élevée de l'indicateur ψ, impose une augmentation du volume de matière afin de compenser cette vulnérabilité structurale. Il est toutefois intéressant de noter que la valeur de $\frac{H}{D}$ pour laquelle le volume est minimal reste inchangée.

Deuxièmement, en ce qui concerne la rigidité, on constate que celle-ci demeure globalement stable malgré l'augmentation de ψ. Plus précisément, la rigidité des différentes configurations ne varie pas de manière significative, au point de modifier l'emplacement des zones de rigidité sur le graphe. Cette observation indique que, bien qu'une quantité de matière supplémentaire soit effectivement mobilisée pour répondre aux exigences liées au flambement, celle-ci concerne majoritairement les câbles (éléments peu rigides) et n'est pas à ce point importante que pour augmenter leur rigidité.

Si on met maintenant en comparaison ce graphe avec celui du T homologue, on remarque que le volume du treillis évolue de la même façon que celle du simplex. Les observations sont donc exactement les mêmes que celles faites sur base du graphe de la Figure 4.18.

1. La majorité des valeurs numériques restent inchangées par rapport à celle présentées en Annexe B. Seules les valeurs qui changent et les indicateurs morphologiques impactés sont présentées en Annexe C.

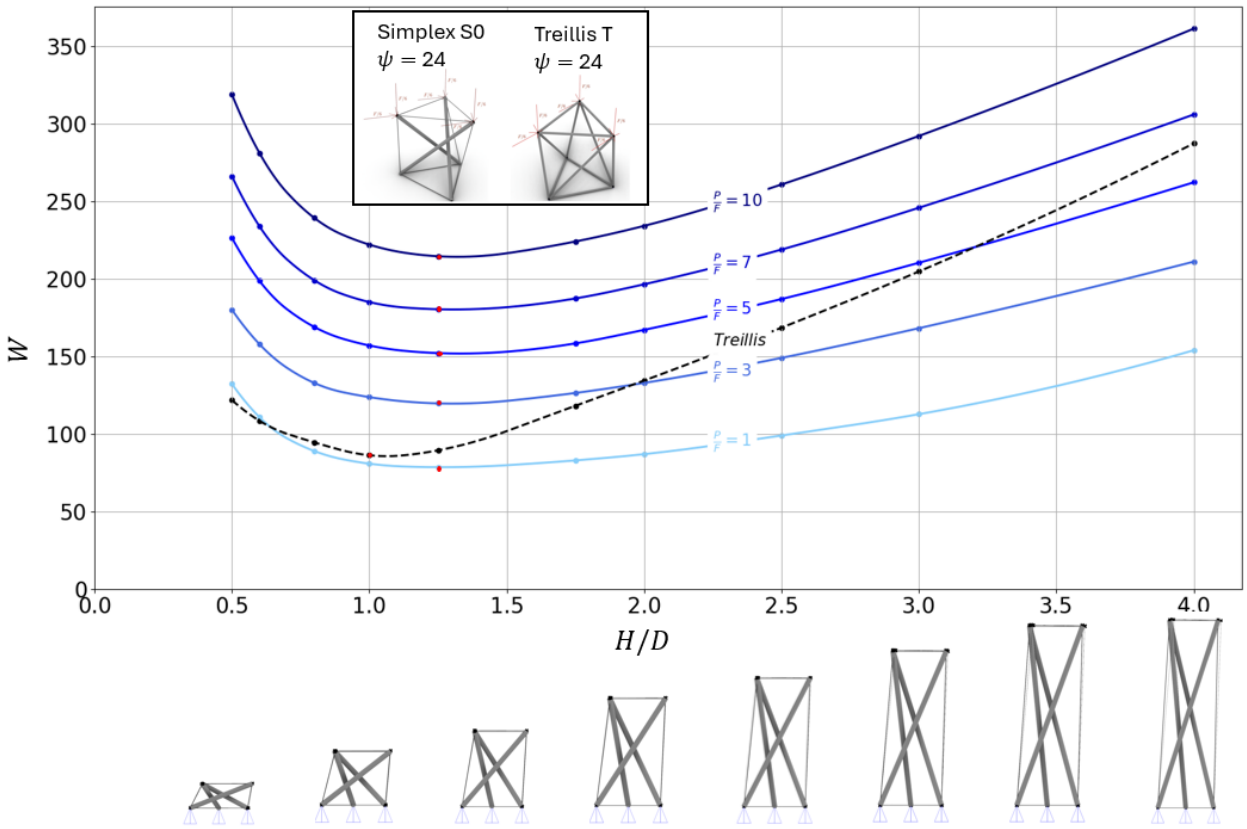


FIGURE 4.23 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le simplex $S0$ et le treillis T, pour $\psi = 24$.

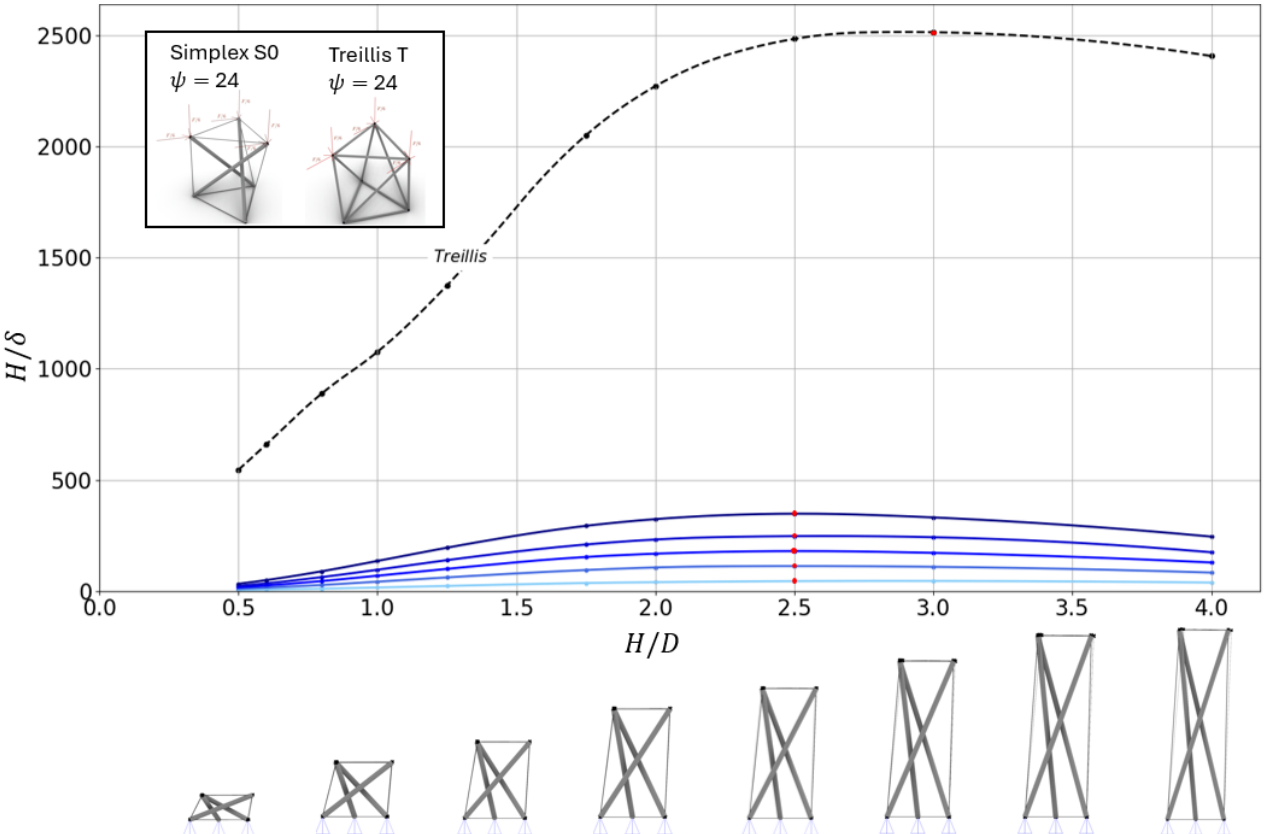


FIGURE 4.24 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 24$.

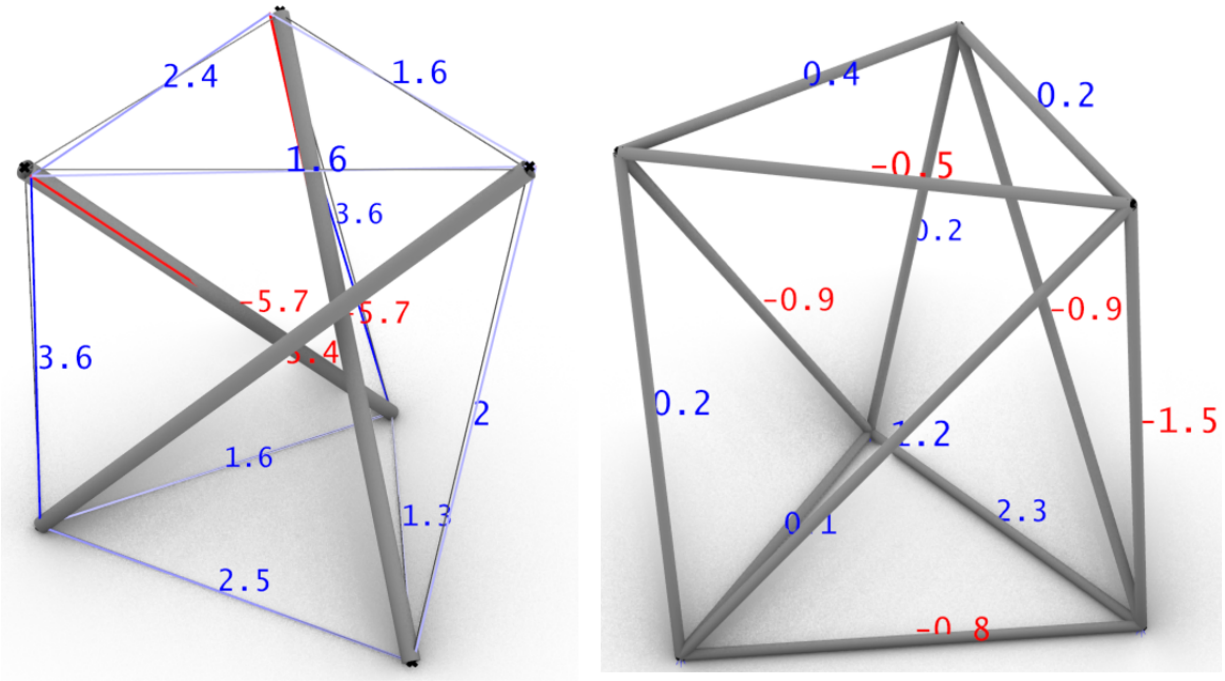
Le graphique comparant l'évolution de la rigidité du S_0 et de celle du T (Figure 4.24) s'avère particulièrement pertinent. Il met en évidence une augmentation marquée de la rigidité du treillis par rapport au cas précédent. Cette observation révèle ainsi une divergence notable dans le comportement évolutif de l'indicateur de déplacement nodal entre les deux types de structures.

L'augmentation de la rigidité observée pour le treillis peut être expliquée de manière relativement simple. Comme dans le cas du simplex, une sensibilité accrue au flambement (due à une valeur plus élevée de l'indicateur ψ) impose une augmentation du volume de matière au sein de la structure. Cependant, dans le cas du treillis, composé exclusivement de barres rigides, toute augmentation de volume touche tous les éléments du treillis et améliore significativement la rigidité globale.

À l'inverse, pour le modèle simplex, bien que l'augmentation du volume touche également la structure dans son ensemble, elle concerne majoritairement les câbles, qui représentent la plus grande part des éléments constitutifs. Or, l'augmentation de la section des câbles n'a pas le même effet sur la rigidité que celle des barres. En conséquence, la rigidité globale du simplex n'augmente que de manière marginale, malgré un accroissement du volume de matière utilisée.

Les conclusions formulées dans le cas précédent, selon lesquelles les structures en treillis présentent des performances nettement supérieures en termes de rigidité, demeurent valables dans le présent contexte. En effet, lorsque la sensibilité au flambement augmente, les structures en treillis conservent, voire renforcent, leur avantage comparatif. Elles offrent une rigidité significativement plus élevée tout en nécessitant, de manière générale, un volume de matière inférieur à celui requis par les configurations en tenségrité de type simplex.

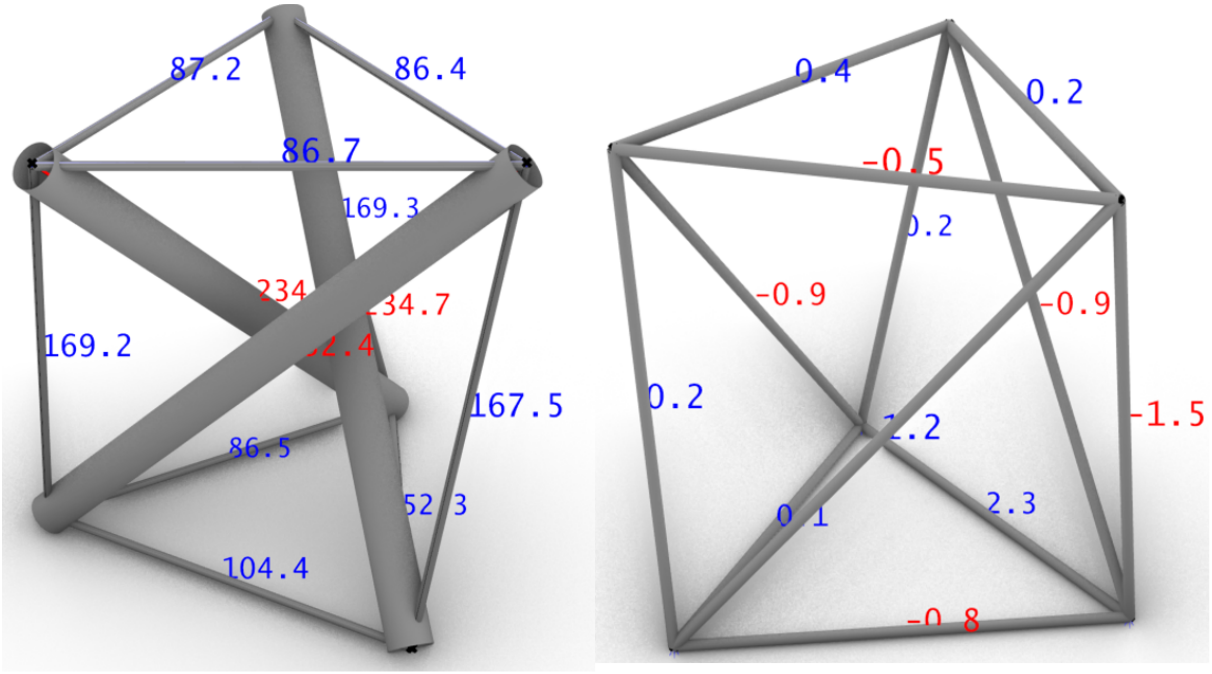
Afin de confirmer l'augmentation significative de la rigidité du modèle treillis par rapport à celle du modèle simplex, une comparaison des deux structures est réalisée à l'aide de l'outil d'optimisation automatique de *Galapagos*. Cette analyse comparative adopte la même méthodologie que celle décrite dans la section précédente, assurant ainsi la cohérence des résultats et la validité des conclusions qui en découleront.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{89.1}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{31.6}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.45}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{89.4}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{1373}$

FIGURE 4.25 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W dans le cas d'un charge appliquée 10x plus faible ($\psi = 24$).

Les résultats obtenus confirment les limites des structures en tenségrité par rapport aux structures en treillis, lorsque celles-ci sont comparées à volume égal (Figure 4.25). Dans le cas présent, caractérisé par une sensibilité au flambement plus prononcée, on observe que la rigidité du T est environ $\frac{1373}{31.6} = 43$ fois supérieure à celle du $S0$. Comparativement au cas précédent, cette différence représente une augmentation d'un facteur proche de 4 en faveur du treillis, ce qui souligne encore davantage sa supériorité structurale dans des conditions où les effets de flambement deviennent plus importants.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{668.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{1373}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{80}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{89.4}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{1373}$

FIGURE 4.26 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un charge appliquée 10x plus faible ($\psi = 24$).

Dans le cas où les deux structures présentent une rigidité équivalente, il apparaît que la quantité de matière nécessaire pour que le modèle simplex atteigne la même rigidité que le T optimisé est particulièrement importante. En effet, le volume du simplex est alors environ $\frac{668.2}{89.4} = 7.5$ fois supérieur à celui du treillis. Ce résultat correspond à un quasi-doublement du rapport de volume entre les deux structures par rapport au cas précédent, mettant ainsi en évidence l'importante inefficacité matérielle du modèle simplex dans un contexte de sensibilité au flambement plus marquée.

4.4.2 Application d'une force 100x plus petite

Le choix d'étudier un second cas avec une charge encore plus faible, induisant une valeur de ψ encore plus grande, s'est faite à la fois pour tenter d'obtenir des résultats redondants par rapport au cas précédent et donc de confirmer les résultats, mais aussi afin d'explorer un cas où l'indicateur de flambement était proche de 100 (correspondant à un cas ou il y a une sensibilité au flambement totale). Faire augmenter ψ vers une valeur encore plus élevée a donc pour objectif ici de confirmer qu'une augmentation de l'indicateur de flambement donnerait exactement les mêmes conclusions.

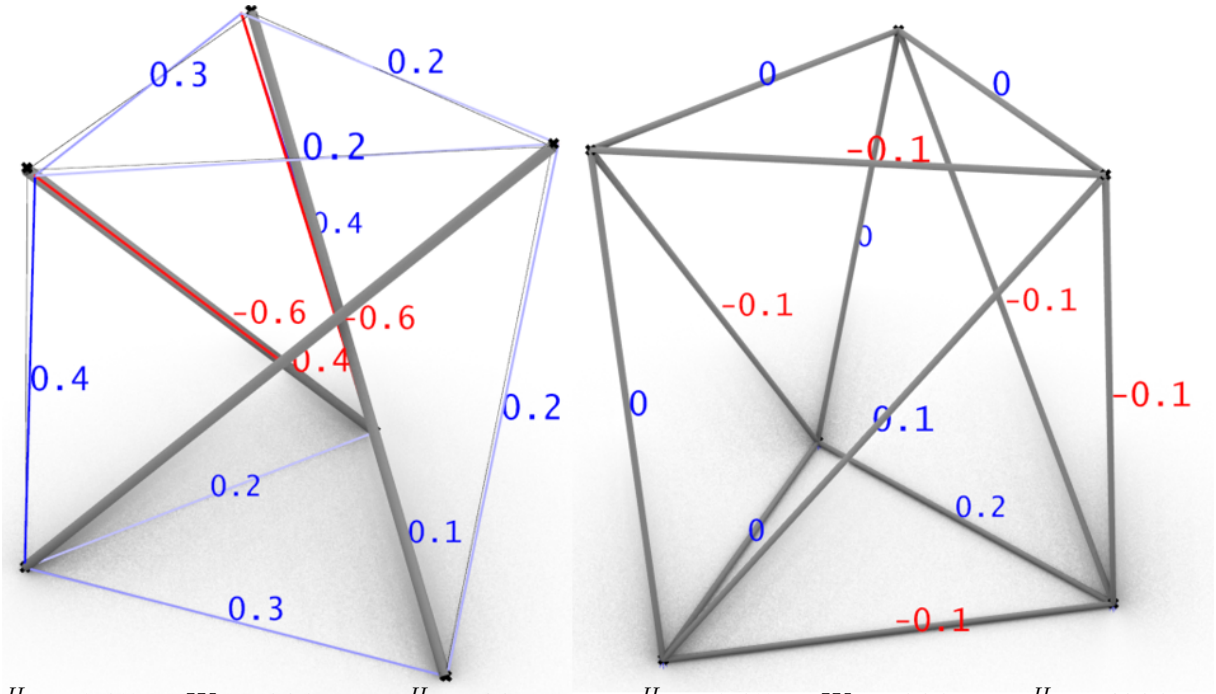
Il s'est avéré que les conclusions tirées suite à la première augmentation de ψ sont applicables de manière totalement analogue à cette nouvelle augmentation de ψ :

— Le simplex optimisé $S0$ voit son volume augmenter en réponse a cette sensibilité au flambement croissante, mais voit sa rigidité rester assez similaire aux cas précédents dont l'indicateur de flambement était plus faible.

— On observe une évolution du volume du T, en réponse à cette sensibilité au flambement, identique à celle du simplex.

— La rigidité du T augmente significativement par rapport aux cas précédents. L'augmentation de volume provoque une augmentation de la rigidité du treillis. L'écart de performance structurale entre le simplex et le treillis se creuse de plus en plus lorsque ψ augmente.

Les graphiques illustrant ces résultats présentent une forme similaire à ceux déjà exposés dans la Section 4.4.1. Afin de préserver la clarté du propos et d'éviter une surcharge visuelle de cette section, ils ne seront donc pas reproduits ici. Néanmoins, ils sont accessibles en Annexe C à titre informatif. Seules les comparaisons essentielles entre le modèle simplex et le modèle treillis — à savoir, d'une part, pour des volumes identiques, et d'autre part, pour des rigidités équivalentes — seront présentées ici.

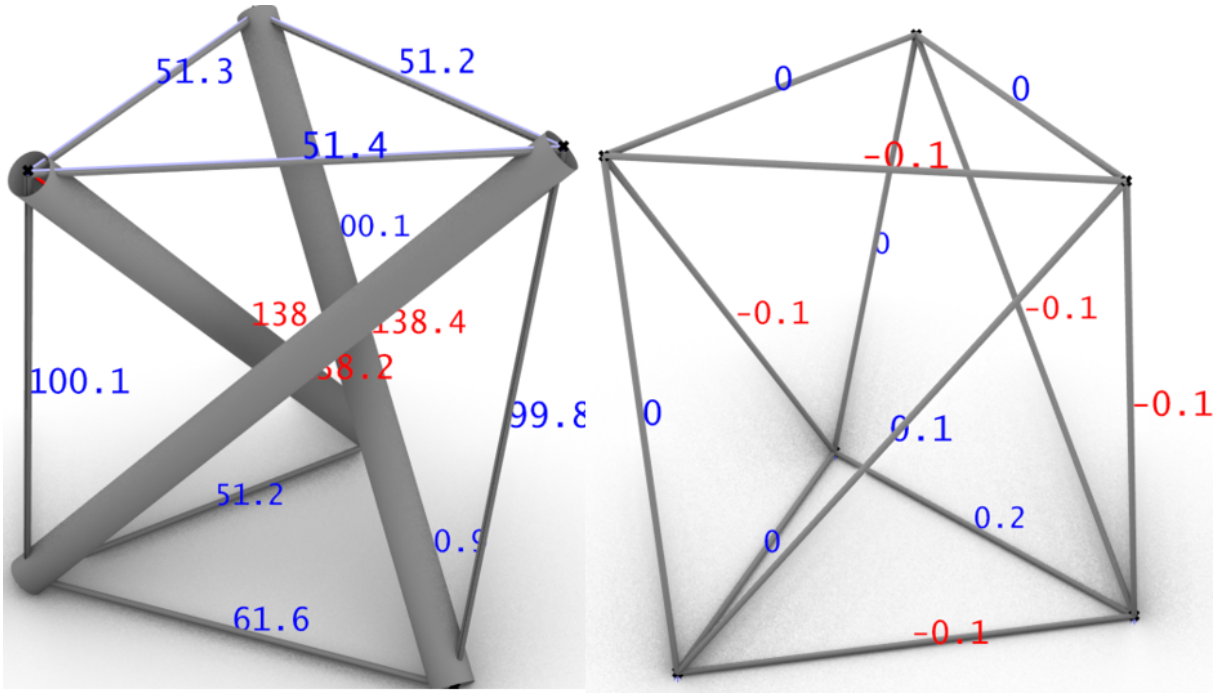


$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{286}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{33}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.58}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{286}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{4386}$

FIGURE 4.27 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W dans le cas d'un charge appliquée 100x plus faible ($\psi = 75$).

Que ce soit à volume constant ou à rigidité équivalente, le modèle treillis continue de démontrer des performances mécaniques nettement supérieures à celles du modèle simplex, conformément aux conclusions établies dans les cas précédents. L'augmentation de l'indicateur de flambement ψ accentue davantage l'écart de rigidité entre les deux structures, conformément aux mécanismes déjà évoqués lors de la première variation de ψ.

Dans le cas d'un volume identique, le rapport de rigidité atteint désormais $\frac{4386}{33} = 132$, ce qui représente une augmentation d'un facteur 3 par rapport au cas précédent. De même, pour atteindre une rigidité équivalente à celle du T, le volume requis pour le modèle simplex devient $\frac{4943.7}{286} = 17$ fois plus important, soit une augmentation d'un facteur 2.3 du rapport de volume observé précédemment. Ces résultats soulignent la croissance exponentielle du désavantage structural du modèle simplex face au treillis, à mesure que la sensibilité au flambement s'accroît.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{4943.7}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{4386}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{470}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{286}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{4386}$

FIGURE 4.28 – Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un charge appliquée 100x plus faible ($\psi = 75$).

On a pu, grâce à cette seconde augmentation de la valeur de ψ, avoir à la fois une certaine redondance dans les résultats et conclusions présentés avant, mais aussi de confirmer la tendance du treillis d'augmenter en rigidité lorsqu'on considérait des cas où la sensibilité au flambement était plus importante.

4.5 Variation de l'indicateur de flambement avec le modèle de tube (rapport $\frac{D_s}{e}$) choisi

Comme mentionné au début de la Section 4.4, il existe deux méthodes principales pour faire varier l'indicateur de flambement ψ : soit en modifiant la charge externe appliquée F, soit en ajustant l'indicateur géométrique des sections q, lequel dépend notamment du rapport $\frac{D_s}{e}$. Le premier cas permet d'explorer l'ensemble de l'intervalle de valeurs de ψ allant de 0 à 100. En revanche, la seconde approche présente des limitations plus strictes quant aux valeurs de ψ atteignables. En effet, les caractéristiques géométriques des sections — et en particulier l'épaisseur des tubes — ne peuvent pas être choisies arbitrairement et doivent respecter des contraintes physiques et constructives, ce qui limite le domaine de variation de $\frac{D_s}{e}$, et donc de ψ. Ce rapport ne peut en pratique être inférieur à 2, valeur correspondant à une section pleine. Cette limite peut être démontrée simplement à partir de l'expression de l'aire A_s de la section, où un rapport $\frac{D_s}{e} = 2$ conduit à une aire équivalente à celle d'un tube plein :

$$A_s = \pi(\frac{D_s}{2} - \frac{D_s - 2e}{2})^2 = \pi(\frac{D_s}{2} - \frac{D_s - 2\frac{D_s}{2}}{2})^2 = \pi(\frac{D_s}{2} - 0)^2 = \pi(\frac{D_s}{2})^2 \tag{21}$$

En ce qui concerne la borne supérieure, il n'existe théoriquement aucune limite maximale pour le rapport $\frac{D_s}{e}$, celui-ci pouvant croître indéfiniment. Toutefois, des considérations pratiques imposent des restrictions. En effet, bien que mathématiquement non bornée, cette grandeur est physiquement contrainte par la nécessité de conserver une épaisseur de tube réaliste, suffisante pour garantir la résistance mécanique et la faisabilité de fabrication.

Afin de sélectionner de manière pertinente les valeurs du rapport $\frac{D_s}{e}$, et donc les valeurs de l'indicateur de flambement ψ associées, il convient de s'appuyer sur les épaisseurs minimales et maximales des tubes disponibles sur le marché. En se référant à des modèles existants, il est ainsi possible de déterminer les bornes réalistes du rapport $\frac{D_s}{e}$ et d'analyser la sensibilité au flambement des structures correspondantes. Cette analyse des épaisseurs de tubes commercialement disponibles a été effectuée et présentée en Annexe D. En comparaison avec la valeur de $\frac{D_s}{e}$ adoptée dans les cas précédemment analysés, ces bornes correspondent à une réduction du rapport par un facteur de 1.25 pour la borne inférieure, et à une augmentation par un facteur de 6.5 pour la borne supérieure. Les nouvelles valeurs numériques utilisées pour ces deux nouveaux cas d'études sont présentés en Annexe C [1].

4.5.1 Rapport $\frac{D_s}{e}$ 1.25 fois plus faible

De manière analogue à l'analyse effectuée dans le cas de la variation de la charge appliquée, il convient ici de repartir de l'expression de l'indicateur de flambement ψ, afin de mieux comprendre l'impact de la variation du rapport $\frac{D_s}{e}$, qui détermine la valeur du paramètre géométrique q, sur la valeur de ψ :

$$\psi = \frac{\sigma_s D}{\sqrt{q E_s F}} \tag{22}$$

Comme indiqué dans le Tableau 9, les grandeurs σ_s, D et E_s sont supposées constantes. Par ailleurs, il a été précisé en introduction de cette section que la charge F resterait également fixe dans le cadre de cette analyse. Seul le paramètre géométrique q, fonction du rapport $\frac{D_s}{e}$, est donc amené à varier.

Ce paramètre apparaissant au dénominateur de l'expression de ψ, il en résulte une relation inverse entre q et ψ. Autrement dit, une augmentation de q entraînera une diminution de ψ, tandis qu'une diminution de q conduira à une augmentation de l'indicateur de flambement.

Dans ce nouveau cas étudié, la valeur obtenue de l'indicateur de flambement ψ s'avère très proche de celle analysée dans le cas initial présenté à la Section 4.3. Par conséquent, les résultats numériques, les graphes ainsi que les conclusions qui en découlent sont rigoureusement identiques à ceux exposés dans ladite section. Le lecteur est ainsi invité à se référer à la Section 4.3 pour une analyse détaillée des effets de la sensibilité au flambement dans ce contexte. Néanmoins, les graphes correspondant à cette nouvelle valeur du rapport $\frac{D_s}{e}$ sont reproduits à titre illustratif en Annexe C[1], afin de mettre en évidence la forte similarité des courbes obtenues pour des valeurs de ψ très proches.

4.5.2 Rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand

Ce second cas, dans lequel l'indicateur géométrique des sections q est modifié par l'intermédiaire du rapport $\frac{D_s}{e}$, présente un intérêt particulier. En effet, cette configuration conduit à une valeur de l'indicateur de flambement ψ très proche de zéro, ce qui correspond à un cas de sensibilité au flambement extrêmement faible, voire négligeable. Cette situation offre ainsi l'opportunité d'effectuer une comparaison rigoureuse entre une structure de type simplex et une structure en treillis dans un contexte idéalisé, exempt de tout effet de flambement. Comme pour les autres cas étudiés, les valeurs numériques retenues pour cette configuration sont détaillées en Annexe C[1].

Des premières observations pertinentes peuvent être faites à partir du graphe de la Figure 4.29. De manière analogue aux cas caractérisés par une valeur élevée de ψ, la rigidité structurale ne présente aucune variation significative. En revanche, l'allure des courbes décrivant l'évolution de l'indicateur de volume W montre une différence notable. Contrairement aux configurations précédentes, aucune homogénéisation du rapport $\frac{H}{D}$ ne permet ici d'identifier une configuration optimale unique pour la structure de type simplex. Ce rapport évolue de manière croissante avec l'augmentation de l'état de

1. La majorité des valeurs numériques restent inchangées par rapport à celle présentées en Annexe B. Seules les valeurs qui changent et les indicateurs morphologiques impactés sont présentées en Annexe C.

précontrainte : il passe d'une valeur de $\frac{H}{D} = 1.25$ pour l'état de précontrainte le plus faible ($\frac{P}{F} = 1$) à une valeur de $\frac{H}{D} = 3$ lorsque $\frac{P}{H} = 10$. Cette tendance croissante reflète le fait que, dans un contexte où le flambement est quasi inexistant, des configurations plus élancées deviennent optimales.

Enfin, une analyse de l'échelle de l'axe des ordonnées du graphe, représentant les valeurs de l'indicateur de volume W, révèle que le volume nécessaire à la structure simplex est significativement plus faible dans ce cas que pour des valeurs plus élevées de ψ. Cela illustre de manière explicite à quel point un contexte structural libéré des effets de flambement permet de réduire considérablement la quantité de matière requise. Cette réduction résulte de l'augmentation notable de la résistance en compression des barres, qui tend à devenir équivalente à celle en traction lorsque les effets de flambement sont négligeables.

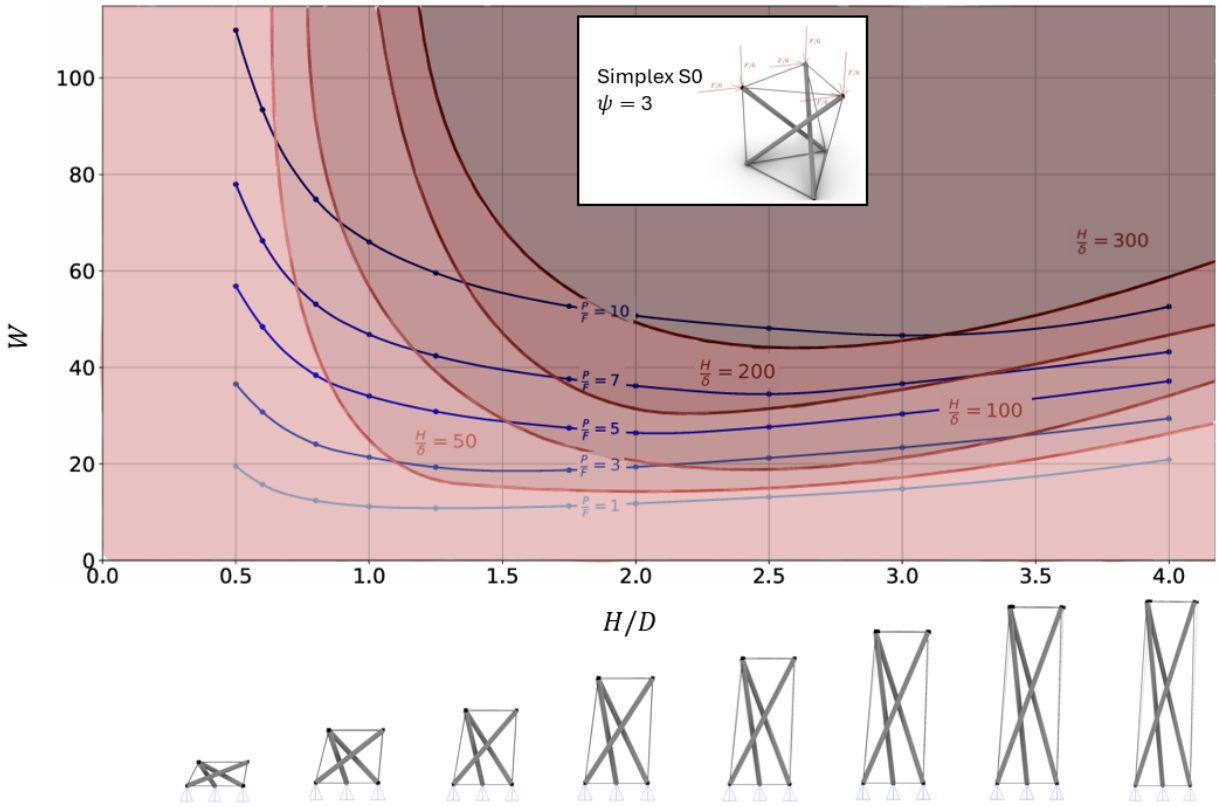


FIGURE 4.29 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 3$.

Qu'en est-il à présent de l'évolution de l'indicateur de volume dans le cas de la structure en treillis ? La courbe obtenue conserve une forme générale similaire à celles observées dans les configurations précédentes, et le rapport entre les courbes du T et celles du $S0$ reste globalement cohérent. Toutefois, certaines différences, bien que subtiles, méritent d'être soulignées.

Tout d'abord, la courbe associée à la structure en treillis demeure systématiquement située au-dessus de la courbe correspondant à un état de précontrainte $\frac{P}{F} = 1$. Cela signifie que, quelle que soit la valeur de l'élancement $\frac{H}{D}$, une structure simplex soumise à un faible état de précontrainte ($\frac{P}{F} = 1$) engendrera toujours une solution plus légère que celle obtenue avec le treillis.

Par ailleurs, il avait été observé dans les cas précédents que, pour des élancements élevés, les configurations en treillis devenaient significativement plus volumineuses que les structures simplex, en raison de la faible résistance au flambement des barres composant le treillis. Dans le présent cas, cette augmentation de volume reste perceptible, mais elle apparaît nettement moins prononcée, ce qui s'explique par la quasi-inexistence du flambement lorsque l'indicateur ψ est très faible. On

peut raisonnablement supposer que la croissance du volume observée est ici essentiellement dû à l'augmentation géométrique des barres (du fait d'un élancement plus élevé), et non à une dégradation des performances mécaniques induite par le flambement de l'élément dimensionnant.

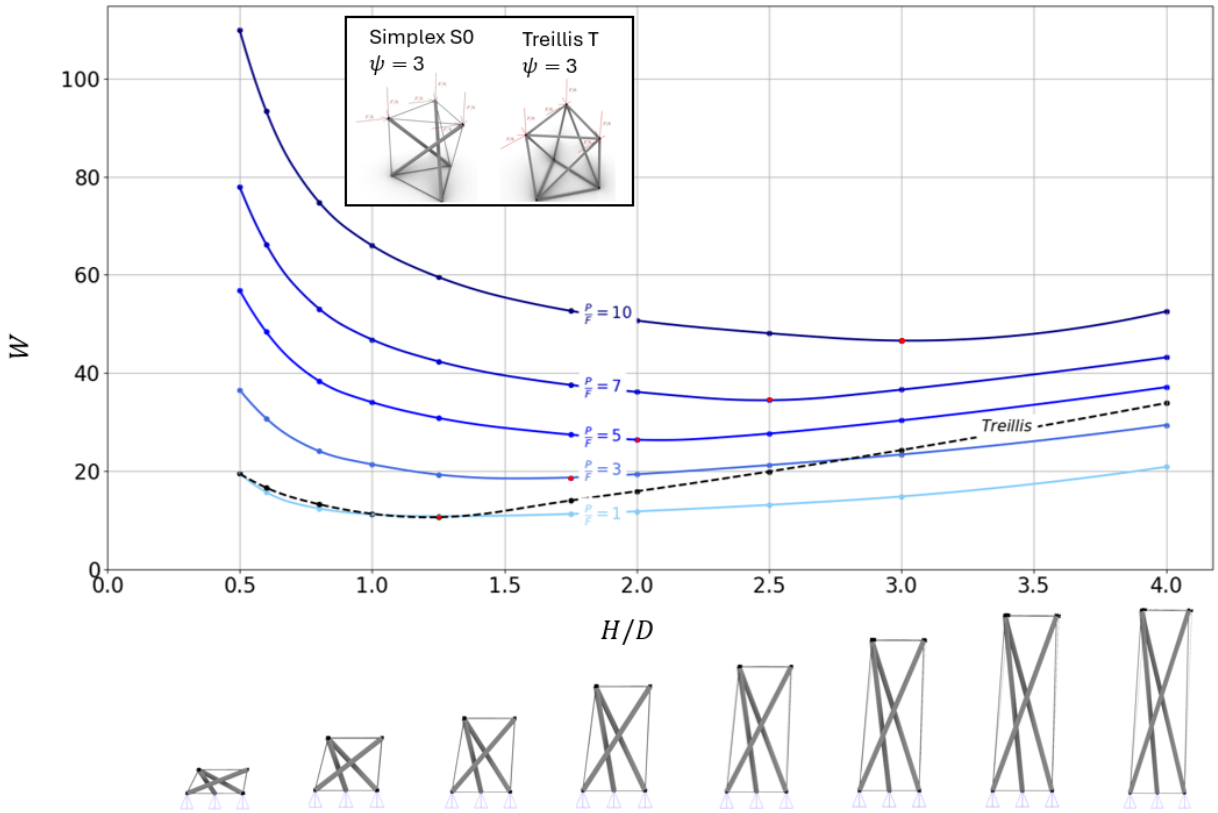


FIGURE 4.30 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 3$.

Il a été observé que l'augmentation de la valeur de ψ entraîne une hausse de la rigidité du treillis par rapport à celle du simplex. Cela s'explique par le fait que la barre dimensionnante du treillis détermine le volume des autres barres, induisant une augmentation significative du volume sous l'effet du flambement, ce qui accroît également la rigidité. Dans le cas du simplex, l'augmentation de volume touche principalement les câbles, dont la rigidité reste peu sensible à cette variation.

Il est donc raisonnable de supposer qu'une diminution de ψ entraîne une baisse de la rigidité du treillis, ce que confirme le graphe de la Figure 4.31. Contrairement aux observations précédentes, la courbe du déplacement nodal du T se situe alors dans le même ordre de grandeur que celle du $S0$, indiquant une rigidité comparable. Bien que le treillis demeure globalement plus rigide, le simplex peut devenir plus performant pour des niveaux de précontrainte supérieurs à $\frac{P}{F} = 7$.

L'analyse conjointe de l'évolution de l'indicateur de volume et du déplacement nodal révèle que le treillis reste globalement plus performant. En effet, pour des volumes inférieurs, le simplex présente une rigidité moindre, et lorsqu'il atteint une rigidité comparable ou supérieure, cela se fait au prix d'un volume plus important.

Dans un contexte où le flambement est quasi inexistant, les performances structurales du treillis et du simplex tendent à se rapprocher. L'absence de flambement permet une réduction significative du volume des structures, ce qui, dans le cas du treillis, entraîne une diminution marquée de sa rigidité, conduisant à des déplacements nodaux comparables à ceux du simplex. Le treillis demeure cependant globalement plus performant : à volume égal (Figure 4.32), il présente une rigidité supérieure ; à rigidité égale (Figure 4.33), son volume est plus faible. Néanmoins, les écarts de performance entre les deux types de structures sont nettement réduits en l'absence d'effet de flambement. On peut

dès lors supposer que, pour un indicateur de flambement nul, certaines configurations de simplex pourraient atteindre des performances comparables à celles des treillis. Ce cas demeure toutefois purement théorique et inapplicable à une structure réelle.

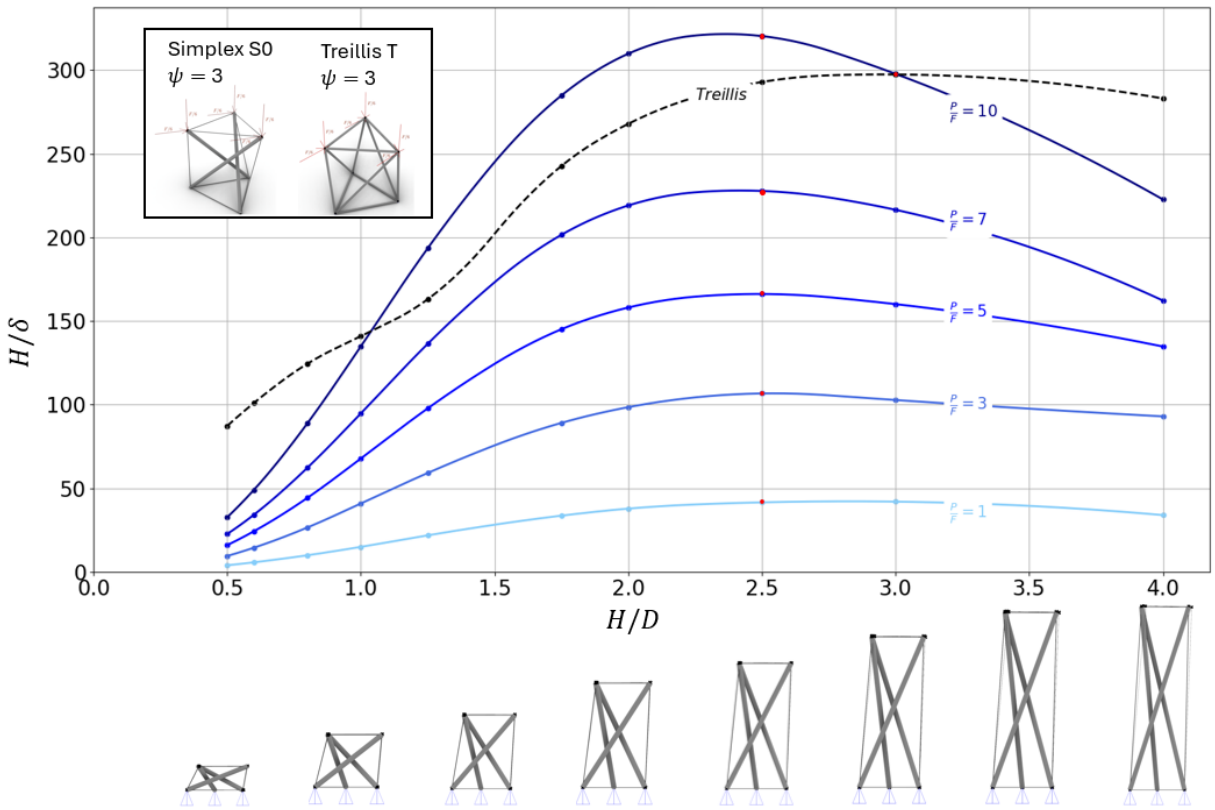
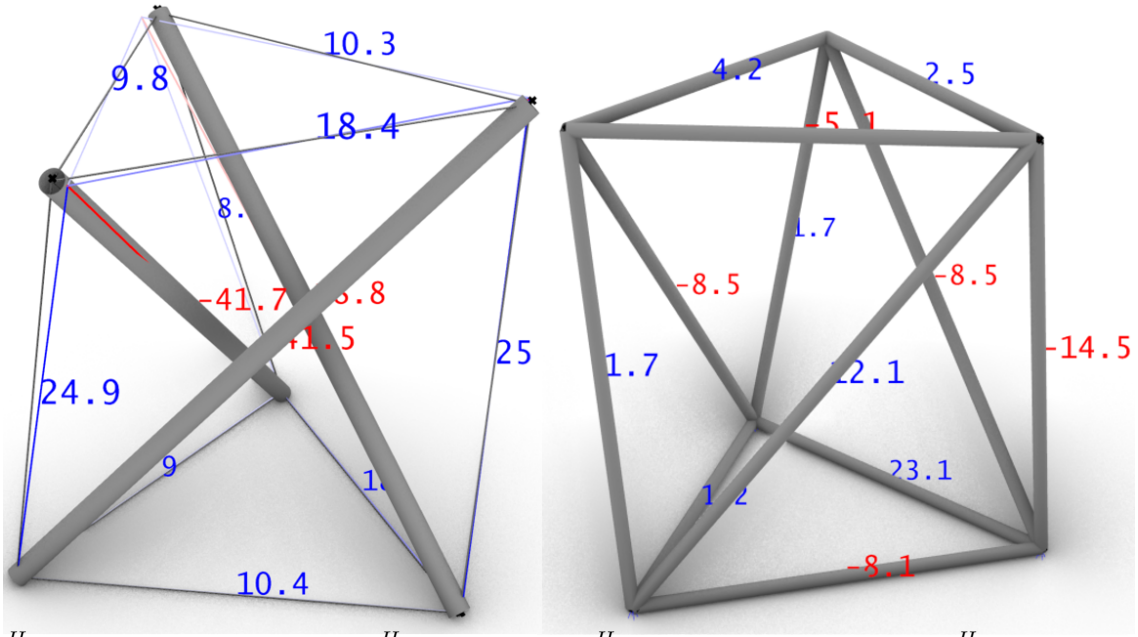
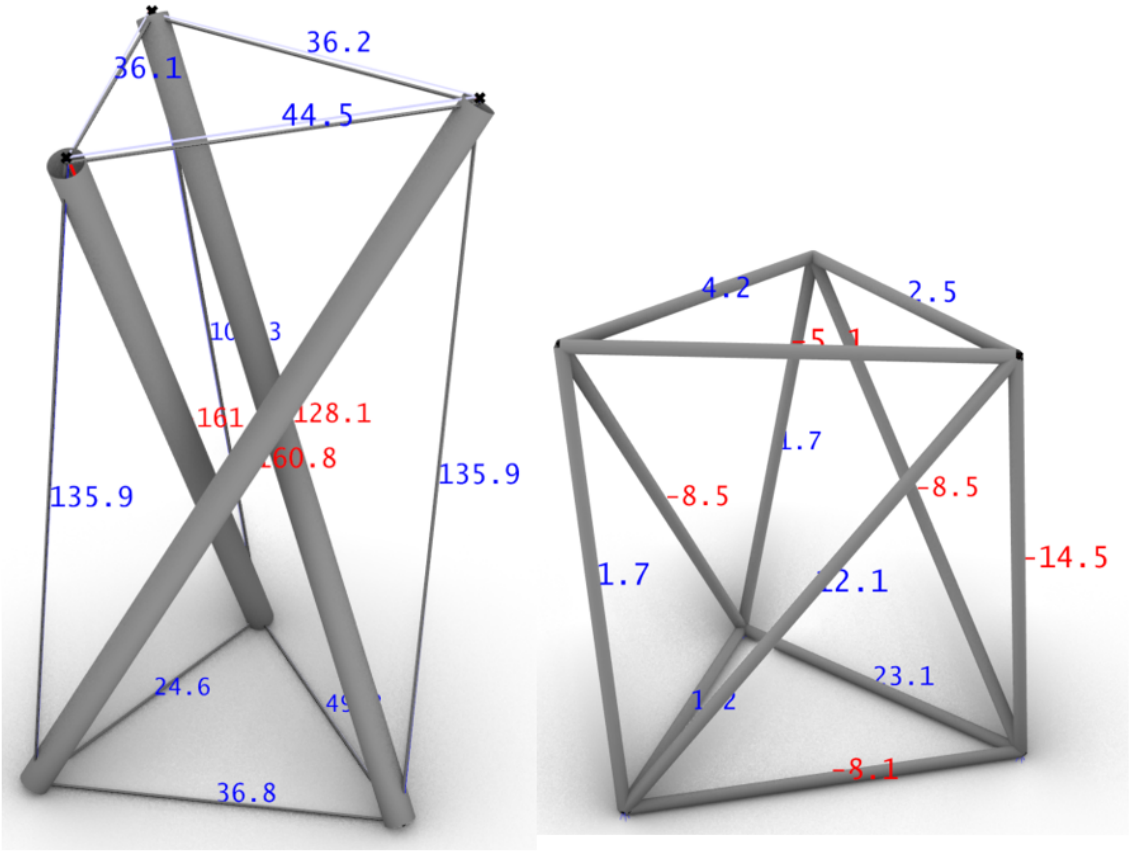


FIGURE 4.31 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 3$.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{10.6}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{20.45}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{0.93}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{10.6}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{163}$

FIGURE 4.32 – Comparaison des caractéristiques du simplex $S0$ et du treillis T pour un même W dans le cas d'un rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$).



$\frac{H}{D} = \mathbf{2.22}$ $W = \mathbf{26.4}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{4.9}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{163}$ $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{10.6}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{163}$

FIGURE 4.33 – Comparaison des caractéristiques du simplex $S0$ et du treillis T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$).

4.6 Vérification des résultats pour des paramètres initiaux différents

Les deux sections précédentes (Sections 4.4 et 4.5) ont permis d'étudier l'optimisation d'un simplex en tenségrité et sa comparaison avec une structure treillis équivalente, à travers l'analyse des indicateurs morphologiques. Grâce à une sélection rigoureuse des cas étudiés, il a été possible de caractériser le comportement des deux structures en termes de volume et de rigidité, sous divers niveaux de sensibilité au flambement. Ces cas étaient définis à partir d'hypothèses initiales arbitraires, notamment via la variation de la charge externe F et du rapport $\frac{D_s}{e}$, permettant d'obtenir des valeurs ciblées de l'indicateur de flambement ψ.

Il serait dès lors pertinent d'examiner si, pour une valeur donnée de ψ, des choix arbitraires différents de F et $\frac{D_s}{e}$ menant à ce même ψ conduisent à des résultats similaires. Une telle concordance avec les courbes précédemment obtenues confirmerait la robustesse des indicateurs morphologiques, en montrant qu'ils permettent une généralisation indépendante des hypothèses initiales, tant que les grandeurs adimensionnelles sont conservées.

Par ailleurs, une autre hypothèse implicite mérite d'être questionnée : l'invariance de l'échelle géométrique des structures. L'étude repose sur une largeur D fixe du simplex et du treillis, imposée dès le départ. Il serait donc judicieux d'évaluer si les conclusions demeurent valides pour des structures de tailles très différentes (soit bien plus petites, soit bien plus grandes). Une cohérence des résultats dans ce cas renforcerait la validité des outils et conclusions développés dans cette étude.

4.6.1 Variation de la charge F et du rapport $\frac{D_s}{e}$ pour un ψ donné

Pour cette première vérification, l'analyse a été reconduite à partir du cas initial et de la valeur de ψ qui lui était associée. Afin de maintenir un même niveau de sensibilité au flambement, deux nouvelles valeurs, distinctes des précédentes, ont été attribuées à la charge externe F et au rapport $\frac{D_s}{e}$, de manière à conserver une valeur identique de ψ. Ces paramètres sont détaillés en Annexe E.

Comme attendu, les résultats obtenus avec ces nouvelles hypothèses (représentés par les courbes en pointillés dans les Figures 4.34 et 4.35) coïncident parfaitement avec ceux issus des hypothèses initiales, tant pour le $S0$ (sous différents états de précontrainte) que pour le T. Cette concordance confirme que, pour une même valeur des indicateurs morphologiques, les configurations étudiées sont équivalentes, indépendamment des hypothèses initiales. Ainsi, l'évolution des indicateurs de volume et de déplacement nodal en fonction de l'élancement produit des courbes identiques, validant la robustesse de l'approche.

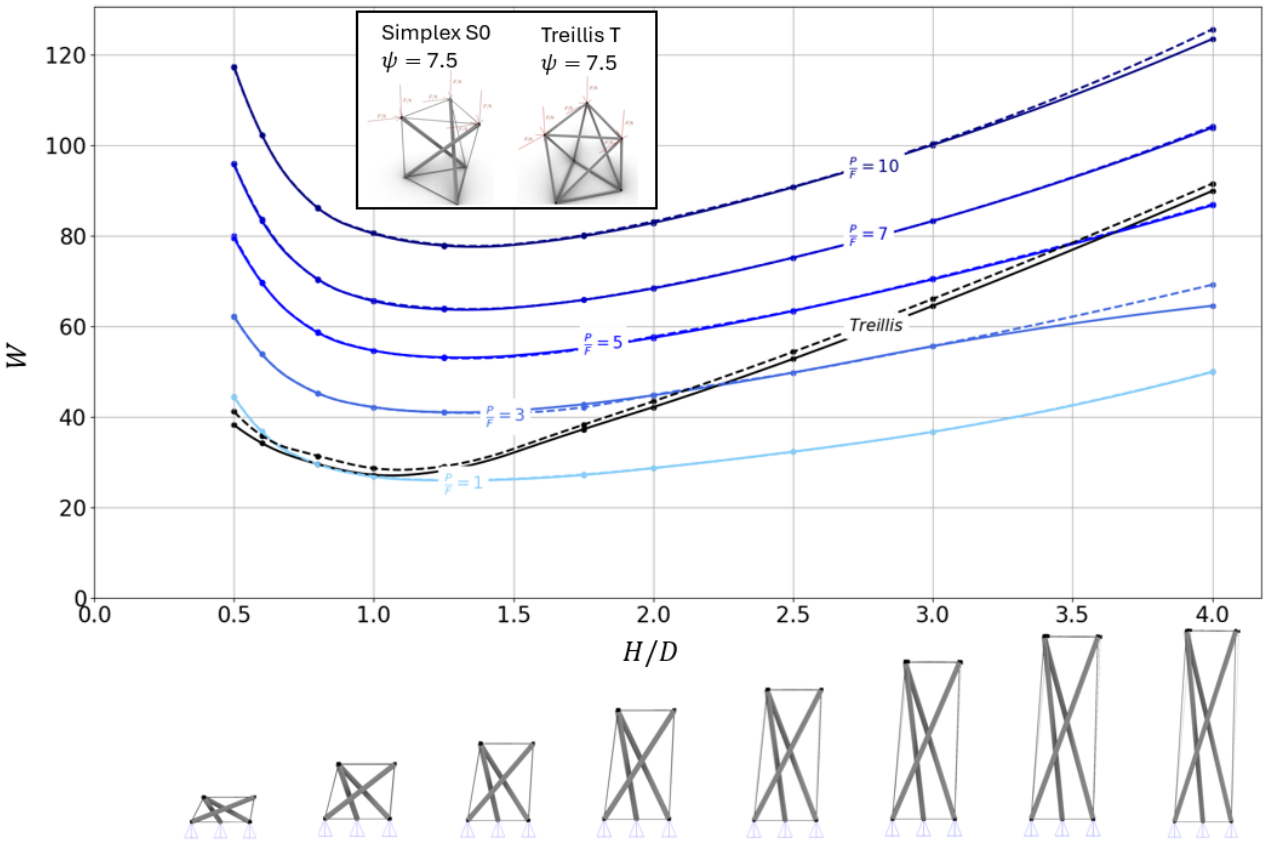


FIGURE 4.34 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour d'autres hypothèses aboutissant à $\psi = 7.5$.

Une légère variation de la rigidité du T est néanmoins observable entre les hypothèses initiales et les nouvelles conditions étudiées. Toutefois, cette différence demeure négligeable : les valeurs de l'indicateur de déplacement nodal restent dans le même ordre de grandeur. On peut donc considérer que la rigidité du treillis est globalement inchangée malgré la modification des hypothèses.

Ainsi, pour des hypothèses distinctes mais des indicateurs morphologiques identiques, les résultats obtenus sont rigoureusement similaires. Cela illustre la robustesse de l'approche par indicateurs morphologiques et sa capacité à formuler des conclusions générales à partir d'un nombre limité de cas d'étude.

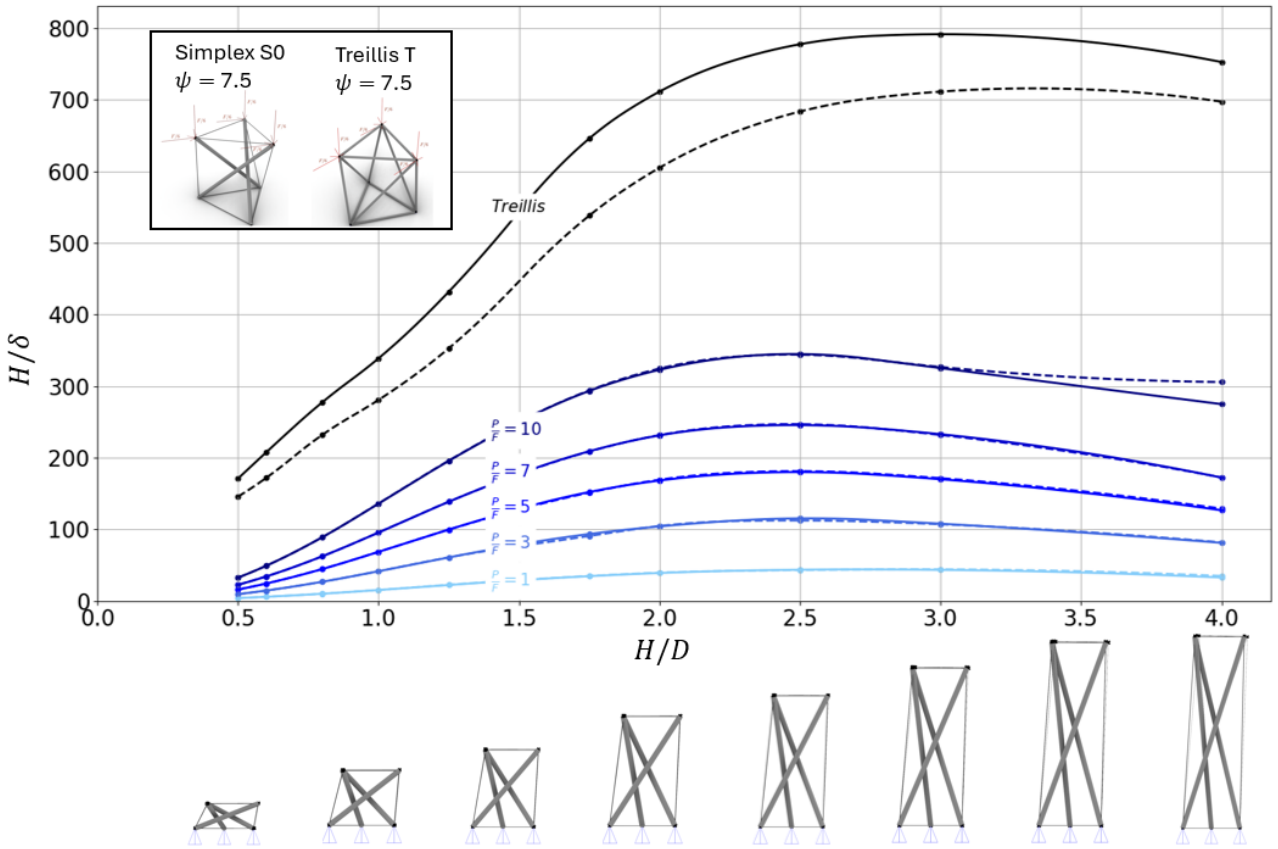


FIGURE 4.35 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour d'autres hypothèses aboutissant à $\psi = 7.5$.

4.6.2 Variation de l'échelle géométrique du simplex pour un ψ donné

L'analyse de la variation de l'échelle géométrique des structures présente deux principaux avantages. D'une part, elle permet de valider que le choix initial et arbitraire de la largeur des structures dans l'étude du cas de référence, inchangé depuis, n'exerce aucune influence sur les résultats obtenus pour les différentes valeurs du paramètre ψ. D'autre part, cette variation permet d'élargir le champ d'application de l'étude à une grande diversité de structures, qu'elles soient de dimensions réduites ou au contraire de très grande envergure. L'exploration de ces différentes échelles géométriques contribue ainsi à la généralisation des résultats, rendant l'approche applicable à l'ensemble du domaine de la construction. Cette variation d'échelle géométrique se fera en considérant une largeur du simplex D 10 fois plus petite et 5 fois plus grande.

Cette section présente les résultats de la variation d'échelle géométrique pour une seule valeur de ψ, identique à celle du cas initial. Afin de garantir la robustesse et la cohérence des conclusions, la même analyse a également été menée pour une valeur de ψ correspondant à une sensibilité accrue au flambement ($\psi = 75$). Les résultats associés ne sont pas détaillés ici pour ne pas alourdir la lecture, mais sont disponibles en Annexe E à titre informatif.

Comme attendu, que ce soit dans le cas d'une réduction géométrique d'un facteur 10 ou d'une augmentation d'un facteur 5, les résultats demeurent inchangés : les évolutions des indicateurs de volume et de déplacement nodal restent identiques, que la structure soit dix fois plus petite ou cinq fois plus grande que celle de référence. Les courbes obtenues dans le cadre de cette comparaison d'échelle sont superposables à celles des Figures 4.34 et 4.35, auxquelles le lecteur est invité à se référer pour visualiser les effets de ces variations d'échelle.

4.7 Évolution de la configuration optimale du simplex et de son homologue treillis en fonction de l'indicateur de flambement

Comme présenté dans la section 3.2.1, l'objectif final de cette étude est la construction de la courbe d'efficacité du simplex optimisé. Celle-ci synthétise les principales conclusions du chapitre en représentant, pour chaque valeur de ψ étudiée, l'évolution conjointe de l'indicateur de volume de la configuration optimale du simplex et de l'indicateur de déplacement nodal associé.

On observe une corrélation naturelle entre l'augmentation de l'indicateur de flambement et celle du volume du simplex optimal. Ce résultat s'explique par la nécessité croissante de matière pour assurer une résistance suffisante aux efforts de compression lorsque la sensibilité au flambement augmente. Par ailleurs, la rigidité demeure relativement constante pour l'ensemble des valeurs de ψ.

En comparant le $S0$ au T optimisé, on constate que, pour chaque valeur de ψ, le volume de la configuration optimale du treillis est proche de celui du simplex optimal lorsque le rapport de précontrainte est $\frac{P}{F} = 1$. En revanche, la rigidité du treillis est nettement supérieure à celle de toutes les configurations simplex, et ce dès les faibles valeurs de ψ. Cette rigidité croît également avec la sensibilité au flambement. En effet, le volume de tous les éléments du treillis est régi par la résistance au flambement de la barre la plus comprimée. Associé au caractère rigide des barres, une augmentation de la sensibilité au flambement induit donc logiquement une augmentation de la rigidité. Pour des raisons de lisibilité, seul le début de cette courbe est représentée ici au vue de ses valeurs qui dépassent significativement celles des configurations simplex.

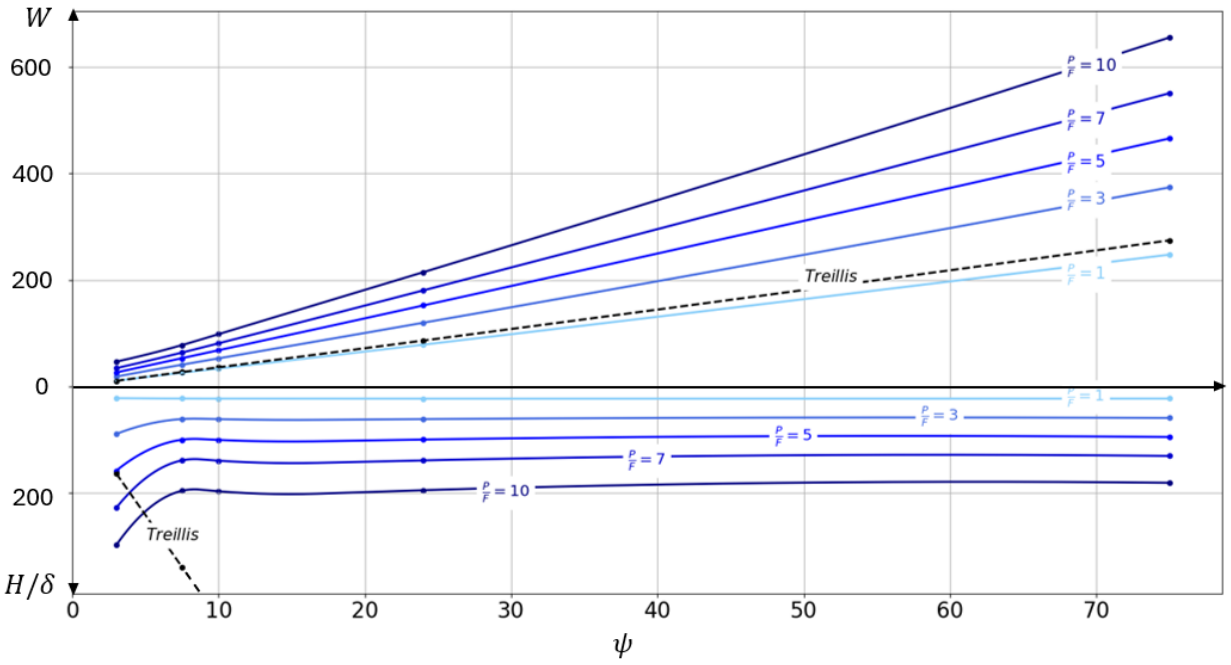


FIGURE 4.36 – Courbe d'efficacité comparant l'évolution des indicateurs de volume W optimaux et de déplacement nodal associé du simplex $S0$ et du treillis T, en fonction de l'indicateur de flambement.

Ce chapitre a permis d'établir une comparaison rigoureuse entre un simplex à volume optimisé et treillis équivalent. L'analyse a montré, dans un cas d'étude spécifique, l'évolution de l'indicateur de volume et du déplacement nodal associé en fonction de différents indicateurs d'élancement géométrique et états de précontrainte. Les conclusions obtenues ont ensuite été étendues à des contextes de sensibilité au flambement différents et a mis en évidence l'impact de celle-ci. L'étude a également révélé la performance structurale nettement supérieure des treillis, et ce quelque soit la sensibilité au flambement considérée, apportant tout de même un contexte (flambement négligeable) dans lequel les performances du simplex étaient dans les mêmes ordres de grandeurs que ceux de la structure treillis.

Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre

Ce chapitre avait pour objectif de réaliser une optimisation du simplex et de son homologue treillis, à l'aide d'une part de l'algorithme présenté à la Figure 3.7, et d'autre part de *Galapagos*, pour ensuite permettre une comparaison des caractéristiques mécaniques des deux systèmes structuraux. L'utilisation des indicateurs morphologiques a permis d'avoir une démarche générale aboutissant aux observations et conclusions présentées ici.

Après avoir défini en détail le simplex (Section 4.1), l'analyse s'est lancée sur un premier cas d'étude initial (Section 4.2). Celui-ci a servi de point de départ de cette analyse (Section 4.3). Ce cas initial a également servi de base pour une généralisation des résultats obtenus (Sections 4.4, 4.5, 4.6).

Dans ce premier cas, la sensibilité au flambement était modérée ($\psi = 7.5$) et une mise en charge bi-axiale était considérée (composantes de force verticales et horizontales appliqués aux trois nœuds supérieurs).

L'optimisation manuelle du simplex et de son homologue treillis, pour ce premier cas d'étude (Section 4.3.1), avait pour objectif de déterminer le volume minimal des structures pour chaque configuration $\frac{H}{D}$-$\frac{P}{F}$ pour le simplex, et pour chaque $\frac{H}{D}$ pour le treillis. Pour chaque configuration, on associait à l'indicateur de volume optimal W, son déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ (traduisant de sa rigidité). Cette optimisation manuelle a permis d'obtenir les observations et conclusions suivantes

Pour le simplex :

— Les valeurs extrêmes de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ donne des configurations peu optimales du point de vue de leur volume et de leur rigidité.

— Plus le simplex est précontraint (valeur de $\frac{P}{F}$ élevée), plus il est volumineux et rigide.

— Les valeurs de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ donnant respectivement un volume minimal et une rigidité maximale sont indépendantes de l'état de précontrainte et valent 1.25 et 2.5. La configuration la plus légère n'est pas la plus rigide et inversement.

Pour le treillis homologue :

— L'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ suivent une tendance similaire à celles du simplex : des valeurs extrêmes de $\frac{H}{D}$ ne donnent pas des configurations optimales.

— Les valeurs de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ donnant respectivement un volume minimal et une rigidité maximale valent 1 et 3. La configuration la plus légère n'est pas la plus rigide et inversement.

Une fois cette optimisation manuelle effectuée, une comparaison entre les deux systèmes structuraux aboutit aux observations et conclusions suivantes :

— L'évolution similaire des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ confirme un comportement mécanique proche des deux systèmes structuraux.

— Pour $\frac{H}{D} \in [0.5, 0.6]$, le treillis est un peu plus léger que le simplex quelque soit l'état de précontraint. Lorsque $\frac{H}{D} \in]0.6, 2.25]$, le treillis est plus léger que le simplex sauf quand celui-ci a un $\frac{P}{F} = 1$. Finalement quand $\frac{H}{D} \in]2.25, 4]$, le treillis devient progressivement plus lourd que le simplex pour $\frac{P}{F} = 3$ et $\frac{P}{F} = 5$.

— Le treillis est globalement deux fois plus rigide que le simplex dont l'état de précontrainte vaut $\frac{P}{F} = 10$, quelque soit l'élancement géométrique $\frac{H}{D}$.

⇒ Le treillis est globalement plus léger que le simplex, sauf pour des élancements élevés où l'augmentation de W pour le treillis est plus marquée. Cette augmentation est due à la sensibilité au flambement accrue de la barre la plus comprimée qui dimensionne toutes les autres. Dans le cas du simplex, les barres subissent cette même sensibilité croissante augmentant le volume nécessaire, mais pas les câbles, dont l'augmentation de volume est uniquement due aux efforts normaux.

⇒ Malgré que certaines configurations de simplex soient plus légères que leur treillis homologue, celui-ci reste bien plus rigide quelque soit les indicateurs d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ et de précontrainte $\frac{P}{F}$ considéré ici.

L'optimisation automatique avec *Galapagos* avait pour objectif d'assurer une comparaison encore plus rigoureuse. Sur base des valeurs de W et de $\frac{H}{\delta}$ du treillis optimal pour $\frac{H}{D} = 1.25$ (élancement donnant un volume optimal pour le simplex), on réalise deux optimisations qui aboutissent à deux simplex, l'une de même volume et l'autre de même rigidité. Cette seconde phase d'optimisation donne les observations et conclusions suivantes :

— A volume W identique, le treillis est 16 fois plus rigide que le simplex le plus rigide possible pour ce volume là.

— A rigidité $\frac{H}{\delta}$ identique, le simplex est 5 fois plus volumineux que le treillis optimal.

⇒ Le treillis offre des performances structurales bien meilleures que le simplex en terme de rigidité à volume constant et en terme de volume à rigidité constante.

Différentes sensibilité au flambement ont ensuite été considérées allant de $\psi = 3$ à $\psi = 75$. La même optimisation manuelle a été réalisée pour ces différents contextes de flambement et aboutissent à des observations et conclusions suivantes :

— Le volume des configurations optimales du simplex et du treillis augmente avec l'augmentation de la sensibilité au flambement ψ, et diminue avec la diminution de celle-ci. Le rapport entre le volume du simplex et celui du treillis reste inchangé.

— La rigidité du simplex reste inchangé lorsque la sensibilité au flambement change alors que celle du treillis évolue proportionnellement à cet indicateur. Pour $\psi = 3$, certaines configurations de treillis deviennent donc mois rigides que le simplex ayant un état de précontrainte $\frac{P}{F} = 10$.

— Les valeurs de l'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ donnant respectivement un volume minimal et une rigidité maximale restent inchangé et valent 1 et 3. Seule exception pour le cas d'une sensibilité au flambement négligeable ($\psi = 3$), dans lequel la valeur de $\frac{H}{D}$ donnant le volume optimal varie selon l'état de précontrainte $\frac{P}{F}$.

⇒ Le simplex et le treillis se comporte globalement de la même manière (mêmes valeurs de $\frac{H}{D}$ donnant respectivement la configuration la plus légère et la plus rigide) quelque soit le contexte de sensibilité au flambement. La rigidité inchangée du simplex provient des câbles présents en majorité dont l'augmentation du volume n'induit pas une augmentation de rigidité aussi significative que celles des barres du treillis, dont l'augmentation de volume induit une augmentation significative de la rigidité.

L'optimisation automatique pour ces différentes sensibilités au flambement aboutit aux observations et conclusions suivantes :

— Pour $\psi = 24$, à volume W identique, le treillis est 44 fois plus rigide que le simplex, alors qu'à rigidité $\frac{H}{\delta}$ équivalente, le simplex est 8 fois plus volumineux.

— Pour $\psi = 75$, à volume W identique, le treillis est 132 fois plus rigide que le simplex, alors qu'à rigidité $\frac{H}{\delta}$ équivalente, le simplex est 17 fois plus volumineux.

— Pour $\psi = 3$, à volume W identique, le treillis est 8 fois plus rigide que le simplex, alors qu'à rigidité $\frac{H}{\delta}$ équivalente, le simplex est 3 fois plus volumineux.

⇒ L'évolution de la rigidité du treillis avec la sensibilité au flambement permet au simplex d'avoir des caractéristiques mécaniques de plus en plus proches de celles du treillis lorsque le contexte de sensibilité au flambement devient négligeable. Cependant, quelque soit la sensibilité au flambement et l'état de précontrainte considéré, le treillis présente de meilleures caractéristiques structurales.

CHAPITRE 5 :

AMÉLIORATION DU SIMPLEX AVEC L'AJOUT DE CÂBLES ADDITIONNELS

5 Amélioration du simplex par l'ajout de câbles additionnels

Ce chapitre a pour objectif d'explorer des solutions alternatives visant à améliorer les performances mécaniques du simplex classique, noté $S0$. Le chapitre précédent a permis d'établir une comparaison rigoureuse entre un simplex optimisé et sa structure homologue en treillis. Pour chaque valeur de ψ considérée, l'analyse a porté sur l'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, permettant ainsi de confronter les configurations optimales des deux systèmes du point de vue de leur légèreté et de leur rigidité. L'ensemble des cas étudiés a abouti à une évaluation globale de leurs performances respectives, quelle que soit la sensibilité au flambement ψ.

Il a été démontré que le treillis T présente globalement de meilleures propriétés mécaniques que le simplex $S0$. En effet, quelle que soit la sensibilité au flambement, le treillis demeure plus léger à rigidité équivalente, et plus rigide à volume équivalent. Toutefois, cet écart de performance tend à se réduire à mesure que l'influence du flambement devient négligeable et donc qu'on arrive dans un contexte idéalisé, laissant entrevoir une concurrence plus équilibrée entre les deux structures, bien que le treillis conserve un avantage structural. Certaines configurations du simplex $S0$, dans des états de précontrainte faibles, présentent un volume inférieur à celui du treillis, mais cela se fait au détriment de la rigidité. À l'inverse, d'autres configurations, pour des valeurs de ψ faibles et des précontraintes élevées, peuvent offrir une rigidité supérieure à celle du treillis, mais au prix d'un volume significativement plus important.

Jusqu'ici, l'analyse s'est limitée à la version standard du simplex $S0$. Il existe néanmoins des variantes, notamment celles intégrant des câbles additionnels, qui méritent d'être explorées dans l'optique de rapprocher davantage les performances du simplex de celles du treillis.

Ce chapitre s'attache donc à optimiser des configurations de simplex enrichies par l'ajout de câbles, en s'appuyant sur l'une des méthodes d'optimisation développées précédemment. Une évaluation comparative des performances mécaniques entre le simplex classique $S0$ et ces nouvelles configurations sera menée, afin de mesurer les effets de ces modifications. Enfin, ces nouveaux modèles seront à leur tour comparés à leur homologue en treillis, dans le but d'évaluer la pertinence de l'ajout de câbles pour améliorer la compétitivité structurale du simplex.

Dans ce chapitre, un seul cas de sensibilité au flambement est considéré, correspondant à la valeur de ψ utilisée dans la Section 4.3 (valeurs numériques en Annexe B). Ce choix s'explique par le fait qu'à des valeurs plus élevées de ψ, la rigidité croissante du treillis, comparée à celle, constante, du simplex, confère au treillis un net avantage. Or, l'objectif de cette étude est d'identifier une configuration de simplex susceptible de rivaliser avec les performances structurales du treillis. Une sensibilité au flambement modérée a donc été retenue, afin de rester dans un cas réaliste où le flambement est présent, tout en maintenant des niveaux de rigidité comparables entre les deux structures.

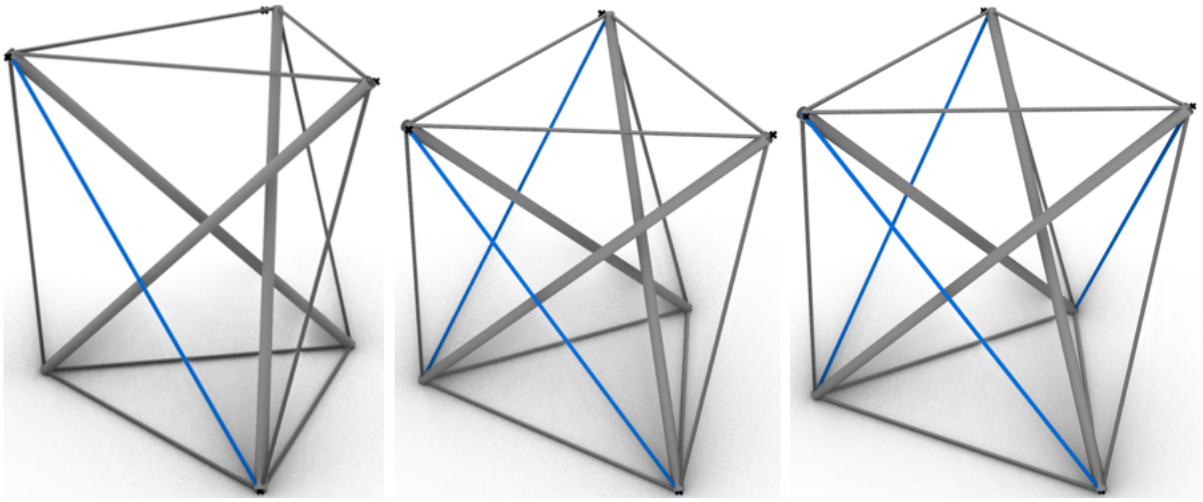
5.1 Pertinence de l'ajout de câbles additionnels

L'analyse de la configuration du simplex classique $S0$ met en évidence la possibilité d'ajouter un, deux, voire trois câbles supplémentaires (représentés en bleu sur la Figure 5.1). Cet enrichissement structural pourrait apporter plusieurs bénéfices significatifs en termes de performance mécanique.

Tout d'abord, l'ajout de câbles tend à réduire, voire à éliminer, les phénomènes de mécanisme au sein de la structure. En effet, dans l'espace, un nœud doit être connecté à au moins trois éléments pour satisfaire aux conditions d'équilibre. Toutefois, ces trois connexions ne garantissent pas l'immobilisation complète du nœud. L'intégration de câbles additionnels introduit une redondance au niveau des connexions, limitant ainsi les déplacements nodaux potentiels et renforçant la stabilité globale.

Ensuite, ces câbles supplémentaires permettent une meilleure redistribution des efforts internes. En prenant en charge une partie des efforts initialement supportées par les câbles existants, ils contribuent à diminuer les valeurs maximales des efforts de traction et de compression. Ces efforts étant dimensionnants, leur réduction pourrait entraîner une diminution du volume de matière nécessaire à la résistance de la structure, et donc une optimisation du poids total.

En résumé, l'ajout de câbles additionnels apparaît comme une stratégie prometteuse pour accroître la rigidité du simplex, en augmentant le nombre de connexions de certains nœuds, tout en réduisant le volume structural requis grâce à une répartition plus efficace des efforts internes. Il convient désormais de vérifier ces hypothèses et de comparer les performances mécaniques des configurations modifiées [1] vis-à-vis de celles du treillis T.



a) b) c)

FIGURE 5.1 – Simplex $S1$ (a), $S2$ (b) et $S3$ (c).

5.2 Méthode d'optimisation automatique à l'aide de *Galapagos*

Dans le cas des configurations $S1$, $S2$ et $S3$, seule l'optimisation automatique via *Galapagos* s'avère applicable. Contrairement au simplex classique $S0$, dont l'optimisation relevait d'un problème unidimensionnel, l'ajout de câbles additionnels rend la problématique bidimensionnelle.

Dans le cas de $S0$, l'optimisation s'effectuait par itérations successives : les diamètres des barres (D_s) et des câbles (D_c) étaient progressivement augmentés, puis la précontrainte p était maximisée. Si l'état de précontrainte cible était atteint, la combinaison (D_s, D_c, p) était considérée comme optimale ; dans le cas contraire, les dimensions étaient augmentées et le processus répété. Cette méthode restait unidimensionnelle, la précontrainte dans les barres constituant le seul paramètre d'ajustement.

En revanche, avec les modèles $S1$ à $S3$, l'optimisation devient plus complexe : elle nécessite la gestion simultanée de la précontrainte dans les barres et dans les câbles additionnels. Cette interdépendance rend difficile une approche manuelle, car il faut identifier une combinaison optimale de précontraintes minimisant le volume tout en respectant l'état de précontrainte requis.

Dans cette optique, la méthode d'optimisation automatique via *Galapagos* a été retenue. L'étude commence par une comparaison entre $S0$ optimal et les modèles $S1$, $S2$ et $S3$. Comme dans le chapitre précédent, les analyses porteront sur la rigidité à volume constant, et le volume à rigidité constante. Une comparaison analogue sera faite avec le T optimal de la Section 4.3.4.

1. Ces nouvelles configurations simplex avec 1-2-3 câbles additionnels seront notés respectivement $S1 - S2 - S3$.

	W	$\frac{H}{\delta}$
Treillis T optimisé	28.01	431
Simplex $S0$ de même rigidité que le treillis T	133.3	431
Simplex $S0$ de même volume que le treillis T	28.1	26.3

TABLE 12 – Récapitulatif des valeurs du simplex $S0$ et du treillis T optimisés au chapitre précédent, respectivement pour une même rigidité et un même volume.

5.2.1 Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique

Afin de trouver la configuration de volume minimale mais identique à celui de $S0$ ou de T, la formule d'optimisation utilisée dans ce nouveau cas se rapproche grandement de l'Équation 17. Par rapport à cette formule, un terme vient s'y ajouter :

$$\text{Min } (W^2 + N_l + N_t + N_s + N_{add} + u + Q + K) \tag{23}$$

Avec :

— K : la condition supplémentaire garantissant que les câbles additionnels reprennent un effort non nul, assurant ainsi leur utilité structurale. Si cette condition n'est pas satisfaite, le terme K prend la valeur de 5000 ; dans le cas contraire, K est nul.

$$\text{IF } (N_{add} > 0, 0, 500) \tag{24}$$

Ce nouveau terme ajouté à la formule vient donc s'assurer que les câbles additionnels ont un réel impact sur la rigidité et la répartition des efforts internes dans la structure.

5.2.2 Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ identique

Pour la comparaison des volumes à rigidité constante, la formulation de l'optimisation reprend celle utilisée dans le chapitre précédent. Elle adopte la même structure que l'Équation 23, à l'exception du terme Q, qui est ici omis. En effet, l'objectif n'étant pas de maintenir un volume identique, ce terme devient sans objet dans le cadre de cette optimisation.

En revanche, la condition relative au déplacement nodal u est légèrement modifiée, à l'instar de ce qui a été présenté en Section 4.3.4. Afin d'obtenir une configuration présentant une rigidité équivalente à celle du simplex $S0$ et du treillis optimisé T, cette contrainte est renforcée. La condition appliquée à u adopte ainsi la même forme que celle de l'Équation 19.

$$\text{If } (\frac{H}{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \geq 431, d, 5000) \tag{25}$$

5.3 Comparaison d'un simplex avec câbles additionnels $S1 - S2 - S3$ avec un simplex classique $S0$

L'objectif est désormais de comparer les trois nouvelles configurations du simplex intégrant respectivement un, deux ou trois câbles additionnels. Pour chacune d'elles, deux optimisations automatiques sont réalisées à l'aide de *Galapagos*, en vue d'une comparaison directe avec le modèle du simplex classique $S0$. Les configurations du simplex classique prises en compte ici sont celles indiquées dans le Tableau 12, résultats de l'optimisation automatique avec *Galapagos* en vue d'une comparaison direct avec le treillis T.

Cette analyse vise à évaluer la pertinence de l'ajout de câbles supplémentaires, en examinant leur impact sur la rigidité à volume constant, ainsi que sur le volume requis à rigidité équivalente, par rapport au modèle $S0$. Elle permettra également de déterminer jusqu'à quel nombre de câbles l'ajout reste bénéfique en termes de réduction significative de volume et d'amélioration de la rigidité du simplex.

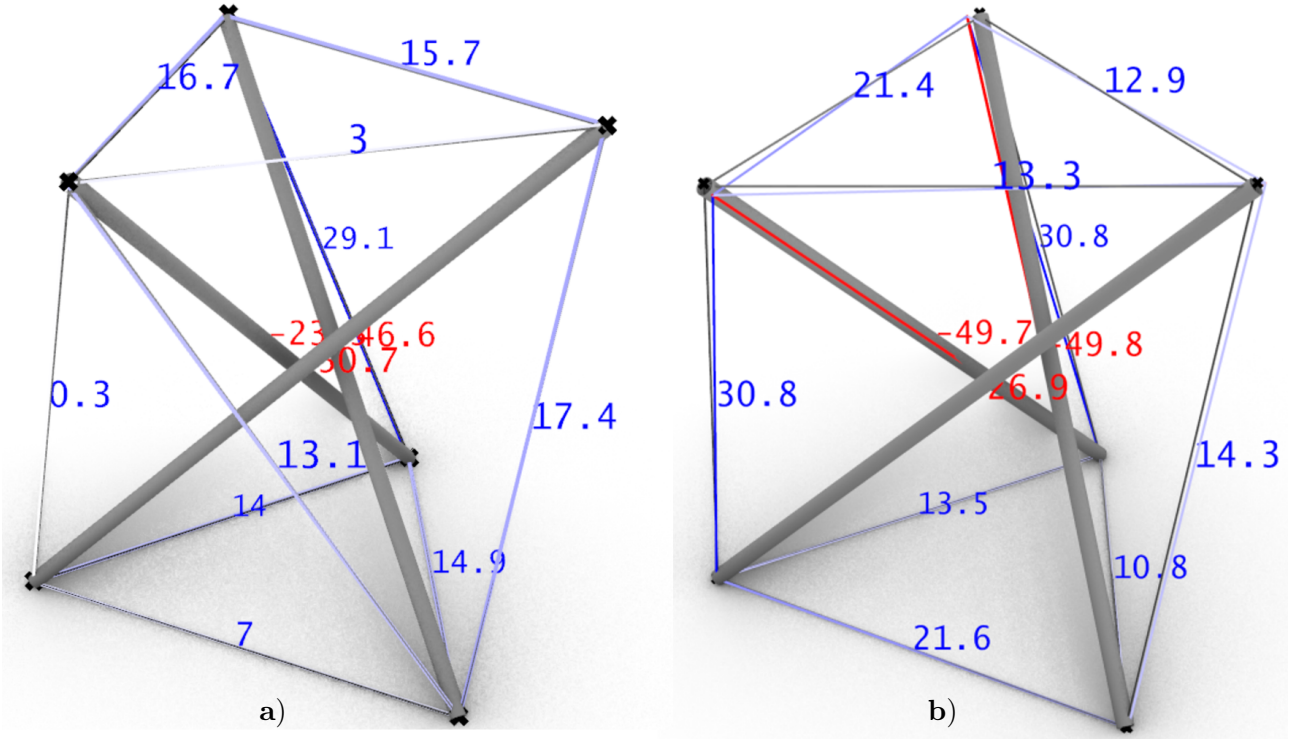
5.3.1 Simplex $S1$

Après le processus d'optimisation automatique avec *Galapagos* dans le but de comparer respectivement les rigidités à volume constant et les volumes pour une même rigidité, on obtient les résultats illustrés par les Figures 5.2 et 5.3, pour le cas de $S1$.

Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique

Les résultats obtenus confirment de manière claire les hypothèses formulées quant à la pertinence de l'introduction de câbles au sein de la structure, comme évoqué dans la Section 5.1. Plus particulièrement, l'analyse de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour la structure $S1$, à volume constant, met en évidence une augmentation significative de la rigidité par rapport à la structure de référence $S0$. À volume équivalent, l'ajout d'un seul câble permet ainsi d'accroître la rigidité globale d'un facteur d'environ 5, ce qui souligne l'impact structural majeur de cet élément supplémentaire.

Au-delà de cette amélioration en rigidité, on constate également une meilleure répartition des efforts internes au sein de la structure. Pour le cas de $S1$, les efforts maximaux en traction comme en compression sont sensiblement réduits, ce qui traduit une distribution plus homogène des sollicitations. Ce phénomène ouvre la possibilité d'un dimensionnement plus économique, dans la mesure où des sections plus faibles pourraient suffire à satisfaire les contraintes mécaniques imposées. Il en résulterait potentiellement une réduction du volume total nécessaire à rigidité équivalente.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{115.7}$ — $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{26.23}$

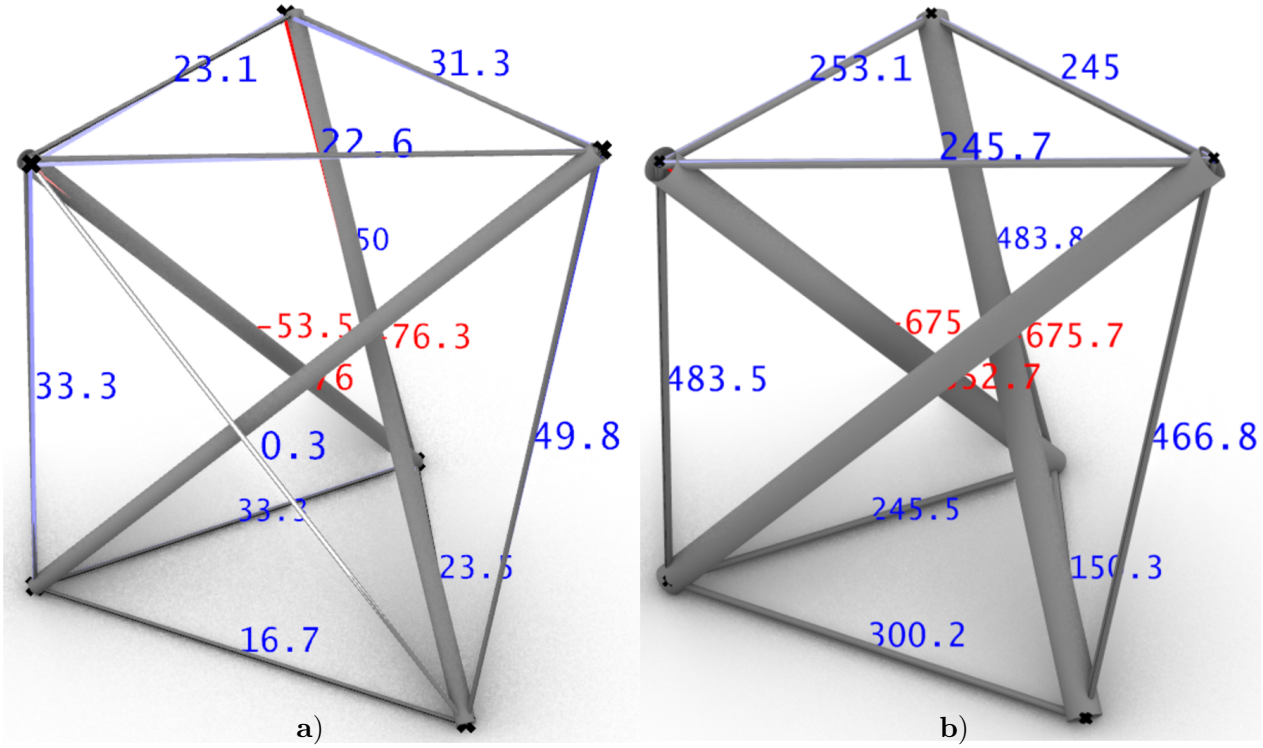
FIGURE 5.2 – Comparaison de la rigidité de $S1$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$).

Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ identique

Pour cette seconde comparaison entre $S1$ et $S0$ visant à évaluer l'évolution du volume pour un même indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, une nette amélioration due à l'ajout d'un câble supplémentaire peut être observée.

Comme dans la comparaison précédente, on constate une réduction marquée des efforts internes, accompagnée d'une meilleure répartition des sollicitations au sein de la structure. L'effort de traction maximal observé dans la configuration $S1$ est environ dix fois inférieur à celui mesuré dans $S0$, tandis que l'effort maximal en compression est réduit par un facteur de l'ordre de 9. Une telle amélioration ne peut s'expliquer uniquement par une meilleure répartition des efforts ; elle résulte également d'une réduction de la précontrainte nécessaire ainsi que d'une moindre exigence en matière de section pour résister aux efforts induits.

L'introduction d'un câble additionnel entraîne donc une augmentation sensible de la rigidité à volume constant. Cette rigidité accrue permet, en retour, de réduire le niveau de précontrainte requis pour atteindre les performances mécaniques souhaitées. Cette diminution de la précontrainte (d'un facteur 10) se traduit par une baisse importante des efforts internes dans l'état initial de la structure, avant l'application du poids propre et des charges extérieures. De ce fait, le volume total de matériau requis pour garantir la même rigidité peut être considérablement réduit. Plus précisément, cette réduction de volume entre $S0$ et $S1$ est de l'ordre d'un facteur 3. En d'autres termes, la structure $S1$ est trois fois plus légère que $S0$, tout en offrant un niveau de rigidité équivalent.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{45.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{2.3}$

$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{133.3}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{22.5}$

FIGURE 5.3 – Comparaison du volume de $S1$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$).

Les bénéfices de l'ajout d'un câble additionnel ont pu être exposés et démontrés ici. La considération des deux cas, concernant l'ajout de deux et trois câbles additionnels, permet d'étudier à quel point l'ajout d'un second et d'un troisième câble est pertinent par rapport aux améliorations structurales déjà obtenues pour $S1$.

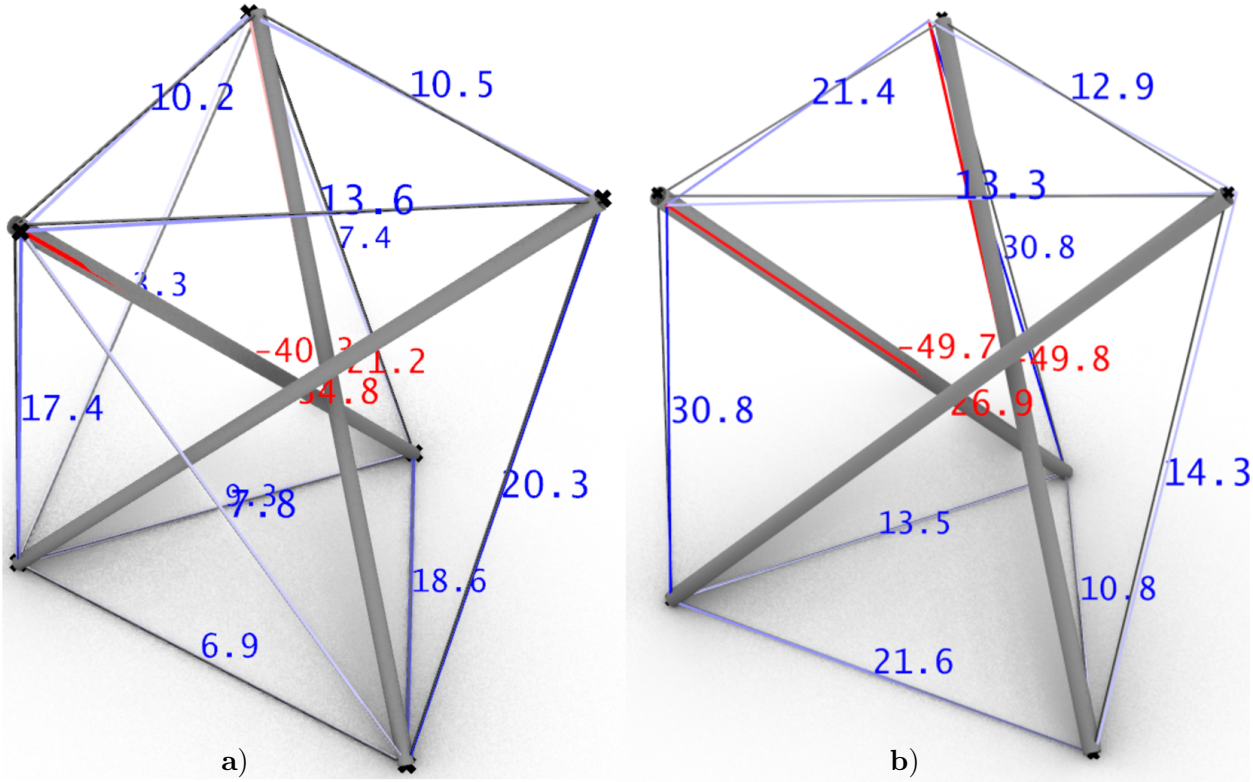
5.3.2 Simplex $S2$

De manière similaire à la démarche utilisée précédemment, on obtient les résultats illustrés par les Figures 5.4 et 5.5 concernant l'ajout de deux câbles additionnels.

Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique

Assez logiquement, les résultats obtenus sont dans le même sens que ceux obtenus précédemment. En effet, non seulement la rigidité de $S2$ par rapport à celle de $S0$ est bien meilleure, mais celle-ci a également augmentée par rapport la rigidité de $S1$. L'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ de $S2$ a été augmenté d'un facteur 6 par rapport à $S0$, et d'un facteur 1.3 par rapport à $S1$. On observe donc que dans le cas d'un volume constant, l'ajout d'un second câble donne de meilleurs résultats comparé à l'ajout d'un seul câble. Cependant, cette augmentation de rigidité est moins marquée que lorsqu'on passe de $S0$ à $S1$.

Il est dès lors intéressant de comparer l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, à volume constant, pour voir si on observe une diminution de volume significative entre $S2$ et $S0$, et entre $S2$ et $S1$ pour confirmer que l'ajout de deux câbles est plus avantageux que les modèles $S0$ et $S1$.



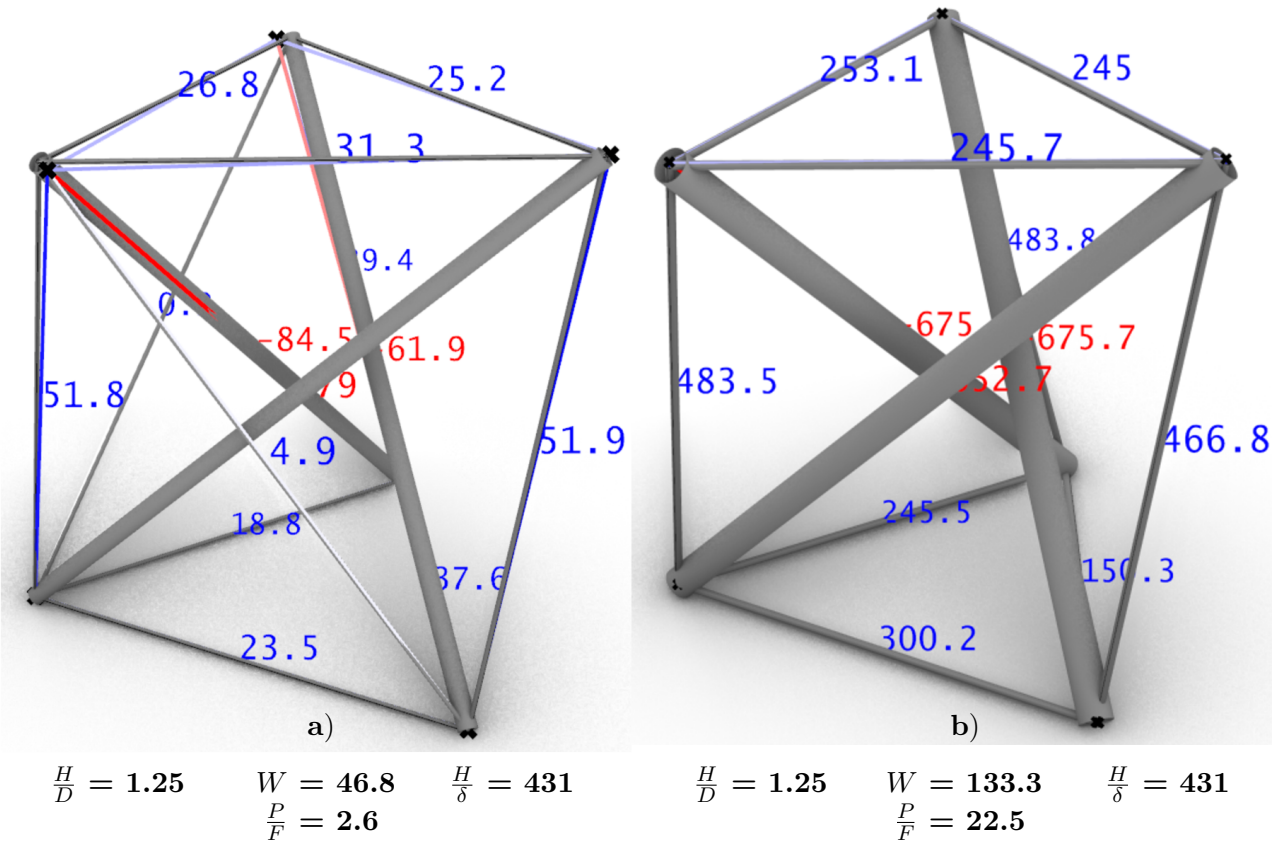
a) $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.15}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{157.4}$

b) $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{26.23}$

FIGURE 5.4 – Comparaison de la rigidité de $S2$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$).

Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ identique

La comparaison des volumes entre les structures $S2$ et $S0$ met en évidence, comme dans le cas de $S1$, une réduction significative du volume total requis. L'ajout de deux câbles supplémentaires dans la configuration $S2$ permet une diminution du volume d'environ un facteur 2.8 par rapport à $S0$. Ces résultats confirment que la structure $S2$ offre des performances nettement supérieures à celles de la configuration de référence, et justifient pleinement son intérêt du point de vue structural.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{46.8}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{2.6}$

$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{133.3}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{22.5}$

FIGURE 5.5 – Comparaison du volume de $S2$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$).

Cependant, lorsqu'on compare l'indicateur de volume W de $S2$ avec celui de $S1$, une légère augmentation est observée dans le cas de $S2$. Cette différence peut s'expliquer de plusieurs manières.

D'une part, à volume constant, une augmentation de la précontrainte dans $S1$ pourrait suffire à obtenir un niveau de rigidité comparable à celui atteint par $S2$, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter un second câble. D'autre part, si $S1$ est déjà optimisé et atteint son niveau maximal de précontrainte admissible, il est possible que l'augmentation de volume requise pour atteindre la rigidité de $S2$ soit relativement modérée, ce qui amènerait à considérer que les deux configurations présentent en réalité des performances mécaniques similaires.

Ainsi, bien que la structure $S2$ se montre légèrement plus rigide, cette amélioration s'accompagne d'un léger surcroît de volume du à l'ajout de ce second câble, ce qui signifie qu'à rigidité équivalente, $S2$ est légèrement plus lourde que $S1$. Ce constat suggère que l'ajout d'un second câble n'apporte pas nécessairement une amélioration significative du rapport rigidité/volume par rapport au modèle $S1$.

5.3.3 Simplex $S3$

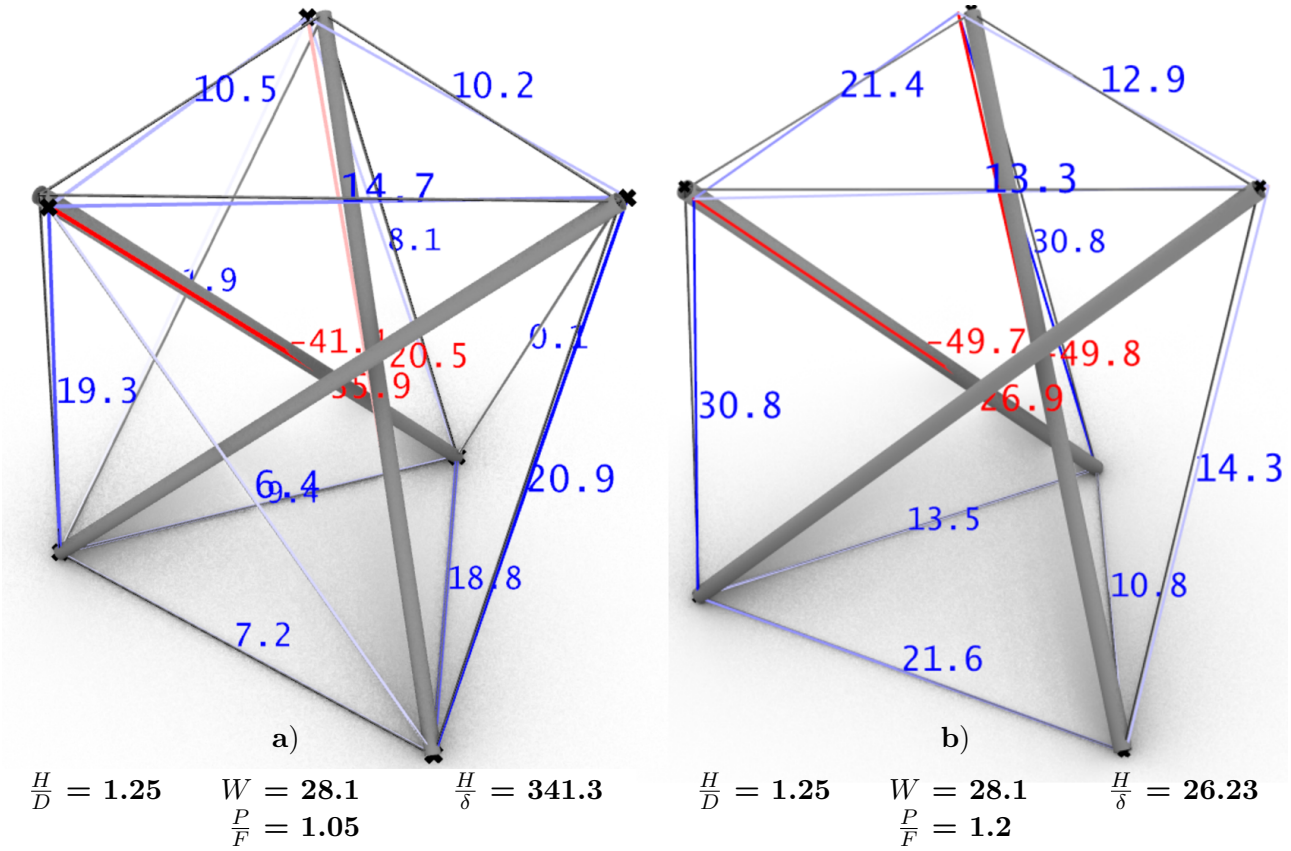
Bien que les conclusions tirées pour le cas de la structure $S2$ puissent laisser penser que l'ajout de plus de un câble additionnel ne conduit pas nécessairement à une amélioration notable des performances mécaniques, il demeure pertinent d'examiner le cas de $S3$, correspondant à l'ajout de trois câbles supplémentaires.

L'analyse de cette configuration permettra, d'une part, de valider ou d'infirmer les observations formulées précédemment pour $S2$ — à savoir que l'introduction d'un second câble n'apporte pas de gain significatif en termes de rigidité spécifique — et, d'autre part, d'explorer la possibilité d'obtenir une structure encore plus performante. Cette nouvelle configuration pourrait en effet se rapprocher davantage des caractéristiques mécaniques du treillis T, auquel elle sera directement comparée dans la section suivante.

Comparaison de la rigidité pour un indicateur de volume W identique

L'analyse de cette troisième configuration, dans laquelle trois câbles supplémentaires sont ajoutés au simplex de référence $S0$, s'avère particulièrement pertinente au vu des résultats obtenus. Contrairement aux observations faites pour $S2$, l'ajout d'un troisième câble conduit ici à une amélioration significative des performances mécaniques de la structure $S3$.

À volume constant, la rigidité de $S3$ est multipliée par un facteur 13 par rapport à celle de la structure initiale $S0$, ce qui témoigne d'un gain mécanique considérable. Comparée à $S2$, la configuration $S3$ présente un indicateur de déplacement nodal doublé, traduisant une rigidité deux fois supérieure. Ces résultats indiquent que, dans ce cas précis, l'augmentation du nombre de câbles a un impact décisif sur la performance structurale du simplex.



$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.05}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{341.3}$

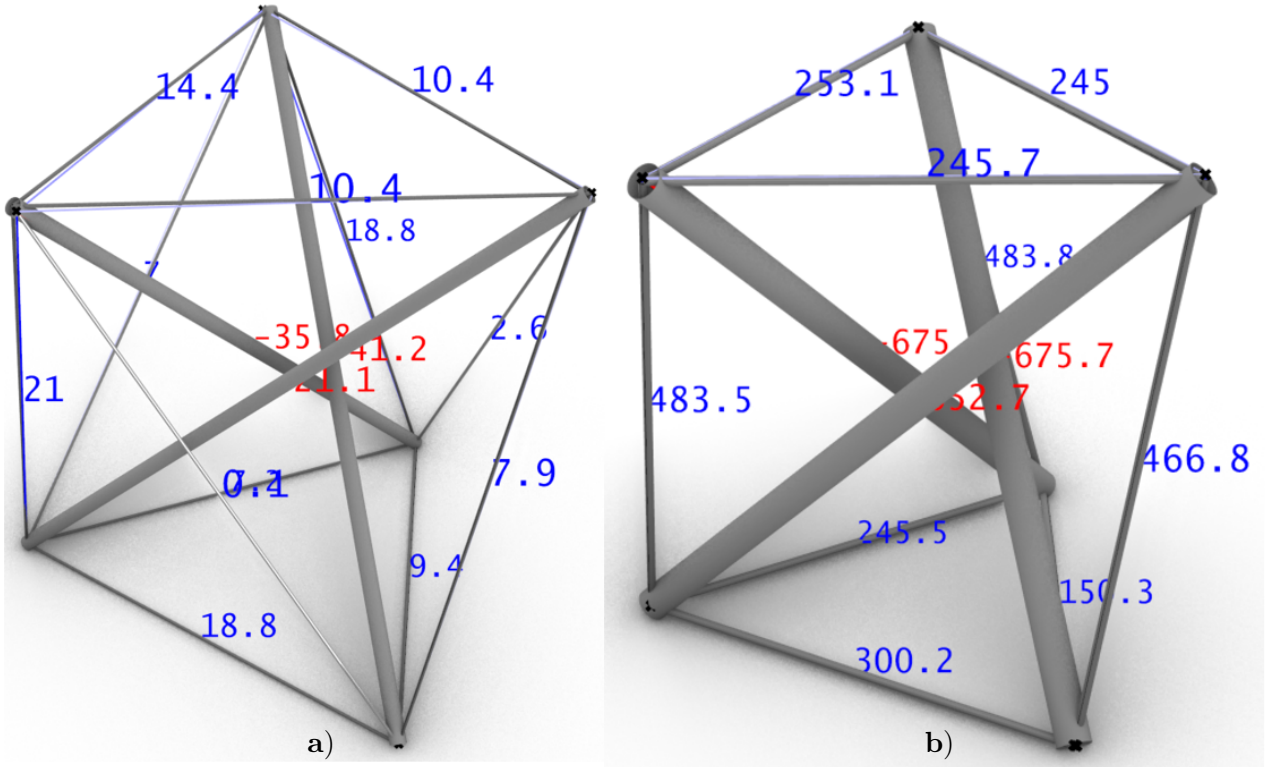
$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{28.1}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{26.23}$

FIGURE 5.6 – Comparaison de la rigidité de $S3$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$).

Comparaison du volume W pour un indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ identique

La comparaison des volumes nécessaires pour atteindre une rigidité équivalente met encore plus en lumière les bénéfices structuraux offerts par la configuration $S3$. L'indicateur de volume associé à $S3$ est quatre fois inférieur à celui obtenu pour la structure de référence $S0$, ce qui témoigne d'une amélioration considérable de l'efficacité matérielle. Par ailleurs, en comparaison avec les configurations intermédiaires $S1$ et $S2$, le volume requis pour $S3$ est réduit d'un facteur 1.5, ce qui en fait la plus performante des trois configurations étudiées impliquant l'ajout de câbles au simplex initial $S0$.

Contrairement au passage de $S1$ à $S2$, dont l'effet sur les performances mécaniques était limité, la transition de $S2$ vers $S3$ permet d'atteindre des gains notables tant en termes de rigidité que de réduction de volume. Bien que cette amélioration ne soit pas aussi marquée que celle observée lors du passage de $S0$ à $S1$, elle conduit néanmoins à une structure en tenségrité nettement plus performante, consolidant ainsi l'intérêt du modèle $S3$ dans une perspective de comparaison avec le treillis T.



a) $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{31.4}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{1.05}$

b) $\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{133.3}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{431}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{22.5}$

FIGURE 5.7 – Comparaison du volume de $S3$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$).

5.4 Comparaison entre un simplex avec câbles additionnels $S1-S2-S3$ et un treillis T homologue

La section précédente a permis de comparer les performances mécaniques de différentes configurations du simplex, dans lesquelles un, deux ou trois câbles supplémentaires ont été ajoutés dans le but d'améliorer la rigidité de la structure, tout en réduisant le volume nécessaire pour atteindre un niveau de rigidité donné. Il a été démontré que l'introduction d'un premier câble permettait une amélioration significative des performances du simplex. Le modèle $S1$ présentait en effet une rigidité cinq fois supérieure, à volume constant, et permettait une réduction de volume d'un facteur 3 lorsqu'on cherchait à atteindre une même rigidité. Ces résultats soulignent la pertinence de ce type de structure dans une perspective de comparaison avec un treillis.

En ce qui concerne la configuration $S2$, bien qu'elle présente des performances supérieures à celles du modèle de référence $S0$, aucun gain notable n'a été observé par rapport à $S1$. À rigidité équivalente, le volume de $S2$ s'est avéré légèrement supérieur à celui de $S1$, ce qui rend ce dernier plus efficace dans une optique de minimisation de la masse pour un critère de flèche donné.

L'analyse du modèle $S3$ a quant à elle fourni des résultats particulièrement convaincants, non seulement par rapport à $S0$, mais également en comparaison avec les modèles $S1$ et $S2$. Ce modèle se distingue ainsi comme le plus performant, tant en termes d'efficacité matérielle que de rigidité mesurée par l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$.

Il convient toutefois de rappeler que l'objet de ce mémoire ne se limite pas à la comparaison entre différentes variantes du simplex, mais vise avant tout une étude comparative rigoureuse avec le treillis équivalent. C'est précisément ce qui sera abordé dans la présente section.

Pour des raisons de clarté et afin de ne pas alourdir le propos, seule la configuration $S3$ sera retenue pour la comparaison avec son homologue en treillis. Comme démontré dans la section précédente, ce modèle présente les meilleures performances parmi les configurations testées. Il apparaît donc naturel de l'utiliser comme référence pour cette analyse. Les autres configurations, présentant des performances mécaniques moindres, pourront être incluses dans les conclusions par extrapolation, sans qu'il soit nécessaire de les analyser individuellement.

5.4.1 Comparaison entre le simplex $S3$ et le treillis T

Cette comparaison est certainement la plus pertinente de cette étude. En effet, jusqu'à présent, les différentes configurations de $S0$ considérées, c'est-à-dire pour les différents contextes de sensibilité au flambement amènent aux mêmes conclusions : **Les treillis présentent de meilleures performances structurales en étant plus légers et plus rigides que le simplex en tenségrité**. Mais ce chapitre s'est penché sur une alternative, ajouter des câbles au modèle du simplex classique pour améliorer sa rigidité et permettre une diminution de son volume. Le simplex $S3$ montre des caractéristiques assez prometteuses qui sont assez intéressantes à comparer avec le modèle du treillis T. Le tableau suivant reprend les valeurs des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour les modèles $S3$ et T.

	W	$\frac{H}{\delta}$
Treillis T optimisé	28.01	431
Simplex $S3$ de même rigidité que le treillis T	31.4	431
Simplex $S3$ de même volume que le treillis T	28.1	341.3

TABLE 13 – Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre le modèle simplex $S3$ et le treillis T ($\psi = 7.5$).

On a identifié un cas où le simplex présente des performances structurales proches de celles du treillis. Que ce soit pour une rigidité équivalente à volume constant, ou un volume similaire pour une même rigidité, les indicateurs (W et $\frac{H}{\delta}$) affichent des valeurs comparables.

Cette observation permet de nuancer les conclusions précédentes. Bien que le treillis T reste légèrement supérieur, le modèle de simplex $S3$ parvient à rivaliser dans un contexte de flambement modéré ($\psi = 7.5$). Il existe donc un cadre dans lequel la tenségrité offre des performances mécaniques et structurales quasi équivalentes à celles d'un treillis, en faisant de celle-ci une alternative crédible. Cette conclusion, bien que prometteuse, doit être prise avec des pincettes étant donné qu'elle reste propre à ce contexte de sensibilité au flambement particulier. Elle suggère néanmoins que des performances encore plus proches de celles du treillis pourraient être atteintes pour des valeurs de ψ plus faibles.

En effet, les explications du Chapitre 4, concernant des contextes de flambement très faible voir inexistants, ont exposé que la rigidité du treillis changeait avec la valeur de ψ et tendait donc à diminuer lorsque l'indicateur de flambement diminuait. Il est donc intéressant d'étudier cette comparaison entre les modèles $S3$ et T dans le cas d'une valeur de $\psi = 3$ très faible [1] (identique à celle considérée dans la Section 4.5.2), dans l'espoir de trouver peut être un contexte dans lequel les structures en tenségrités sont plus performantes.

A l'aide du même procédé d'étude que réalisé précédemment (optimisation automatique à l'aide de *Galapagos*), on obtient le tableau suivant exposant la comparaison des caractéristiques entre le simplex $S3$ et le treillis T, pour un contexte de sensibilité au flambement quasi inexistant.

1. Malgré la variation de l'indicateur d'élancement géométrique optimal $\frac{H}{D}$ pour les différents états de précontrainte lorsque $\psi = 3$, la valeur de $\frac{H}{D} = 1.25$ a été conservée ici afin d'assurer une comparaison pertinente avec les résultats obtenus pour $\psi = 7.5$. On observera que les configurations optimales de $S3$ auront un état de précontrainte faible rendant donc l'élancement de 1.25 optimal conformément à la Section 4.5.2.

	W	$\frac{H}{\delta}$
Treillis T optimisé	10.6	163
Simplex $S3$ de même rigidité que le treillis T	11.5	163
Simplex $S3$ de même volume que le treillis T	10.6	108.3

TABLE 14 – Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre le modèle simplex $S3$ et le treillis T ($\psi = 3$).

Comme attendu, la proximité entre les caractéristiques structurales de $S3$ et T s'accentue à mesure que ψ diminue. Cette tendance confirme que dans des contextes peu sensibles au flambement, une configuration simplex intégrant trois câbles additionnels peut atteindre des performances quasiment équivalentes à celles d'un treillis classique. On peut même envisager que, lorsque l'indicateur de flambement tend vers zéro, les différences de comportement entre les deux structures deviennent négligeables, jusqu'à aboutir à des performances mécaniques équivalentes.

Ainsi, il a été démontré que, selon le niveau de sensibilité au flambement considéré, le modèle $S3$ est capable de rivaliser avec le treillis T. Il est évident que des contextes caractérisés par une très faible sensibilité au flambement demeurent principalement théoriques, dans la mesure où ce phénomène constitue une contrainte structurale bien réelle. Néanmoins, l'étude a mis en évidence au moins un scénario concret dans lequel le modèle $S3$ présente des performances comparables, en termes de volume et de rigidité, à celles du treillis T.

Combinée aux avantages évoqués dans le Chapitre 1, cette efficacité structurale fait du simplex en tenségrité avec trois câbles supplémentaires une alternative crédible aux structures en treillis. Bien sûr, cette conclusion ne s'applique qu'à cette typologie simple, et il conviendrait de poursuivre les recherches sur des structures en tenségrité plus complexes afin d'en généraliser la portée. Cela dit, ces résultats permettent de nuancer les conclusions précédemment établies sur la supériorité systématique des treillis, et ouvrent la voie à de nouvelles perspectives pour les structures en tenségrité.

5.4.2 Pertinence de la valeur de ψ considérée dans ce chapitre

Dans la Section 5.4, la comparaison entre les modèles de simplex $S1$, $S2$, $S3$ et le treillis T a été menée pour une seule valeur de sensibilité au flambement, $\psi = 7.5$. Une vérification complémentaire a toutefois été réalisée pour $\psi = 3$, comme justifié en Section 5.4.1. Il est donc légitime de s'interroger sur la portée générale de ces conclusions et leur validité pour d'autres valeurs de ψ.

Le choix de se concentrer sur $\psi = 7.5$ repose sur les observations du Chapitre 4, où il a été montré que, pour cette valeur, la rigidité du treillis était comparable à celle des modèles en tenségrité dans différents états de précontrainte. Ce contexte permettait une comparaison équilibrée entre les deux types de structures.

Par ailleurs, il a été établi, dans le Chapitre 4, que la rigidité des modèles en tenségrité varie peu avec ψ, tandis que celle du treillis évolue proportionnellement à cet indicateur. Étudier un flambement plus marqué n'aurait donc fait qu'amplifier l'écart de performance en faveur du treillis, sans réelle évolution du comportement du modèle $S3$, rendant la comparaison moins pertinente. À $\psi = 7.5$, en revanche, le modèle $S3$ présente des performances mécaniques proches de celles de T, justifiant pleinement ce choix.

L'analyse pour une valeur plus faible de ψ s'est également révélée pertinente. La rigidité du treillis diminuant fortement à faible flambement, alors que celle du modèle $S3$ reste stable, il devient intéressant d'évaluer si, dans des contextes très peu sensibles au flambement, ce dernier pourrait surpasser le treillis. Cela ouvre la voie à une réflexion approfondie sur l'intérêt des structures en tenségrité dans des environnements où le flambement est négligeable.

Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre

Ce chapitre avait pour objectif d'explorer d'autres configurations du simplex intégrant des câbles additionnels. L'ajout de ses câbles doit en théorie permettre une augmentation de la rigidité du simplex, et donc de meilleures performances mécaniques en vue d'une comparaison avec son treillis homologue. L'optimisation automatique avec *Galapagos* a donc été utilisée d'un part pour comparer $S1 - S2 - S3$ avec $S0$ et d'autre part pour comparer $S1 - S2 - S3$ avec T. Dans ce chapitre seul une valeur de ψ a été considérée (ψ =7.5, contexte de sensibilité au flambement similaire au cas initial du chapitre précédent).

En reprenant les configurations du simplex $S0$ respectivement de même volume W et de même rigidité $\frac{H}{\delta}$ que le treillis optimal pour $\frac{H}{D} = 1.25$, on effectue deux optimisations des trois nouvelles configurations $S1 - S2 - S3$ afin de comparer les volumes à même rigidité et les rigidités pour un volume identique. Cette comparaison a permis d'aboutir aux observations et conclusions suivantes :

— La configuration $S1$ présente une rigidité 5 fois plus importante que la configuration initiale $S0$, pour un même volume, alors qu'à rigidité identique, $S1$ a un volume 3 fois plus faible.

— La configuration $S2$ présente une rigidité 6 fois plus importante que $S0$, à volume égal, et à rigidité identique, le volume de $S2$ est 3 fois plus faible.

— La configuration $S3$ présente une rigidité 13 fois supérieure à celle de $S0$, pour un volume identique, et à rigidité similaire, le volume de $S3$ est 4 fois plus faible.

⇒ L'ajout de câbles additionnels augmente significativement les performances mécaniques du simplex comparé à la configuration initiale $S0$. La passage de $S0$ à $S1$ est très avantageux, tandis que le passage de $S1$ à $S2$ n'a pas d'avantage significatif, celle-ci présente une rigidité un peu meilleure mais pour un volume légèrement supérieur. Le passage de $S2$ à $S3$ présente a nouveau une amélioration considérable faisant de $S3$ la configuration en tenségrité étudiée la plus performante.

Cette même comparaison de volume et de rigidité a été réalisée entre $S3$ et le treillis afin de comparer les performances de cette nouvelle configuration de simplex avec le treillis. Cette seconde comparaison a permis d'obtenir les observations et les conclusions suivantes :

— Pour un même volume, la rigidité de $S3$ est 1.3 fois plus faible que celle du treillis.

— Pour une même rigidité, $S3$ est 1.1 fois plus volumineux que le treillis.

⇒ Par rapport à $S3$, le treillis garde un avantage structural, mais cette différence de performance tend à se réduire. Étant donné la rigidité décroissant du treillis lorsque l'indicateur de flambement diminue, cette même comparaison a été réalisée pour $\psi = 3$ et montre à nouveau un rapprochement des performances de $S3$ avec le treillis. Dans un contexte de sensibilité au flambement faible, voir négligeable, le simplex à trois câbles additionnels peut rivaliser avec son treillis homologue.

CHAPITRE 6 :

CONSIDÉRATION DE SCENARII DE CHARGEMENT ET DE MODÈLES SIMPLEX DIFFÉRENTS

6 Considération de scenarii de chargement et de modèles simplex différents

Le chapitre précédent a permis de mener une analyse approfondie du simplex en tenségrité, incluant l'étude de ses configurations enrichies par l'ajout de câbles supplémentaires. Cette investigation, couplée à celle du Chapitre 4, a conduit à une meilleure compréhension du comportement mécanique du simplex, en particulier lorsqu'il est comparé à une structure en treillis, dans divers contextes de flambement et pour plusieurs états de précontrainte. L'analyse a notamment mis en évidence une configuration, le modèle $S3$ (simplex avec trois câbles additionnels), dont les performances, en termes de poids propre et de rigidité, se rapprochent sensiblement de celles du treillis dans un contexte de flambement peu sensible voire négligeable. On a cependant pu conclure que de façon assez générale et sans équivoque, les structures en treillis étaient bien plus performantes que celles en tenségrité. Ainsi, pour le cas d'un chargement combiné vertical et horizontal, l'étude a permis d'apporter une réponse complète à la problématique initiale de ce mémoire.

Ce dernier chapitre vise à élargir le champ de l'étude en explorant des configurations supplémentaires, jugées pertinentes bien qu'encore non analysées. Jusqu'à présent, l'hypothèse principale retenue concernait un cas de chargement mixte, comprenant à la fois des composantes verticales et horizontales, considéré comme étant le plus réaliste d'un point de vue structural. Toutefois, comme introduit dans la Section 4.2.2, deux autres types de sollicitations peuvent également être envisagés : un chargement exclusivement vertical et un chargement exclusivement horizontal. Bien que ces cas soient moins fréquents dans la pratique, ils correspondent néanmoins à des situations d'ingénierie spécifiques, méritant d'être analysées. L'objectif de cette section est donc d'introduire ces cas de charge alternatifs et d'en observer les effets sur le comportement comparé du simplex en tenségrité et de son homologue en treillis.

Par ailleurs, l'analyse menée jusqu'ici s'est concentrée exclusivement sur le modèle prismatique du simplex. Or, d'autres formes prismatiques en tenségrité existent, brièvement évoqués en Section 4.1, et analysés plus en détail dans le mémoire de **Lindy Boucher** intitulé "Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques" [27]. Ces variantes géométriques présentent un intérêt particulier, dans la mesure où elles pourraient modifier les conclusions précédemment établies concernant la comparaison entre structures en tenségrité et structures en treillis. Ce chapitre intégrera donc également l'étude de ces configurations alternatives, en conservant le même scénario de chargement mixte que celui utilisé dans les chapitres antérieurs (Section 4.2.2).

Il convient de préciser que ce chapitre ne vise pas à réitérer une étude exhaustive pour chacun des nouveaux cas examinés. Les Chapitres 4 et 5 ont déjà fourni une analyse complète de l'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour le simplex et le treillis, selon différentes conditions de précontrainte, d'élancement $\frac{H}{D}$, et de sensibilité au flambement ψ. Les enseignements tirés de ces analyses pourront ainsi être mobilisés pour interpréter les résultats présentés dans ce chapitre, permettant une extrapolation cohérente sans nécessiter de nouvelles simulations systématiques.

L'objectif principal est donc de proposer une ouverture sur ces nouveaux scenarii, en observant dans quelle mesure les comparaisons entre structures en tenségrité et en treillis restent valables, ou s'en trouvent modifiées. Dans une logique de continuité méthodologique avec le chapitre précédent, seul un unique contexte de flambement sera retenu ici, caractérisé par un paramètre $\psi = 7.5$, correspondant à une sensibilité au flambement faible mais non négligeable.

Concrètement, ce chapitre débutera par l'étude du comportement du simplex classique $S0$ soumis séparément à un chargement purement vertical, puis à un chargement purement horizontal. Par la suite, les modèles prismatiques alternatifs seront examinés sous l'hypothèse d'un chargement mixte, identique à celui utilisé dans les chapitres précédents. Cette approche permettra d'enrichir la compréhension globale des performances comparées des structures en tenségrité et en treillis.

6.1 Scenario de chargement avec des composantes uniquement verticales

Cette première section s'intéresse à un scenario de chargement dans lequel seules des composantes verticales de force sont appliquées au simplex $S0$. Une telle configuration peut s'avérer pertinente dans le cadre, par exemple, de l'étude d'une tour en tenségrité principalement soumise à son propre poids ainsi qu'à des charges d'exploitation orientées verticalement, sans prise en compte des effets du vent, généralement horizontaux par rapport à la structure.

Le cas étudié ici reprend l'ensemble des hypothèses formulées dans le cas d'étude de référence présenté en Section 4.2, dont les paramètres numériques détaillés figurent en Annexe B. La seule différence majeure réside dans la manière dont la force totale F est appliquée au système : dans cette configuration, F est uniformément répartie en trois composantes verticales égales, chacune étant appliquée à l'un des trois nœuds supérieurs du simplex. La Figure 6.1 illustre ce nouveau cas de chargement uni-axial vertical tel qu'il est considéré dans cette analyse.

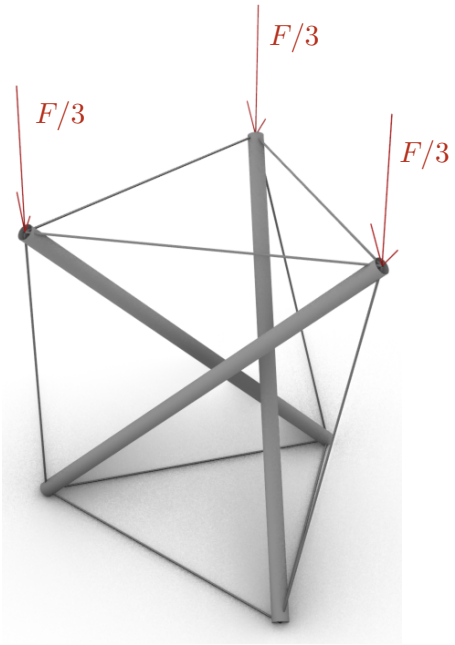


FIGURE 6.1 – Illustration du scenario de chargement avec des composantes uniquement verticales.

6.1.1 Évolution de l'indicateur de volume W

De manière relativement intuitive, on peut anticiper que les courbes d'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour différents niveaux de précontrainte, suivront globalement une tendance similaire à celles observées précédemment, notamment pour un même indicateur de sensibilité au flambement (voir Figure 4.12). L'interprétation déjà formulée dans la Section 4.3.1, selon laquelle un élancement faible conduit à une augmentation significative du volume requis, reste tout à fait pertinente dans le contexte d'un chargement purement vertical. En effet, un faible élancement engendre un déficit de rigidité vertical, nécessitant une plus grande quantité de matière pour assurer la stabilité de la structure.

En revanche, la justification de l'augmentation du volume observée pour des élancements élevés doit ici être partiellement révisée. Dans le scenario de chargement combiné (vertical et horizontal) étudié précédemment, deux facteurs principaux expliquaient cette hausse du volume : d'une part, l'allongement des barres associé à un élancement accru accroît leur vulnérabilité au flambement ; d'autre part, la présence de charges horizontales introduisait un bras de levier important, générant des efforts internes supplémentaires et, par conséquent, une demande en matière plus élevée.

Dans le cas présent, où seules des charges verticales sont considérées, seul le premier facteur demeure applicable. L'augmentation du volume pour des élancements importants peut donc uniquement être attribuée à l'instabilité accrue des barres soumises au flambement. Cette simplification du contexte de chargement soulève une interrogation légitime quant à l'influence des effets des charges horizontales sur l'indicateur de volume. Il est possible que sans ces composantes de force, l'augmentation du volume de matière avec l'élancement soit moins prononcée.

Une seconde question concerne la position du minimum de volume en fonction du rapport $\frac{H}{D}$. Si les composantes horizontales des charges jouent un rôle significatif dans la détermination de ce minimum, leur absence pourrait conduire à un déplacement du point optimal. Il serait alors plausible que la valeur de $\frac{H}{D}$ minimisant W soit augmentée, indiquant ainsi que des structures plus élancées peuvent être envisagées dans ce contexte.

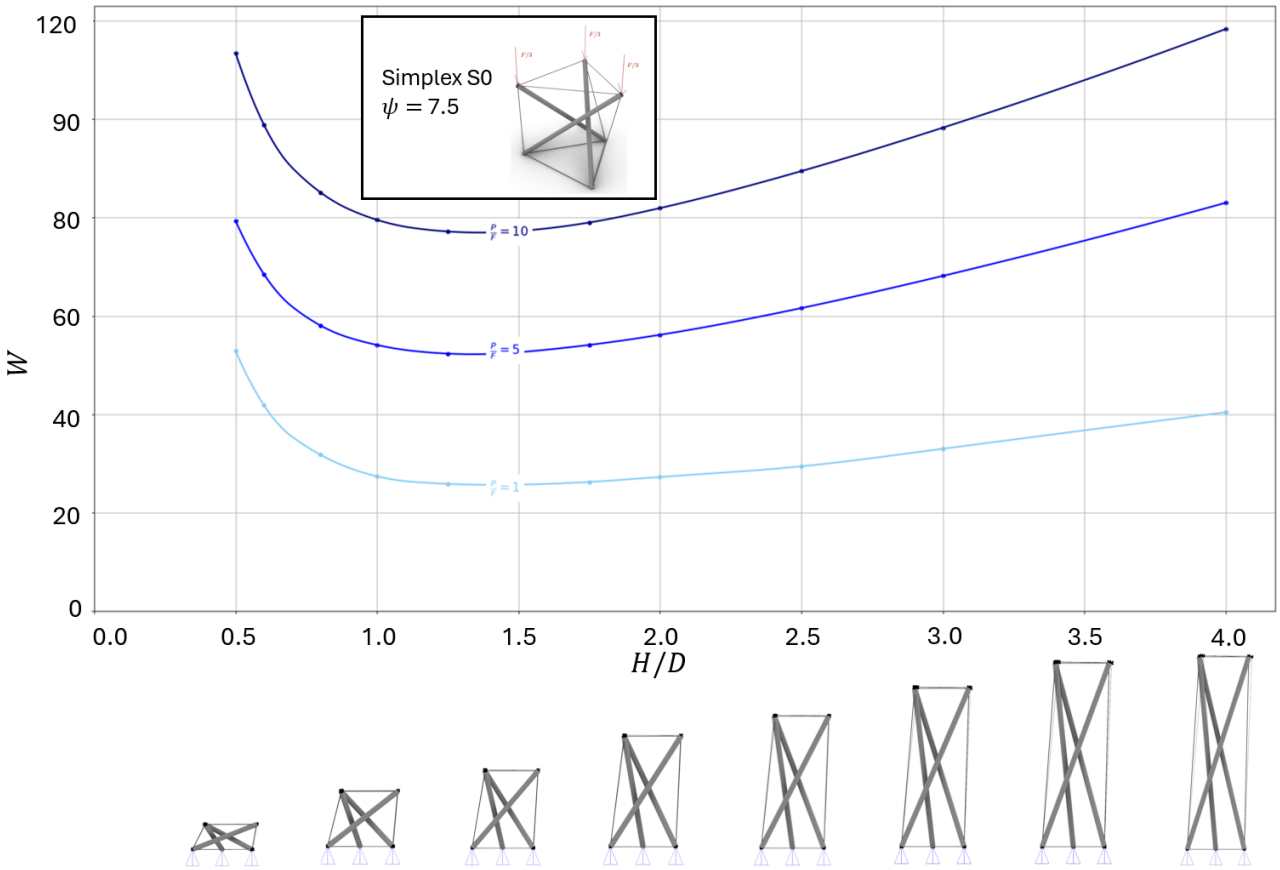


FIGURE 6.2 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, sous chargement uniquement vertical.

Comme anticipé, les courbes d'évolution de l'indicateur de volume W en fonction du rapport d'élancement $\frac{H}{D}$ présentent des tendances similaires à celles observées dans les analyses précédentes. En particulier, elles confirment l'existence d'un minimum local de volume situé entre deux bornes d'élancement, de part et d'autre desquelles la valeur de W tend à croître.

Toutefois, dans le contexte de chargement exclusivement vertical considéré ici, on observe que l'augmentation du volume pour des élancements élevés se fait de manière sensiblement plus modérée. En effet, dans le cas de chargement combiné (vertical et horizontal), les valeurs de W mesurées pour un élancement élevé ($\frac{H}{D} = 4$) étaient nettement supérieures à celles obtenues pour un élancement faible ($\frac{H}{D} = 0.5$), comme le montre la Figure 4.12. À l'inverse, dans le présent cas uni-axial, cette différence s'atténue : les valeurs atteintes pour l'élancement maximal considéré ne sont plus significativement plus élevées que celles correspondant à l'élancement minimal.

Cette observation confirme que les composantes horizontales de charge jouent un rôle notable dans l'augmentation de matière requise pour les structures très élancées, en raison des efforts internes additionnels qu'elles génèrent. Toutefois, bien que cette influence soit absente ici, l'évolution globale du volume W demeure relativement proche de celle obtenue dans le scenario initial. Les valeurs atteintes pour $\frac{H}{D} = 4$ restent en effet comparables.

Cela suggère que le facteur prédominant dans l'augmentation du volume de matière reste la longueur des barres, et donc leur sensibilité au flambement. Lorsque l'élancement augmente, la stabilité des barres diminue, ce qui requiert un dimensionnement plus robuste, se traduisant par une augmentation du volume de matière nécessaire pour garantir la résistance aux efforts internes critiques. Cette affirmation se vérifie facilement par le fait que la valeur de $\frac{H}{D}$ donnant le meilleur volume reste inchangé ($\frac{H}{D} = 1.25$), indiquant qu'à partir d'un certain élancement, la sensibilité au flambement des barres devient considérable.

6.1.2 Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$

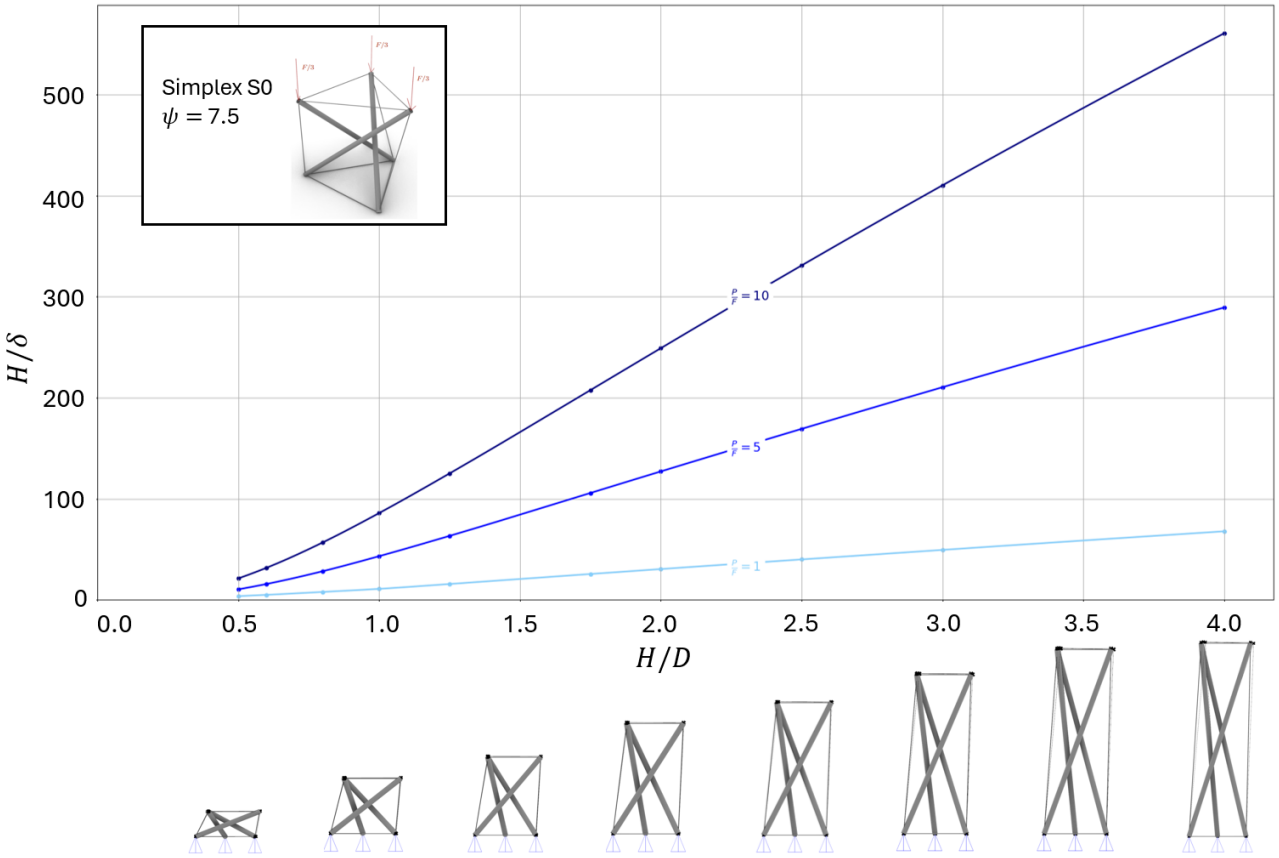


FIGURE 6.3 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, dans un contexte de chargement uniquement vertical.

Contrairement à l'évolution de l'indicateur de volume W dans le contexte d'un chargement purement vertical, celle de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ devrait présenter un comportement assez différent. Dans le cas de chargement combiné étudié précédemment, la courbe de rigidité présentait une forme caractéristique en cloche : la rigidité augmentait dans un premier temps avec l'élancement, puis diminuait au-delà d'un certain seuil, en raison du bras de levier induit par les composantes horizontales des charges, qui amplifiaient les déformations lorsque la hauteur du simplex devenait importante.

Dans le présent scenario, où seule une charge verticale est appliquée, ce phénomène ne se manifeste plus. On s'attend donc à ce que la courbe représentant l'évolution de $\frac{H}{\delta}$ soit strictement croissante, tendant théoriquement vers l'infini à mesure que le rapport $\frac{H}{D}$ augmente. Cette tendance est en effet logique : l'augmentation de ce rapport s'effectuant par une élévation de la hauteur H du simplex, la structure gagne en inertie dans la direction de la charge appliquée, ce qui se traduit mécaniquement par une rigidité accrue.

La Figure 6.3 illustre l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal dans ce contexte, et on constate que la tendance observée confirme ces attentes théoriques. L'augmentation continue de $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'élancement reflète donc bien une amélioration progressive de la rigidité verticale du simplex dans ce cas de chargement uni-axial.

6.1.3 Comparaison entre le simplex en tenségrité $S0$ et son treillis T homologue

À la lumière des résultats précédents sur l'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour le simplex $S0$, il est pertinent d'étendre l'analyse en comparant ces performances à celles du treillis T dans le contexte de chargement exclusivement vertical. L'objectif est de déterminer si les rapports de performance observés précédemment restent valables ou s'ils évoluent dans ce nouveau cadre.

Comme le simplex, le treillis peut présenter un comportement différent sous chargement vertical uni-axial, ce qui justifie une comparaison spécifique. De manière générale, le treillis conserve de meilleures performances que le simplex, tant en volume de matière qu'en rigidité, mais l'écart entre les deux structures se révèle ici plus marqué que dans le cas d'un chargement combiné.

L'analyse des courbes de volume montre que, pour une précontrainte donnée (notamment $\frac{P}{F} = 1$), le treillis nécessite systématiquement moins de matière que le simplex, quel que soit l'élancement considéré. Cela indique que le treillis est particulièrement bien adapté aux charges verticales. Ce résultat met également en évidence l'influence importante des composantes horizontales sur son comportement mécanique.

Contrairement à ce que l'on pourrait supposer, cette optimisation du volume ne se fait pas au détriment de la rigidité. Dans le cas d'un flambement faible ($\psi = 7.5$), il avait été observé que le treillis possédait une rigidité supérieure à celle du simplex, mais dans des ordres de grandeur comparables. Or, la Figure 6.5 montre qu'ici, l'écart devient considérable : pour une précontrainte $\frac{P}{F} = 10$, la rigidité du treillis est environ 20 fois plus élevée que celle du simplex, contre un facteur de 2 à 3 dans le cas d'un chargement bi-axial.

Tandis que les composantes horizontales de force ne modifiaient que modérément l'indicateur de volume du simplex, elles avaient un impact beaucoup plus prononcé sur sa rigidité. En ce qui concerne le treillis, leur absence ne se limite pas à modifier son comportement : elle l'améliore de manière notable, tant en termes de rigidité que d'efficacité matérielle. Ce phénomène ne s'observe pas dans le cas du simplex, dont les performances restent relativement stables, qu'une composante horizontale soit présente ou non.

Cette divergence de comportement structural suggère que, dans le simplex, les efforts horizontaux sont principalement repris par les câbles tendus, limitant ainsi leur impact sur la barre la plus comprimée. À l'inverse, dans le treillis, ces efforts sont partiellement transmis à la barre comprimée principale, ce qui entraîne une hausse des sollicitations internes, et par conséquent un besoin accru en matière pour garantir la stabilité. L'augmentation de la rigidité du treillis, quant à elle, suggère un meilleur comportement mécanique de celui-ci face aux efforts verticaux tandis que le simplex possède des caractéristiques quasi similaires avec ou sans composantes horizontales montrant donc un comportement mécanique anisotrope lorsqu'une composante horizontale est considérée ou non.

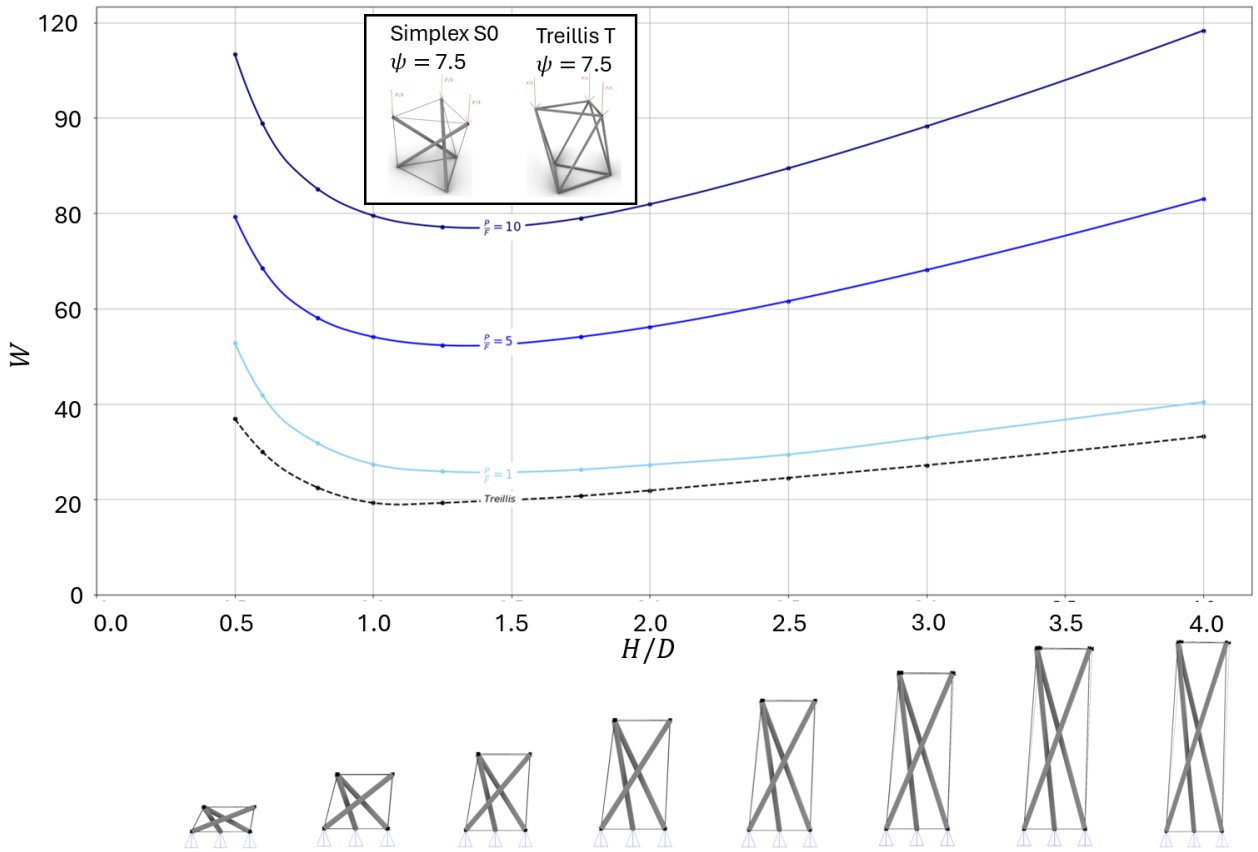


FIGURE 6.4 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement vertical.

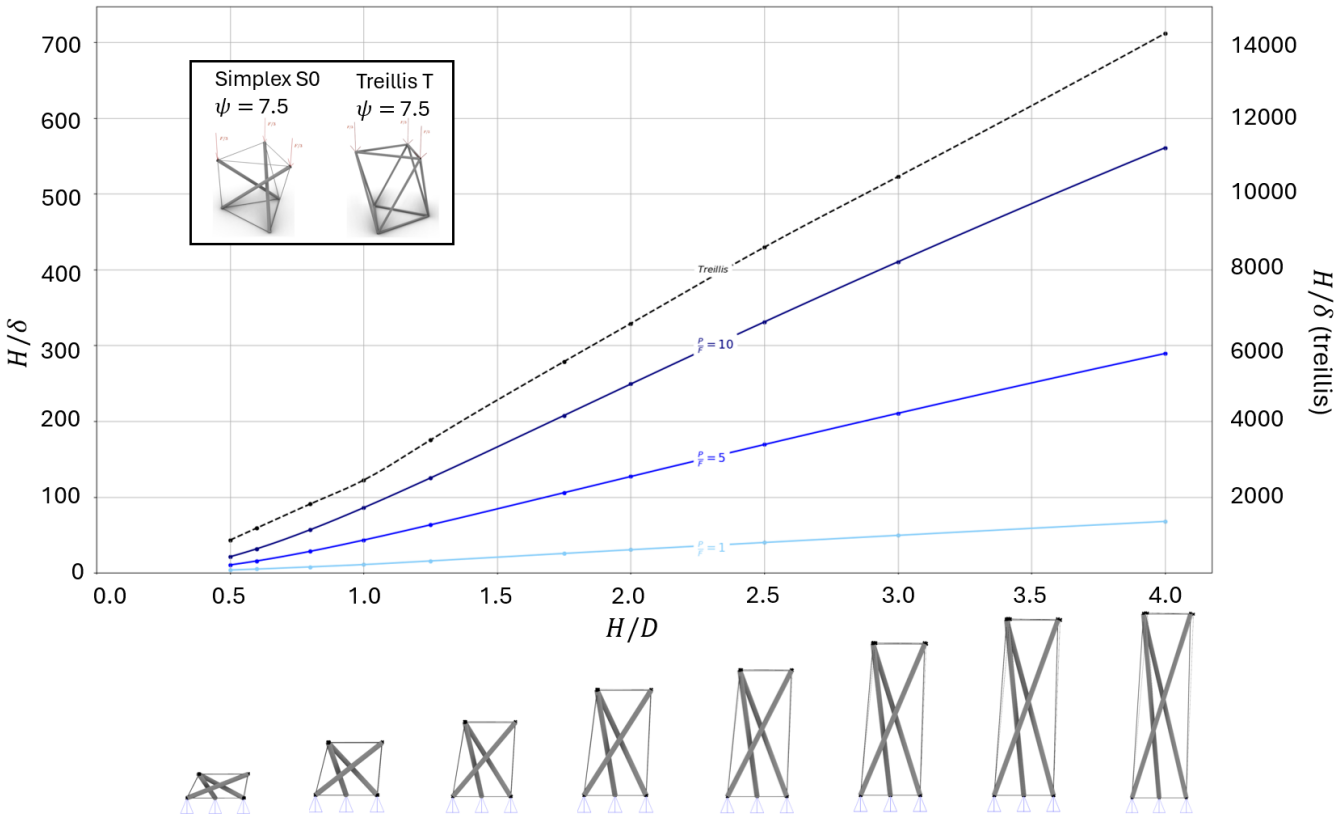


FIGURE 6.5 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement vertical.

6.2 Scenario de chargement avec des composantes uniquement horizontales

Il convient à présent d'aborder le dernier scenario de chargement, dans lequel la structure est soumise exclusivement à des forces horizontales. Comme pour le cas présenté en Section 6.1, les hypothèses de modélisation restent identiques à celles du cas d'étude initial, dont les valeurs numériques sont détaillées en Annexe B. La Figure 6.6 illustre ce nouveau cas de charge, caractérisé par l'application de composantes horizontales sur les trois nœuds supérieurs du simplex.

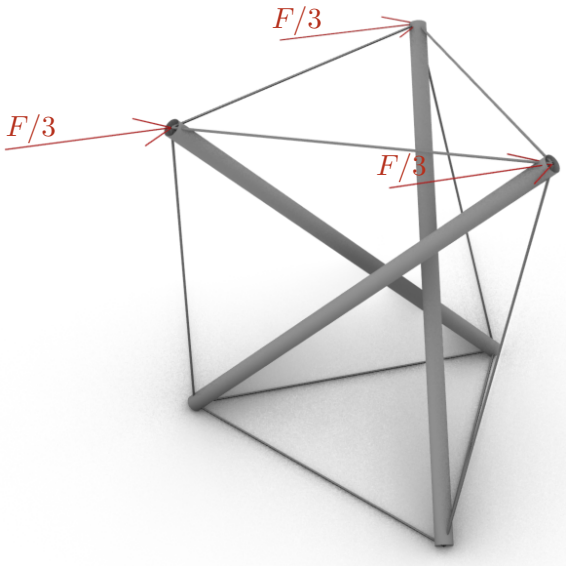


FIGURE 6.6 – Illustration du scenario de chargement avec des composantes uniquement horizontales.

6.2.1 Évolution de l'indicateur de volume W

Comme dans les scenarii de chargement précédents, on s'attend à observer une évolution de l'indicateur de volume W présentant un minimum pour une valeur intermédiaire de $\frac{H}{D}$, et une augmentation du volume pour des élancements faibles ou élevés. C'est en effet ce qui peut être observé mais on constate toutefois, dans ce cas de chargement exclusivement horizontal, un phénomène distinct.

On remarque que l'augmentation du volume pour des élancements élevés varie sensiblement selon l'état de précontrainte $\frac{P}{F}$ appliqué. Lorsque la précontrainte est faible, l'indicateur de volume augmente fortement aux grands élancements. À l'inverse, pour des niveaux de précontrainte plus élevés, cette augmentation est nettement moins marquée.

Ce comportement s'explique par l'effet des charges horizontales appliquées aux nœuds supérieurs du simplex. Plus l'élancement est important, plus le bras de levier associé à ces forces croît, générant ainsi des efforts internes considérables. Au delà des efforts internes supplémentaires que ce bras de levier engendre, de plus grands déplacements de la structure sont associés, générant à leur tour des efforts parasitaires dans la structure. C'est pourquoi, dans les configurations faiblement précontraintes, et donc moins rigides, ces charges horizontales induisent des efforts et déformations importants, nécessitant davantage de matière pour assurer la stabilité. En revanche, une précontrainte plus élevée accroît la rigidité de la structure, limitant les déformations et, par conséquent, les efforts parasitaires induits par ces déformations, ce qui explique cette augmentation moins abrupte de l'indicateur de volume pour des élancements élevés.

Les déformations induites par le bras de levier des charges horizontales a été brièvement introduit ici étant donné que ces déformations induisent des efforts internes ayant un impact direct sur l'indicateur de volume. La section suivante abordera plus en détail les effets de ce scenario de chargement sur la rigidité de la structure.

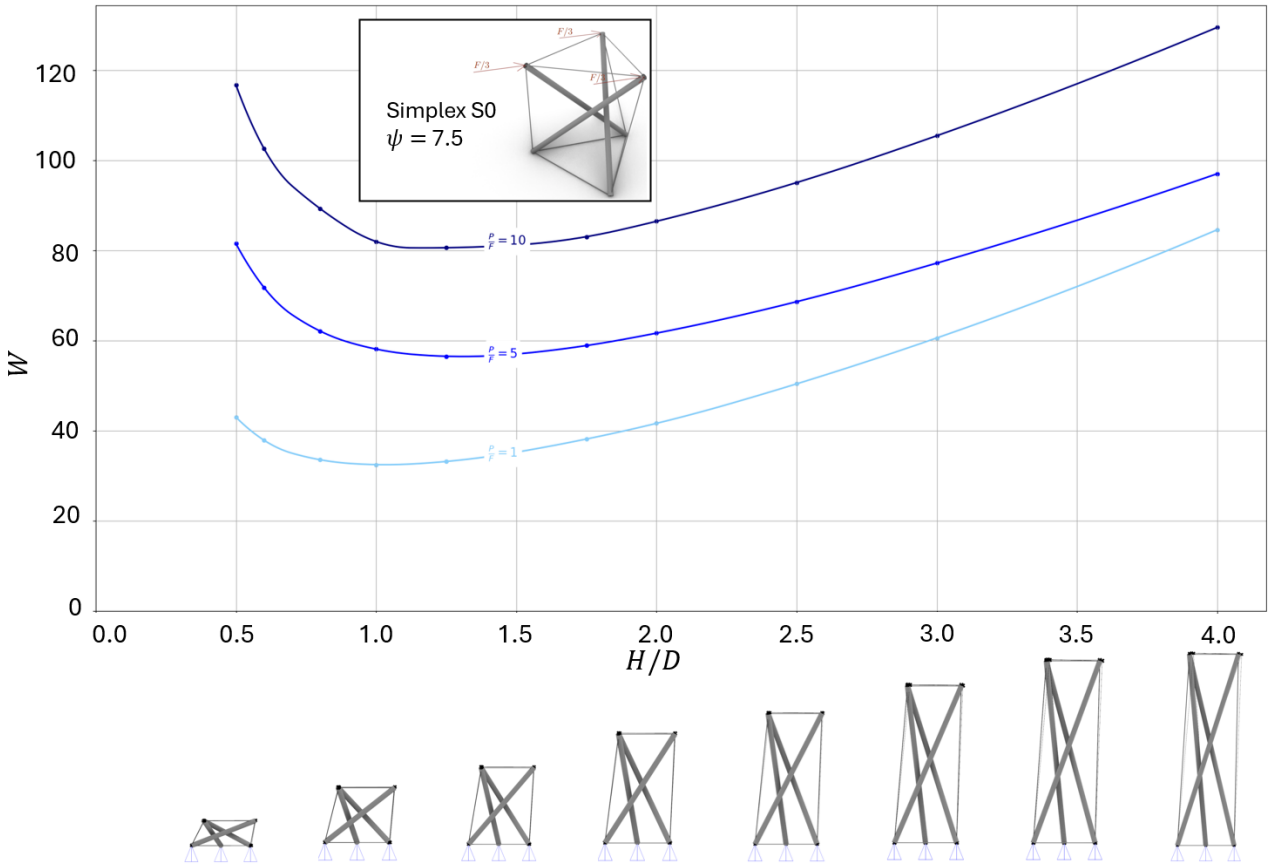


FIGURE 6.7 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, sous chargement uniquement horizontal.

6.2.2 Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$

Comme évoqué précédemment, les efforts horizontaux ont un impact significatif sur le comportement des structures à grand élancement, tant en termes de volume que de rigidité. La courbe d'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ présente une forme en cloche, similaire à celle observée dans le cas d'un chargement bi-axial, mais révèle ici une perte de rigidité plus marquée pour les configurations à élancement élevé.

On observe d'abord une augmentation de la rigidité avec l'élancement : bien que le bras de levier induit par les charges horizontales s'allonge, la largeur du simplex permet initialement de contrebalancer cet effet, conférant à la structure une rigidité croissante. Toutefois, au-delà d'un certain seuil, cette largeur devient insuffisante pour compenser les efforts horizontaux, entraînant une diminution significative de la rigidité lorsque le rapport $\frac{H}{D}$ augmente.

Dans le cas du chargement bi-axial, la rigidité maximale était atteinte pour un rapport $\frac{H}{D} = 2.5$, ce qui correspond déjà à un élancement notable. En revanche, dans le présent scenario uni-axial horizontal, ce maximum est atteint plus tôt, pour $\frac{H}{D} = 1.25$. Dès que la hauteur du simplex dépasse sa largeur, la rigidité diminue rapidement, menant à des configurations structuralement moins performantes.

Ainsi, l'influence du bras de levier lié aux charges horizontales se manifeste pleinement : qu'il s'agisse du volume de matière requis ou de la rigidité nodale, les performances du simplex se dégradent nettement pour des élancements importants dans ce contexte de chargement.

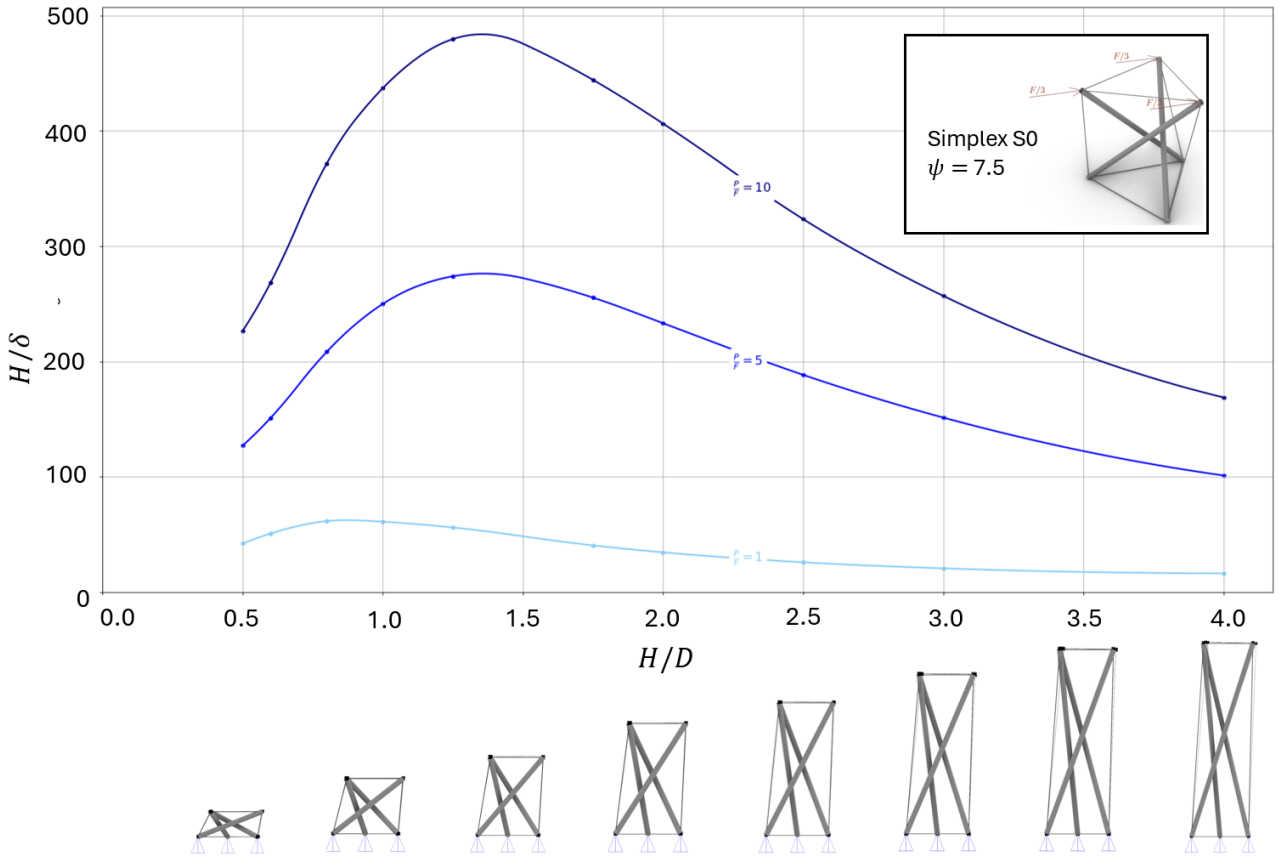


FIGURE 6.8 – Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, dans un contexte de chargement uniquement horizontal.

6.2.3 Comparaison entre le simplex en tenségrité $S0$ et son treillis T homologue

Dans le cas d'un contexte de chargement uniquement horizontal, les graphes obtenus, ainsi que la comparaison avec le treillis T sont assez proches des résultats obtenus dans le cas bi-axial. La courbe du treillis suit de manière assez fidèle la courbe illustrée à la Figure 4.18, avec néanmoins quelques petites différences.

Comme analysé dans la Section 4.3.3, pour des élancements faibles, le treillis présente généralement un volume inférieur à celui du simplex, sauf lorsque l'état de précontrainte est faible ($\frac{P}{F} = 1$). Cela contraste avec le scenario bi-axial, où le treillis restait plus léger que le simplex pour tous les niveaux de précontrainte.

Pour des élancements élevés, le volume du treillis croît plus fortement que celui du simplex, au point de devenir plus volumineux que le simplex, lorsque l'état de précontrainte est inférieur ou égale à 5. Cette observation est la même que celle observée dans le cas bi-axial, à la seule différence que dans ce cas-ci, l'augmentation de volume pour des élancements élevés est plus marquée pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cadre de l'analyse des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ réalisées dans les deux sections précédentes.

Concernant la comparaison des indicateurs de déplacement nodal, on constate que la rigidité du treillis est à nouveau dans un ordre de grandeur similaire au simplex, tout en restant globalement supérieur. De plus, on constate que dans le cas du treillis, la valeur de $\frac{H}{D}$ donnant la meilleure rigidité a également diminué par rapport au cas bi-axial et vaut ici 1.75. Cela signifie que la largeur du treillis permet d'atteindre des élancements presque deux fois plus grands avant d'observer une diminution de rigidité due au bras de levier des efforts horizontaux.

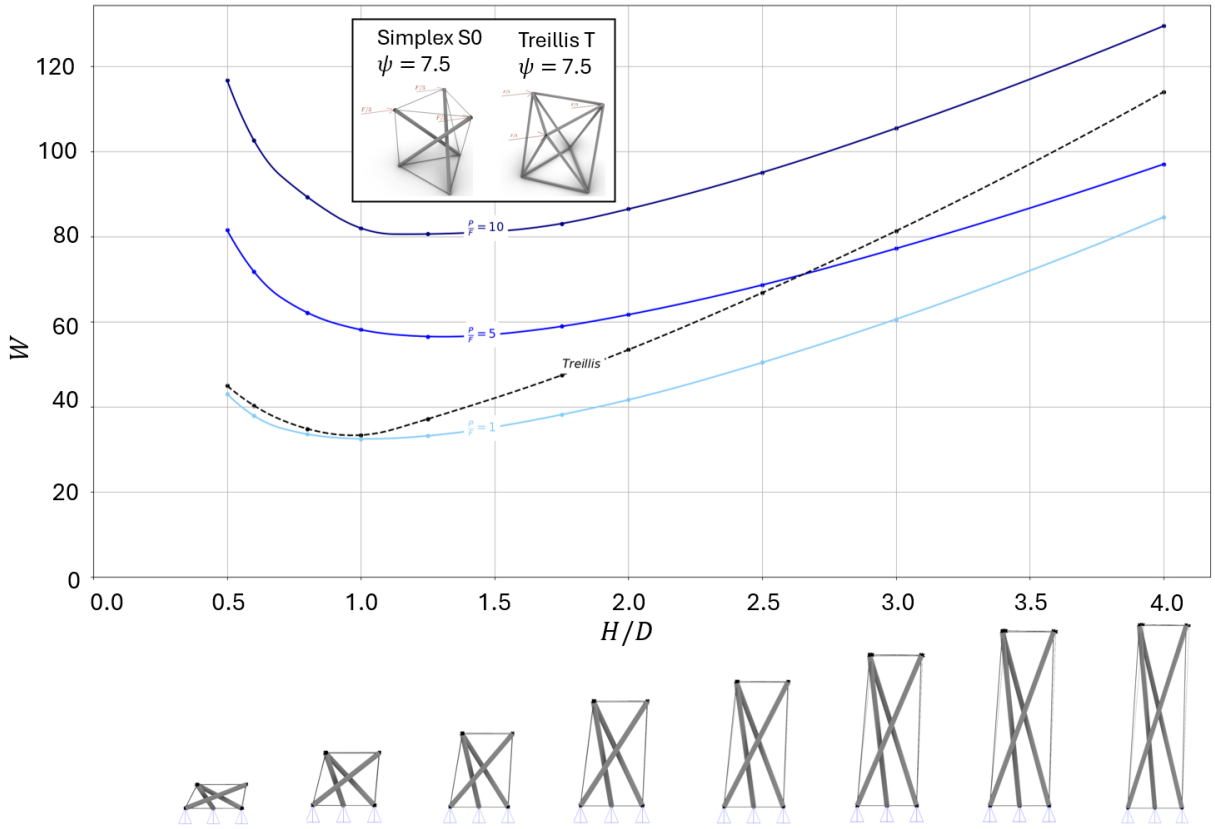


FIGURE 6.9 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement horizontal.

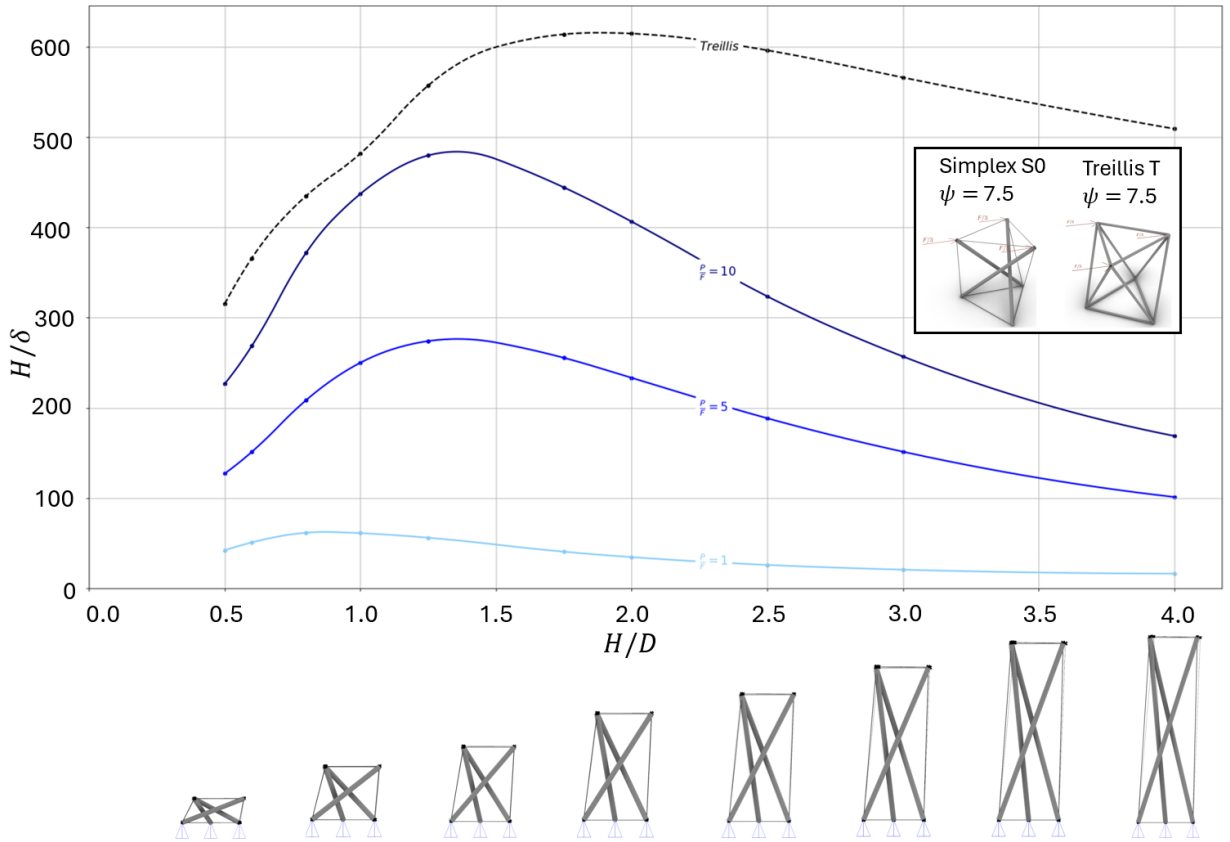


FIGURE 6.10 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement horizontal.

6.3 Analyse et comparaison des trois scenarii de chargement

L'analyse des différents scenarii de chargement a permis d'acquérir une compréhension globale du comportement structural du simplex $S0$ et du treillis T, ainsi que de l'évolution de leurs indicateurs de performance, à savoir le volume de matière W et le déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, en fonction de l'élancement géométrique et du niveau de précontrainte appliqué.

Des similarités notables ont été identifiées entre les trois cas de charge, en particulier concernant l'indicateur de volume W, dont l'évolution suit une tendance comparable quel que soit le contexte. Il a été constaté que les configurations présentant un élancement extrême, soit très faible, soit très élevé, entraînent une augmentation du volume requis. Cela indique l'existence d'une valeur intermédiaire du rapport $\frac{H}{D}$ pour laquelle le volume est minimisé. Cette valeur optimale demeure constante indépendamment de l'orientation des forces appliquées.

Néanmoins, certaines différences significatives émergent selon les conditions de chargement, notamment pour les configurations à fort élancement. Bien que l'augmentation de W après le point optimal soit systématique, son intensité varie selon le scenario envisagé. Le cas de chargement purement horizontal engendre une hausse plus marquée du volume, attribuable à l'effet de bras de levier induit par les forces latérales, générant des efforts internes et des déplacements importants. À l'inverse, lorsque la sollicitation est uniquement verticale, cette augmentation est atténuée, la direction de la charge coïncidant avec celle de l'élancement. Le scenario initial, combinant des composantes verticales et horizontales, présente une évolution intermédiaire, illustrant de manière cohérente l'influence conjointe des deux types de sollicitations uni-axiales.

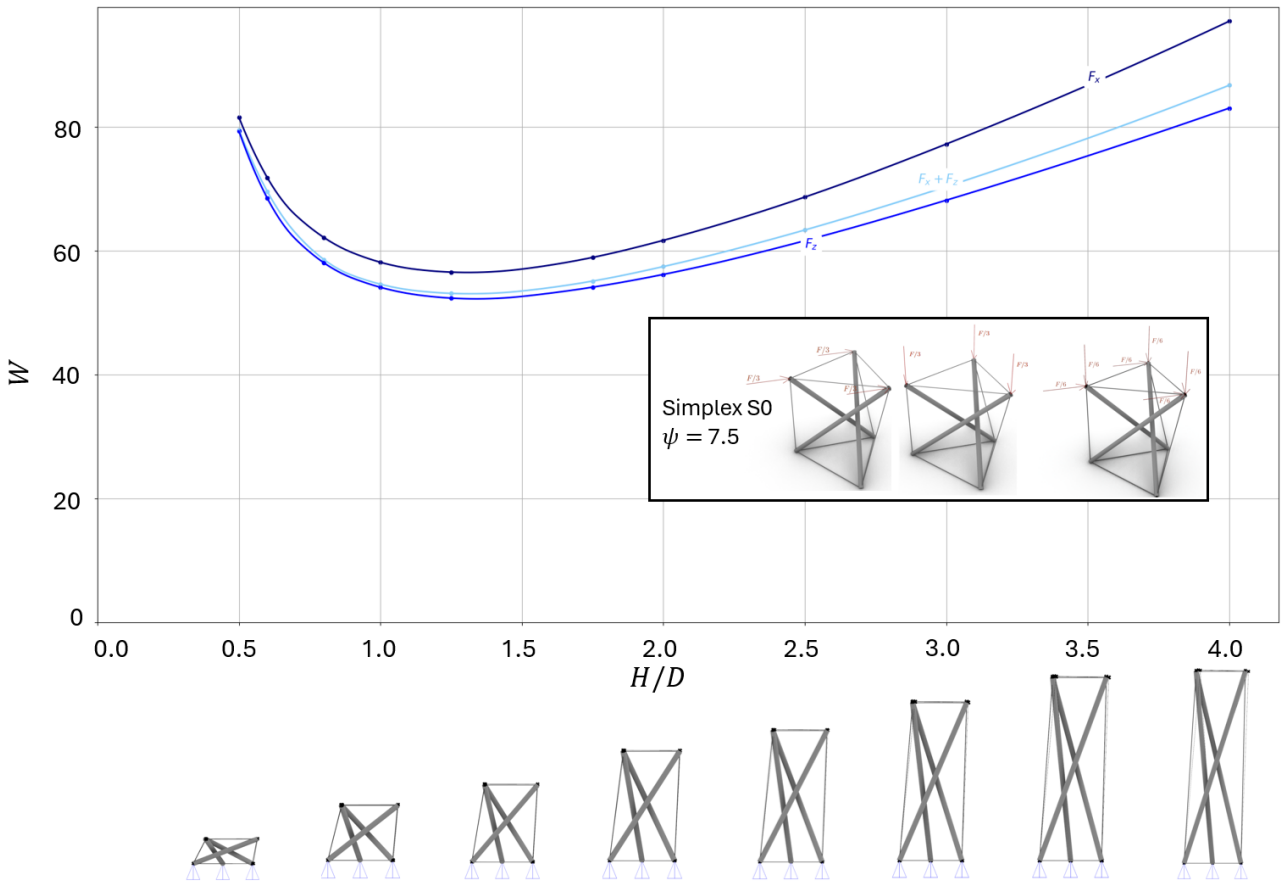


FIGURE 6.11 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour un état de précontrainte donné et pour les différents contextes de chargement étudiés.

L'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ constitue un point central de cette analyse, car elle met en évidence les contrastes de comportement du simplex selon les différents contextes de chargement. Contrairement à l'indicateur de volume W, dont la tendance générale reste similaire quel que soit le scenario, la rigidité structurale du simplex varie de manière significative d'un cas de charge à l'autre, entraînant ainsi des courbes d'évolution de $\frac{H}{\delta}$ distinctes.

Dans le cas d'un chargement exclusivement vertical, l'indicateur de rigidité présente une croissance linéaire continue, traduisant une faible rigidité pour les faibles élancements et suggérant un maximum théorique de rigidité lorsque le rapport $\frac{H}{D}$ tend vers l'infini. À l'opposé, sous l'effet de charges uniquement horizontales, la structure se montre rigide pour des géométries aplaties, mais voit sa performance chuter lorsque la hauteur du simplex devient prédominante par rapport à sa base, en raison de l'augmentation du bras de levier associé aux forces latérales.

Enfin, dans le scenario bi-axial, combinant des composantes verticales et horizontales appliquées aux nœuds supérieurs, le comportement observé s'inscrit de manière cohérente entre les deux cas précédents. La composante verticale induit une rigidité initialement faible qui s'accroît avec l'élancement, tandis que la composante horizontale engendre une augmentation quadratique de rigidité jusqu'à un seuil optimal, au-delà duquel elle décline en raison des effets mécaniques défavorables liés à l'allongement du bras de levier, mais de manière modérée sous l'effet de la composante verticale. Cette superposition des influences conduit à une évolution de $\frac{H}{\delta}$ qui reflète fidèlement l'interaction entre les deux types de sollicitations uni-axiales formant ainsi le cas bi-axial considéré jusqu'à présent dans cette étude et considéré comme le scenario de chargement le plus pertinent.

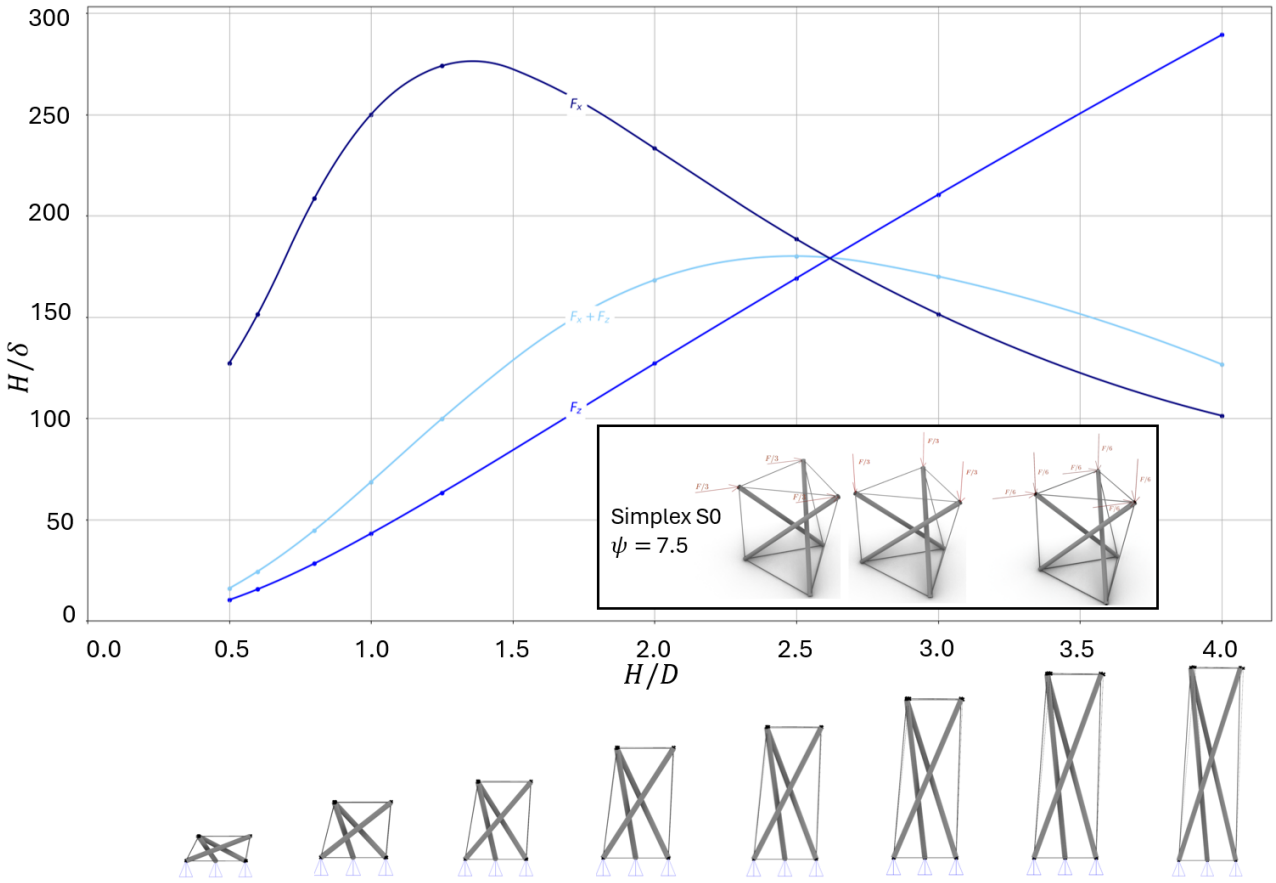


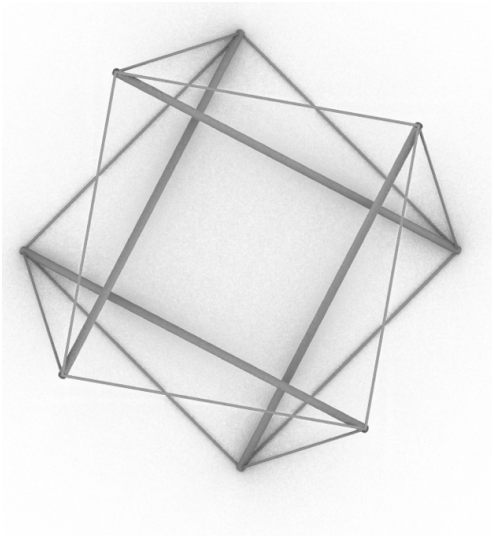
FIGURE 6.12 – Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour un état de précontrainte donné et pour les différents contextes de chargement étudiés.

6.4 Analyse des différents modèles prismatiques de structures en tenségrité autre que le simplex classique

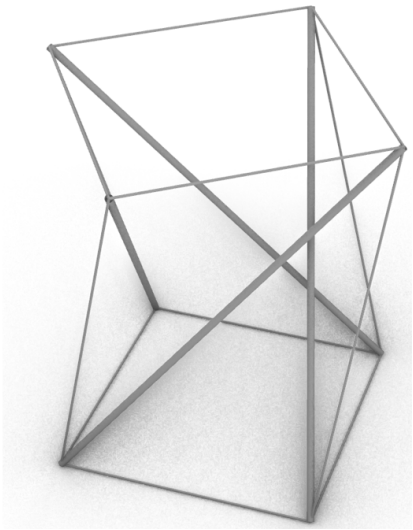
Cette dernière section a pour vocation d'examiner les différents modèles prismatiques existants susceptibles de constituer une alternative au simplex. Bien que ce dernier représente la configuration en tenségrité la plus élémentaire et la plus répandue, il demeure envisageable de concevoir d'autres modèles prismatiques pouvant, à l'instar du simplex, être employés comme modules de base pour la conception de structures en tenségrité plus élaborées et ambitieuses, telles que des passerelles, des tours, ou d'autres ouvrages d'envergure.

L'étude de ces modules alternatifs présente un intérêt certain, dans la mesure où ils pourraient, par rapport au simplex, offrir des performances supérieures, voire rivaliser avec les structures treillis correspondantes, ou du moins se rapprocher davantage de leurs propriétés que ne le permet le simplex. En effet, il est concevable que le simplex traditionnel, bien que d'une conception simple, ne constitue pas nécessairement le module prismatique en tenségrité le plus performant, que ce soit en termes de volume ou de rigidité structurale.

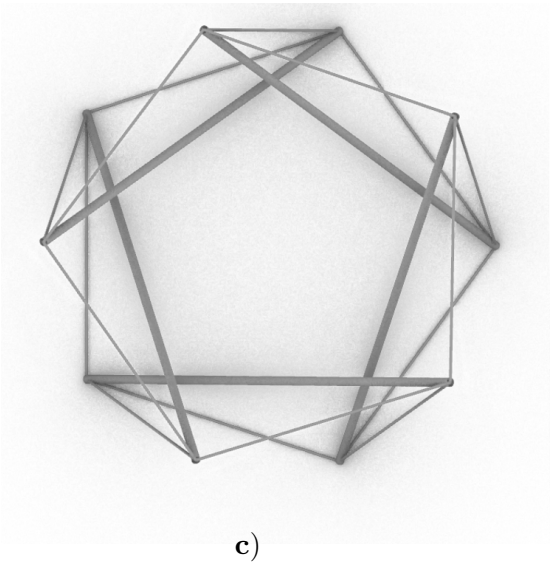
Dans cette optique, il est pertinent d'examiner ces différentes configurations prismatiques et de confronter leurs caractéristiques à celles du simplex ainsi qu'à celles de leurs homologues en treillis. Les modèles étudiés dans cette section seront le quadruplex, le pentaplex et l'hexaplex, constitués respectivement de bases à quatre, cinq et six côtés.



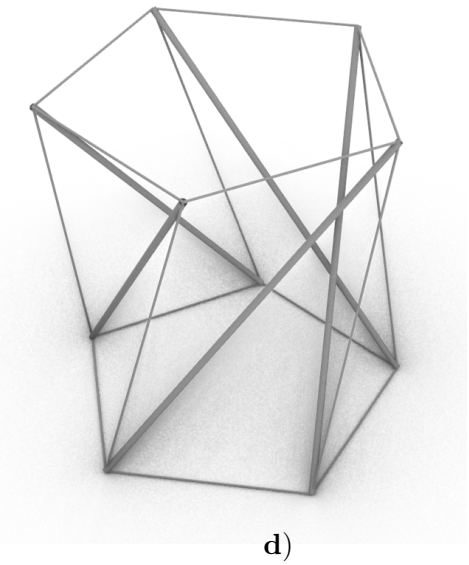
a)



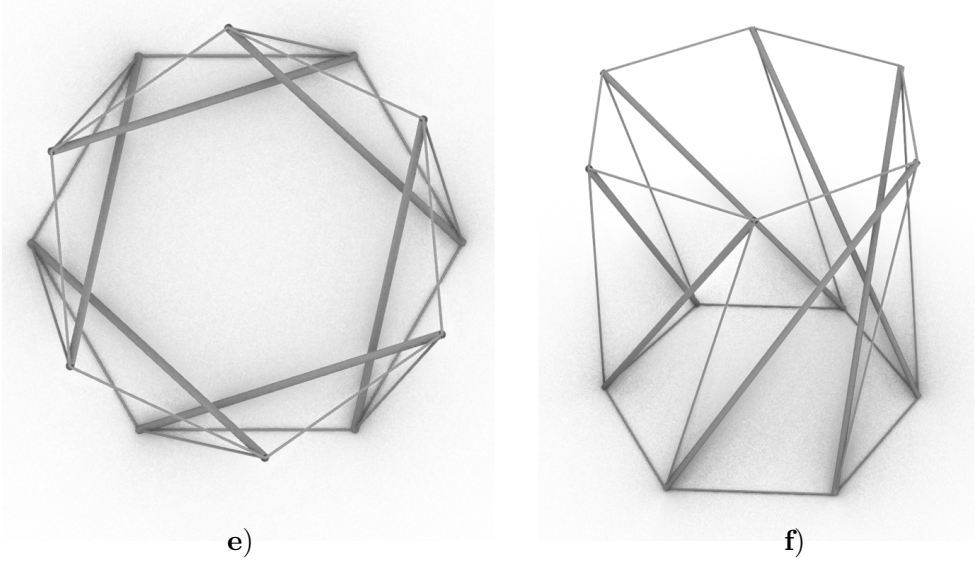
b)



c)



d)



e) **f**)

FIGURE 6.13 – Géométrie d'un quadruplex (a et b), d'un pentaplex (c et d) et d'un hexaplex (e et f) modélisés sur le logiciel *Grasshopper*.

L'objectif poursuivi dans cette section est double. Premièrement, il s'agit de comparer entre eux les différents modèles en tenségrité afin de déterminer celui présentant les performances structurales les plus élevées. Deuxièmement, le modèle identifié comme étant le plus optimal sera confronté à son homologue en treillis, dans le but de réaliser une analyse comparable à celle effectuée pour le simplex. Cette démarche vise à évaluer si le module prismatique en tenségrité le plus performant est en mesure de rivaliser avec sa version en treillis, et ce, en tenant compte du fait que, pour le simplex classique, une telle compétitivité n'a pas été observée dans la grande majorité des cas étudiés.

6.4.1 Pertinence de l'étude des autres modèles prismatiques en tenségrité

Dans ce chapitre, l'analyse portera sur les mêmes modules prismatiques que ceux étudiés par **Lindy Boucher** dans son mémoire intitulé "Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques" [27]. Au regard de ses travaux, il est légitime de s'interroger sur la pertinence de la présente étude. En effet, **Lindy Boucher** aboutit à la conclusion suivante :

— Le simplex était le module en tenségrité optimal, présentant le volume le plus faible tout en respectant les critères de rigidités établis.

— L'hexaplex relevait d'une certaine efficacité lorsque la sensibilité au flambement considérée était faible (valeur de ψ faible).

— Le quadruplex et le pentaplex ne sont pas si pertinent au vue de la quantité de matière nécessaire à leur mise en oeuvre.

Bien que l'étude détaillée réalisée par **Lindy Boucher** relève également du principe d'optimisation des structures en tenségrité et de la comparaison de leurs indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, les conclusions précédemment exposées ne peuvent être directement appliquées à l'analyse menée dans cette section. En effet, les résultats obtenus par **Lindy Boucher** concernent l'optimisation de modules prismatiques en tenségrité dans la perspective de concevoir une passerelle. Cette optimisation s'inscrivait dans un cadre strict, défini par des contraintes de flèche conformes aux normes couramment appliquées pour ce type d'ouvrage. Dans ce contexte, il est tout à fait cohérent que, pour une rigidité donnée, le simplex ait été identifié comme le module prismatique le plus léger.

À l'inverse, l'étude présentée dans ce chapitre (et dans ce mémoire de manière générale) s'attache à optimiser le volume des structures indépendamment de leur rigidité, puis à déterminer lesquelles

présentent, pour un volume optimal, les meilleures performances structurales. L'objectif est donc de comparer les formes optimisées de ces modules prismatiques, d'identifier celui offrant le poids le plus réduit et de mettre ces résultats en perspective à travers une analyse parallèle de leur rigidité. L'approche adoptée étant sensiblement différente, l'examen de ces modèles prismatiques alternatifs en tenségrité se justifie pleinement.

6.4.2 Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre les différents modules prismatiques en tenségrité

Pour comparer les performances mécaniques des différents modèles, il est nécessaire de recourir à la méthode d'optimisation manuelle, identique à celle décrite dans la Section 4.3.1. Le choix de cette approche permet d'optimiser chacun de ces modules pour divers niveaux de précontrainte et, ainsi, d'analyser si l'évolution des performances varie en fonction de la quantité de précontrainte appliquée à la structure. La procédure suivie est rigoureusement la même que celle employée pour le simplex ; toutefois, un paramètre spécifique doit être ajusté pour chaque modèle, celui-ci influençant fortement les résultats obtenus en termes d'indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$.

Ce paramètre correspond à l'angle α formé entre les deux bases du module en tenségrité. Dans le cas du simplex, cette valeur est fixée à 30°, mais elle ne s'applique pas nécessairement aux configurations du quadruplex, du pentaplex et de l'hexaplex.

Les travaux de **Lindy Boucher** ont permis de déterminer l'angle pour lequel un module en tenségrité se trouve en état d'autocontrainte, c'est-à-dire à l'équilibre avant toute application de précontrainte ou de charges externes. La formule suivante permet de calculer précisément l'angle optimal pour chacun des modèles [27] :

$$\alpha = 90 - \frac{180}{n_b} \tag{26}$$

Avec n_b le nombre de côté de la base du module (3 pour le simplex, 4 pour le quadruplex, ...). On obtient donc bien, grâce à cette formule un angle de 30° lorsque le module en tenségrité est composé de bases à trois côtés, correspondant au cas du simplex. Le tableau suivant reprend les valeurs de α pour les différents modèles étudiés.

Modèle prismatique en tenségrité	α [°]
Simplex	30
Quadruplex	45
Pentaplex	54
Hexaplex	60

TABLE 15 – Angle optimal d'autocontrainte pour les différents modules en tenségrité.

Une fois l'angle α déterminé pour chacun des modèles, l'application de la méthode d'optimisation manuelle permet d'obtenir les courbes représentant l'évolution des indicateurs de volume W (Figure 6.14) et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ (Figure 6.15) pour chaque configuration prismatique étudiée.

De manière attendue, on constate que l'indicateur de volume W augmente avec le nombre de côtés constituant la base de la structure. Cette croissance, de nature linéaire, se révèle sensiblement similaire pour l'ensemble des états de précontrainte considérés. Cette tendance s'explique aisément par le fait qu'une base comportant davantage de côtés nécessite un plus grand nombre de barres et de câbles, ce qui impacte directement la valeur de W. En effet, à chaque ajout d'une face, la structure s'enrichit d'une barre et de trois câbles supplémentaires, entraînant mécaniquement une augmentation de l'indicateur de volume.

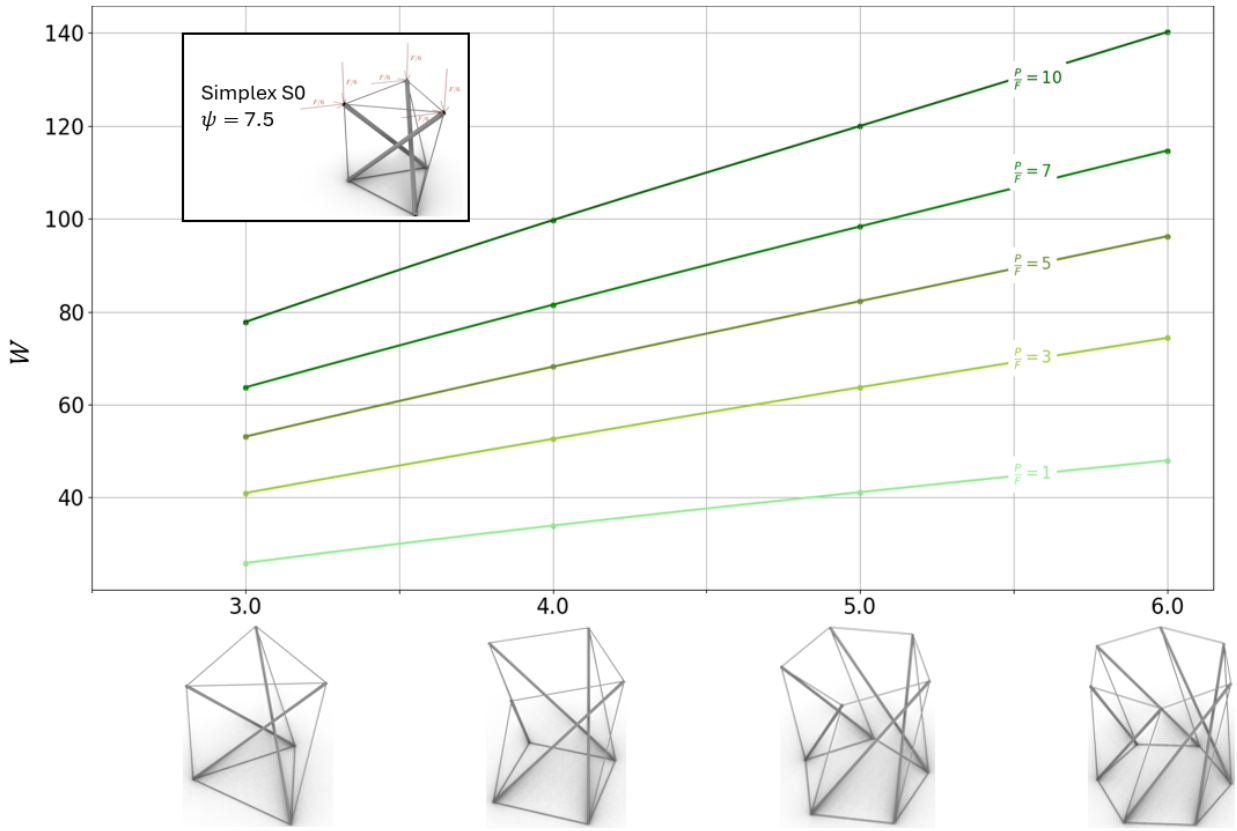


FIGURE 6.14 – Évolution de l'indicateur de volume W pour les différents modules prismatiques en tenségrité étudiés ($\psi = 7.5$).

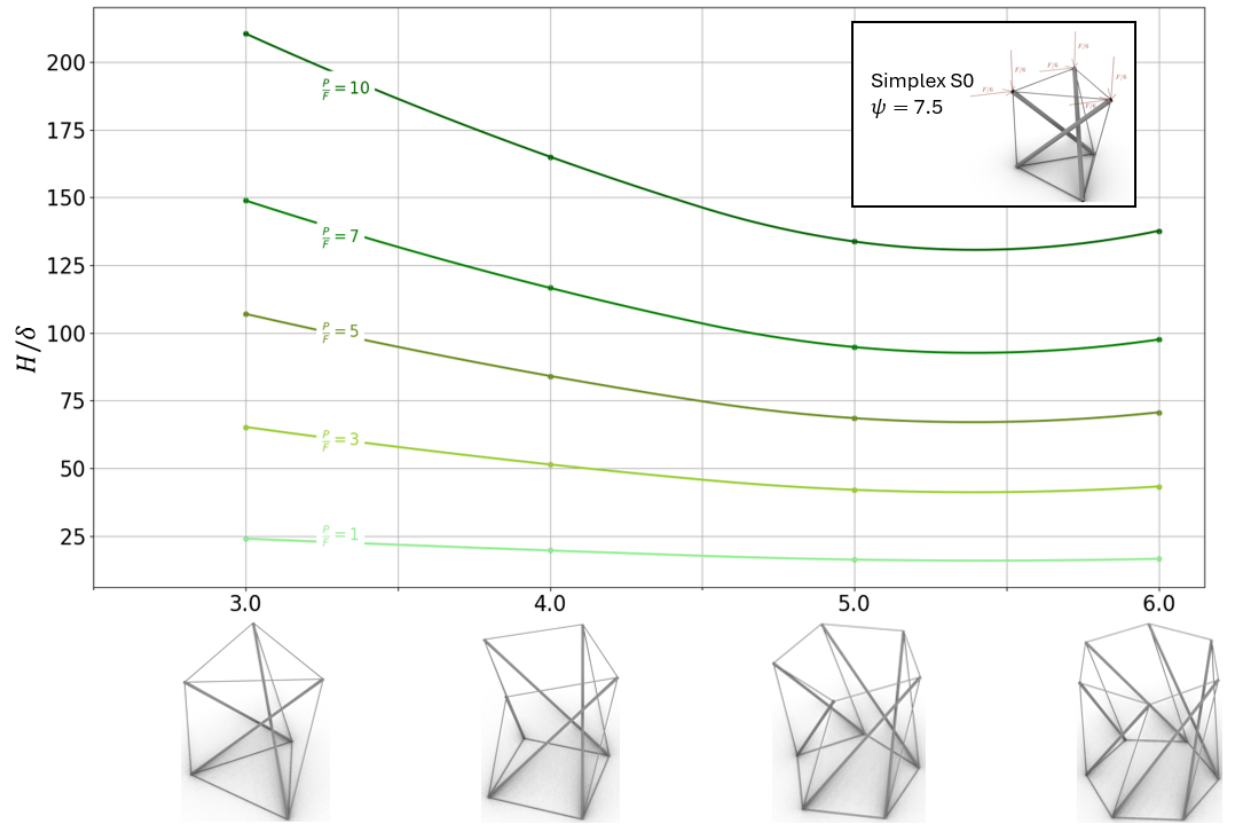


FIGURE 6.15 – Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour les différents modules prismatiques en tenségrité étudiés ($\psi = 7.5$).

En ce qui concerne l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$, les résultats obtenus s'avèrent contre-intuitifs. En effet, on pourrait logiquement s'attendre à ce qu'une augmentation de matière d'un modèle à l'autre entraîne une rigidité structurale plus élevée, se traduisant par une croissance de $\frac{H}{\delta}$. Or, les observations montrent que le simplex est le modèle prismatique le plus rigide parmi ceux étudiés, et qu'il faut attendre les configurations à six côtés ou plus pour constater une remontée de la rigidité.

Cette évolution s'explique par le fait que l'ajout de barres et de câbles améliore la distribution des efforts dans la structure. Cette meilleure répartition permet de réduire le diamètre des barres, tout en conservant les performances nécessaires. Même si cette diminution n'est pas suffisante pour réduire le volume global, elle l'est toutefois assez pour diminuer la rigidité de l'ouvrage. Étant donné que l'optimisation a été menée dans l'objectif d'obtenir le meilleur volume possible, sans critère spécifique de rigidité, les modules comportant plus de trois côtés et bénéficiant d'une répartition des efforts plus homogène, tolèrent des diamètres d'éléments plus faibles, ce qui se traduit par une rigidité inférieure. Ce n'est qu'à partir du modèle hexaplex que la rigidité recommence à augmenter, car le nombre total de barres et de câbles devient suffisant pour compenser la réduction des diamètres et conférer une rigidité intrinsèque supérieure à celle du quadruplex et du pentaplex.

Ces observations sont cohérentes avec les résultats obtenus par **Lindy Boucher** dans son mémoire, où il conclut que le simplex est le modèle le plus optimal en termes de volume pour une rigidité donnée. Dans le cadre présent, sans prise en compte explicite d'un critère de rigidité, on constate également que le simplex reste le plus performant quant à la quantité de matière utilisée. Par ailleurs, le faible nombre d'éléments du simplex entraîne des efforts internes de traction et de compression plus élevés, nécessitant donc des diamètres supérieurs, ce qui, en retour, améliore sa rigidité par rapport aux autres modules. Ces derniers, bien que plus lourds, tolèrent des diamètres plus faibles et présentent donc une rigidité moindre.

Le tableau suivant présente les valeurs des diamètres des barres D_s, illustrant l'impact de l'augmentation du nombre d'éléments sur la répartition des efforts internes, ainsi que sur la réduction des efforts dimensionnants en traction et en compression.

Modèle prismatique en tenségrité	$\frac{P}{F} = 1$	$\frac{P}{F} = 3$	$\frac{P}{F} = 5$	$\frac{P}{F} = 7$	$\frac{P}{F} = 10$
Simplex	40.4	49.6	55.6	60.1	65.4
Quadruplex	40.4	49.2	55.1	59.5	64.8
Pentaplex	40.1	48.8	54.6	59.0	64.2
Hexaplex	39.8	48.5	54.3	58.6	63.8

TABLE 16 – Evolution du diamètre D_s des barres selon le modèle prismatique en tenségrité considéré, pour plusieurs états de précontrainte.

En définitive, cette analyse confirme la pertinence d'avoir centré l'étude sur le simplex plutôt que sur les autres modules prismatiques en tenségrité existants. En effet, au-delà de présenter le volume le plus faible, faisant de lui le modèle le plus optimal sous cet aspect, le simplex se distingue également par une rigidité intrinsèque supérieure à celle du quadruplex, du pentaplex et de l'hexaplex. Il apparaît ainsi comme le module élémentaire en tenségrité le plus performant sur le plan structural.

6.4.3 Évolution des caractéristiques des treillis homologues aux différents modules prismatiques en tenségrité

La section précédente a permis d'identifier le module en tenségrité le plus performant. Toutefois, si les performances diffèrent selon le modèle considéré, il est tout à fait possible qu'elles varient également lorsque l'on compare leurs homologues en treillis. Il devient donc pertinent d'analyser l'évolution des performances de ces différents treillis afin d'obtenir une vision globale du module en tenségrité le plus performant, par rapport aux autres modules, mais aussi vis-à-vis de son équivalent en treillis.

En effet, bien que certains modèles en tenségrité soient moins performants que d'autres, il n'est pas exclu que leurs homologues en treillis présentent une diminution de performances plus marquée. Une telle situation pourrait rapprocher les caractéristiques mécaniques des modules en tenségrité de celles de leurs homologues en treillis, au point de leur permettre de rivaliser avec ces derniers.

Malheureusement, les recherches effectuées n'ont pas permis d'identifier de configurations pertinentes en treillis homologues aux modèles pentaplex et hexaplex. En revanche, l'homologue treillis du quadruplex a pu être obtenu. Ainsi, seule une comparaison entre le quadruplex et son homologue treillis est envisageable, ce qui reste toutefois suffisant pour mettre en évidence la supériorité du simplex.

Grâce à la méthode d'optimisation manuelle, il a été possible de déterminer les caractéristiques du treillis homologue au quadruplex. Les valeurs correspondantes, ainsi que celles du quadruplex lui-même, pour différents états de précontrainte, sont présentées dans le Tableau 17.

Modèle		W	$\frac{H}{\delta}$
Quadruplex	$\frac{P}{F} = 1$	33.96	19.6
	$\frac{P}{F} = 3$	52.6	51.4
	$\frac{P}{F} = 5$	68.1	84.1
	$\frac{P}{F} = 7$	81.5	116.6
	$\frac{P}{F} = 10$	99.7	165.05
Treillis		70.03	2354

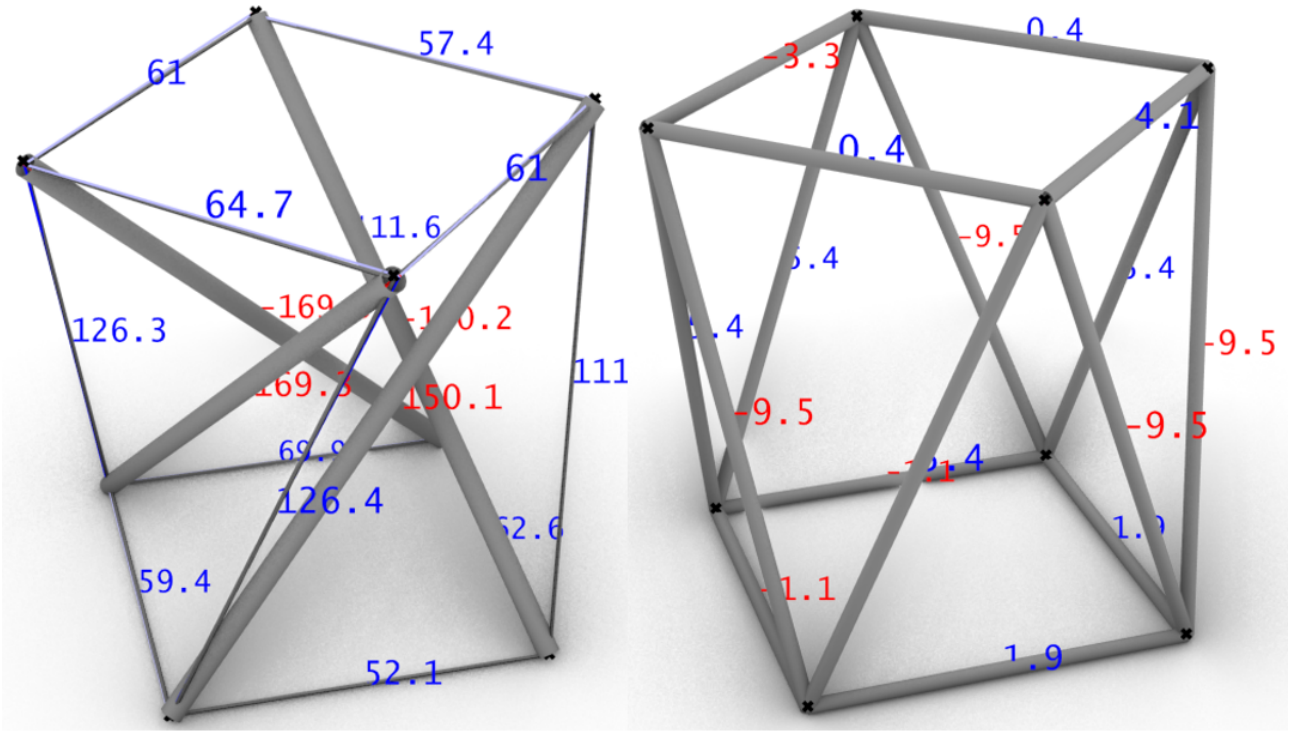
TABLE 17 – Indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour le quadriplex sous différents états de précontrainte, et pour son homologue treillis.

On constate que le volume optimal du treillis est proche de celui du quadruplex lorsque l'état de précontrainte est fixé à $\frac{P}{F} = 5$. Pour une comparaison plus rigoureuse, il est possible d'utiliser la méthode d'optimisation automatique via *Galapagos* afin d'évaluer précisément la différence de rigidité pour un volume équivalent. Dans ce cadre, le treillis homologue au quadruplex présente une rigidité $\frac{2354}{89} \approx 26$ fois supérieure (voir Figure 6.16), démontrant ainsi que, même dans un contexte de faible sensibilité au flambement, le treillis homologue au quadruplex offre des performances mécaniques nettement supérieures à celles du quadruplex.

Compte tenu de cet écart significatif de rigidité entre les deux modèles, il apparaît inapproprié de comparer les volumes pour des rigidités équivalentes, car cela pourrait aboutir à un quadruplex aux dimensions disproportionnées, et donc irréalistes.

Par ailleurs, ces résultats indiquent également une augmentation progressive des performances des treillis lorsque l'on passe d'un modèle à l'autre. En effet, dans un contexte similaire de chargement et de sensibilité au flambement, le treillis homologue du simplex ($S0$) était environ $\frac{431}{26.3} \approx 16.4$ fois plus rigide. Cette observation corrobore non seulement la diminution des performances des modules en tenségrité avec l'augmentation du nombre de côtés, mais met aussi en lumière une amélioration parallèle des performances des treillis homologues.

En conclusion, cette dernière section a permis de confirmer que le simplex constitue le module prismatique en tenségrité le plus performant et le plus pertinent dans une perspective d'analyse et de comparaison avec des structures en treillis. Il a été démontré que les performances mécaniques des modules en tenségrité décroissent avec l'augmentation du nombre de côtés des bases, tandis que celles des treillis homologues augmentent. Ces résultats justifient ainsi le choix de se concentrer exclusivement sur l'étude du simplex en tenségrité, structure élémentaire dont les caractéristiques mécaniques sont les plus proches de celles de son homologue en treillis.



a)

$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{70.2}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{89}$ $\frac{P}{F} = \mathbf{5.3}$

b)

$\frac{H}{D} = \mathbf{1.25}$ $W = \mathbf{70.03}$ $\frac{H}{\delta} = \mathbf{2354}$

FIGURE 6.16 – Comparaison des caractéristiques du quadruplex (a) et de son treillis homologue (b) pour un même indicateur de volume W ($\psi = 7.5$).

Observations, conclusions et résumé des résultats du chapitre

Ce chapitre avait pour objectif d'étendre l'étude à d'autres cas de structures prismatiques en tenségrité (quadruplex, pentaplex et hexaplex) et à d'autres scenarii de chargement du simplex classique. Bien que les chapitres précédents répondaient déjà à la question de recherche de ce mémoire, ce chapitre a permis d'élargir les observations et confirmer l'application des conclusions formulées précédemment.

Pour rester cohérent avec le chapitre précédent, seul un contexte de sensibilité au flambement a été retenu ici ($\psi = 7.5$). Concernant l'étude des autres scenarii de chargement, un processus d'optimisation manuel a été utilisé pour obtenir l'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ du simplex en fonction de l'élancement géométrique. Cette optimisation a permis d'obtenir les observations et conclusions suivantes :

Pour le scenario de chargement uniquement vertical :

— L'évolution de l'indicateur de volume W suit fidèlement celle du cas d'un chargement bi-axial et reste dans les mêmes gammes de valeurs. Cependant, pour des élancements élevés, l'augmentation de W est légèrement moins marquée que dans le cas d'un chargement bi-axial.

— La valeur de $\frac{H}{D}$ donnant un volume minimal reste inchangé par rapport au cas bi-axial et vaut 1.25.

— L'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ reste dans les mêmes gammes de valeurs que dans le cas bi-axial mais présente ici une évolution linéaire croissante, suggérant en théorie une configuration de rigidité maximale lorsque $\frac{H}{D} = \infty$.

Pour le scenario de chargement uniquement horizontal :

— L'évolution de l'indicateur de volume W suit fidèlement celle du cas d'un chargement bi-axial et reste dans les mêmes gammes de valeurs. Cependant, pour des élancements élevés, l'augmentation de W est légèrement plus marquée que dans le cas d'un chargement bi-axial. De plus cette augmentation varie selon l'état de précontrainte $\frac{P}{F}$, celle-ci devient de moins en moins marquée lorsque $\frac{P}{F}$ augmente.

— La valeur de $\frac{H}{D}$ donnant un volume minimal reste inchangé par rapport au cas bi-axial et vaut 1.25. Seule exception, lorsque $\frac{P}{F} = 1$, le $\frac{H}{D}$ donnant un volume optimal vaut 1.

— L'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ reste dans les mêmes gammes de valeurs que dans le cas bi-axial mais présente ici une évolution en cloche avec une décroissance après le maximum beaucoup plus importante. La valeur de $\frac{H}{D}$ donnant une rigidité maximale a diminué et vaut ici 1 pour une $\frac{P}{F} = 1$ et 1.3 pour des précontraintes plus importantes.

$\Rightarrow$ La variation du scenario de chargement change le comportement du simplex. L'indicateur de volume W suit une évolution quasi identique quelque soit le scenario considéré (sauf pour des élancements élevés où des différences mineures apparaissent). La rigidité est quant à elle totalement dépendante du scenario de chargement. L'évolution de $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'élancement présente des courbes très différentes d'un scenario de chargement à l'autre.

⇒ La superposition de l'évolution des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour les deux cas de chargement uni-axial donne bien l'évolution de ces indicateurs pour le cas bi-axial. Cela confirme la pertinence du cas de charge bi-axial dont le comportement du simplex combine celui qu'il aurait adopté dans les deux autres cas.

Une optimisation manuelle similaire a été réalisée pour le treillis afin de comparer ses caractéristiques avec celles du simplex dans des contextes de chargement différents. Cette comparaison a permis d'aboutir aux observations et conclusions suivantes :

— Pour le cas de chargement uniquement vertical, le treillis est constamment plus léger que le simplex, quelque soit sont état de précontrainte. Il présente également une rigidité bien meilleure que que celle du simplex, atteignant même des valeurs supérieures à celles du cas bi-axial.

— Pour le cas de chargement uniquement horizontal, l'évolution du volume du treillis est similaire à celle du cas bi-axial (voir conclusions du Chapitre 4). L'évolution de la rigidité du treillis a un comportement similaire à celle du simplex et reste bien meilleure quelque soit la valeur de $\frac{H}{D}$. Cependant la diminution de rigidité avec l'élancement est moins marquée dans le cas du treillis.

⇒ Pour tous les scenarii de chargement, le treillis présente de meilleures performances mécaniques que le simplex, quelque soit le contexte de sensibilité au flambement ψ, l'élancement $\frac{H}{D}$ et la précontrainte $\frac{P}{F}$ considérés.

A l'aide d'une optimisation manuelle, et pour différents états de précontrainte, l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ en fonction du nombre de face de la base du modèle prismatique a pu être obtenue. Cette optimisation a permis d'avoir les observations et conclusions suivantes :

— L'indicateur de volume W optimal évolue de façon linéaire croissante lorsque le nombre de face de la base de la structure augmente, et ce quelque soit l'état de précontrainte.

— L'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ optimal évolue de façon quadratique décroissante lorsque le nombre de face de la base de la structure augmente, et ce quelque soit l'état de précontrainte. Il faut attendre la configuration hexaplex pour voir cette rigidité augmenter à nouveau.

⇒ Le simplex est donc bien le module prismatique en tenségrité le plus performant. Celui-ci est le plus léger et présente, à volume optimal et sans contrainte de rigidité, un comportement plus rigide que les autres modules. Cela confirme la pertinence du choix d'étudier le simplex.

Malgré les meilleures performances globales du simplex, une optimisation automatique avec *Galapagos* a été réalisée pour comparer la rigidité à volume identique d'un quadruplex et de son homologue treillis. Pour cette configuration, le treillis présente une bien meilleure rigidité que le quadruplex, avec une différence de rigidité bien plus marquée que dans le cas du simplex.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES D'AMÉLIORATION

Conclusions et perspectives d'amélioration

Le présent mémoire s'inscrit dans la continuité des recherches menées à l'École Polytechnique de Louvain portant sur la tenségrité. Ce travail a étudié les performances mécaniques d'un simplex, module prismatique élémentaire en tenségrité, et de les comparer rigoureusement à une structure treillis homologue, dans l'optique de répondre à la problématique suivante : **La tenségrité constitue-t-elle une alternative structuralement plus performante que les treillis ? En d'autres termes, est-elle plus légère et plus rigide dans un contexte équivalent ?**

L'étude conclut que **le treillis présente globalement de meilleures performances mécaniques que le simplex, quelque soit le scenario de chargement, la précontrainte et la sensibilité au flambement**. Qu'il s'agisse de comparer la rigidité à volume égal ou le volume à rigidité identique, le treillis est systématiquement plus performant.

La méthodologie adoptée se basait sur l'outil des indicateurs morphologiques et a permis, grâce à un nombre restreint de cas étudiés, d'obtenir des conclusions générales pouvant s'appliquer à n'importe quelle structure partageant les mêmes valeurs d'indicateurs morphologiques.

La comparaison a nécessité une optimisation des deux structures. Celle-ci consistait à minimiser le volume, tout en s'assurant que cette configuration optimisée soit une solution acceptable (déformée non divergente, pas d'effort interne excessif).

Deux types d'optimisations ont été menées : une optimisation manuelle et l'autre automatique à l'aide du plug-in *Galapagos*. La première visait à comprendre comment évoluait, dans un contexte de chargement et de sensibilité au flambement donné, les indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ de la structure, pour divers états de précontrainte. La seconde a été utilisée pour une comparaison plus spécifique entre tenségrité et treillis. L'objectif était, sur base de la configuration treillis optimale, de comparer les rigidités avec un simplex de même volume et de comparer les volumes avec un simplex de même rigidité.

L'optimisation manuelle a montré que volume optimal du simplex était atteint pour $\frac{H}{D} = 1.25$, et que la rigidité optimale était atteinte pour $\frac{H}{D} = 2.5$. Ces valeurs restent valables quelque soit l'état de précontrainte considéré. Concernant le treillis, ces valeurs sont assez proches de celles du simplex, avec $\frac{H}{D} = 1$ pour le volume optimal et $\frac{H}{D} = 3$ pour la meilleure rigidité. A propos du volume, ces valeurs de $\frac{H}{D}$ indiquent une nécessité accrue de quantité de matière pour des configurations très aplaties ou très élancées. Le manque de rigidité des configurations aplaties demande une grande quantité de matière pour éviter une déformation divergente et la sensibilité au flambement des configurations élancées nécessite également plus de matière. Ces valeurs de $\frac{H}{D}$ concernant la rigidité indiquent que même des structures élancées ont une certaine rigidité provenant de l'inertie verticale importante de la structure qui contrebalance, jusqu'à un certain élancement, la sensibilité au flambement et l'effet des composantes horizontales de force.

Sur base de $\frac{H}{D} = 1.25$ donnant le volume optimal pour le simplex, on a déterminé les caractéristiques du treillis homologue. L'optimisation automatique a ensuite montré que quelque soit la comparaison effectuée (même volume ou même rigidité), le treillis présente de meilleures caractéristiques. Il est plus rigide à volume égale et plus léger à rigidité équivalente.

Ces processus d'optimisation et de comparaison entre simplex tenségrité et homologue treillis ont été répétés pour différentes sensibilités au flambement, permettant ainsi de comprendre comment les caractéristiques et la comparaison entre ces deux systèmes structuraux évoluaient avec ce facteur. La variation de l'indicateur de flambement ψ a permis de construire la courbe d'efficacité du simplex et du treillis montrant la variation des W et $\frac{H}{\delta}$ optimaux pour chaque valeur de ψ.

Cette courbe a montré une évolution linéaire croissante de l'indicateur de volume optimal avec ψ, montrant que la sensibilité au flambement augmentait le volume nécessaire. Cette observation s'applique aussi bien au simplex qu'au treillis. La rigidité du simplex évolue de façon beaucoup moins marquée et reste plus ou moins constante. Pour le treillis, cet indicateur évolue de manière linéaire croissante montrant donc une amélioration de la rigidité lorsque ψ augmente. Le volume de tous les éléments du treillis est régi par la résistance au flambement de la barre la plus comprimée. L'augmentation de la sensibilité au flambement induisant une augmentation de volume de tous les éléments, combinés au caractères rigides des barres, induit une meilleure rigidité. La sensibilité au flambement du simplex nécessite aussi une augmentation de volume, qui augmente la rigidité des barres, mais qui n'est pas suffisante pour augmenter la rigidité des câbles présents en majorité dans le simplex. Cela explique le caractère quasi constant de la rigidité du simplex lorsque ψ évolue.

Trois nouvelles configurations correspondant à l'ajout d'un, deux ou trois câbles supplémentaires au simplex initial ont été étudiés dans une optique d'amélioration de la rigidité. L'optimisation automatique a permis une comparaison avec le simplex classique pour témoigner de l'amélioration des caractéristiques, et avec le treillis optimal pour évaluer à nouveau la différence de performance. On a pu observer qu'un simplex avec trois câbles additionnels, pour un contexte de sensibilité au flambement faible ou négligeable, présente des performances assez similaires à celles du treillis, pouvant ainsi rivaliser avec celui-ci. Bien que l'avantage soit toujours en faveur du treillis. Cette piste a donc le potentiel d'imaginer un simplex avec trois câbles additionnels ayant des performances similaires au treillis, dans un monde idéalisé et sans flambement.

Les recherches menées ont finalement été étendues à d'autres scenarii de chargement (uniquement vertical et uniquement horizontal) et d'autres modules prismatiques en tenségrité (quadruplex, pentaplex, hexaplex). L'étude des différents scenarii de chargement a montré un comportement assez identique de l'évolution de l'indicateur de volume W mais des évolutions différentes de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'élancement. Ces différences de comportement, combinées entre elles a permis de mieux comprendre les courbes d'évolution du volume et de la rigidité obtenues dans le cas bi-axial.

L'étude des autres modules prismatiques a montré que le simplex était la structure en tenségrité élémentaire la plus efficace en terme de volume optimal et de rigidité associé. Ces résultats sont cohérents par rapport aux conclusions d'un précédent mémoire.

Bien que cette étude aboutisse à une vue d'ensemble globale de la comparaison des caractéristiques structurales d'un simplex et de son homologue treillis, de nombreuses pistes d'amélioration existent. Bien que les indicateurs morphologiques permettent une analyse donnant des conclusions générales, celles-ci ne concernent que le cas de structures prismatiques en tenségrité. Le simplex est une structure d'étude simple ne se référant pas directement à une structure réelle. Il serait donc tout à fait pertinent d'étendre cette étude à des structures civiles plus complexes. On pourrait tout à fait imaginer une version tenségrité d'une structure treillis existante et d'en comparer les caractéristiques.

Plusieurs variantes des cas de charge peuvent également être explorées. Il existent en effet trois scenarii distincts : chargement uniquement vertical, uniquement horizontal et une combinaison des deux. Cependant, cette étude a toujours considéré une répartition uniforme et une même orientation dans le plan des composantes de force. Il serait donc pertinent d'imaginer des scenarii de chargement plus complexes associés à une répartition non homogène de la valeur de force entre les différentes composantes, ou encore de considérer des vecteurs de force d'orientations différentes dans le plan.

La forme générale du simplex possède aussi des pistes d'améliorations. Le simplex et treillis homologue ont toujours été considérés comme ayant leurs bases supérieures et inférieures identiques. Il serait possible d'imaginer des configurations avec une des deux bases plus large ou plus étroite que l'autre, ouvrant la porte à des configurations encore plus diversifiées.

Les méthodes d'optimisation peuvent aussi être améliorées. L'outil *Galapagos* est très puissant pour trouver la combinaison des paramètres donnant le meilleur résultat. Mais celui-ci demande un nombre d'itération considérable pour converger vers la solution. De ce fait, *Galapagos* était plus ou moins performant pour trouver une solution de même volume ou de même rigidité que le treillis. Mais lorsqu'il devait trouver une solution optimale ayant exactement une précontrainte donnée (condition assez restrictive), le plug-in montrait ses limites, s'arrêtant après un nombre important d'itération sans avoir convergé vers la solution. L'optimisation manuelle était donc nécessaire pour trouver la solution optimale pour chaque élancement $\frac{H}{D}$ et chaque état de précontrainte. Un outil d'optimisation plus robuste pourrait permettre d'élargir les élancements et états de précontrainte étudiés afin d'avoir une quantité de données très large aboutissant à des conclusions plus complètes et plus précises.

En conclusion, dans un contexte où la tenségrité intègre de plus en plus le monde du génie civil, ce mémoire a permis de mieux contextualiser les performances mécaniques de ce système par rapport aux treillis dont les caractéristiques sont déjà bien connues et bien ancrées. Ce mémoire apporte donc sa pierre à l'édifice de toutes les recherches déjà menées sur le sujet, dans le but d'améliorer nos connaissances et notre maîtrise de ce concept complexe qu'est la tenségrité.

ANNEXES

Annexe A : Méthode linéaire aux éléments finis

Cette section présente la méthode linéaire des éléments finis, couramment utilisée pour l'analyse de certaines structures. L'objectif de ce développement est d'introduire les concepts fondamentaux et les équations associées, afin de faciliter la compréhension de la méthode non linéaire des éléments finis, décrite en détail dans la section 2.1 de ce mémoire. Bien que cette méthode ne soit pas applicable dans le cadre des travaux menés ici — en raison du comportement intrinsèquement non linéaire des structures en tenségrité — cette annexe conserve une vocation informative. Les équations et développements présentés ici s'inspirent du mémoire d'**Alexandre Flamant** "Design, calcul et optimisation sur base d'une approche paramétrique"[28], du mémoire d'**Igor Bouckaert** "Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires"[12], et du cours de **João Pacheco de Almeida** "LGCIV1023 : Stabilité des structures"[37], donné à l'EPL.

Développement de la méthode

La méthode linéaire des éléments finis permet de déterminer les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes d'une structure soumise à des sollicitations extérieures. L'interaction entre les charges appliquées, les déplacements induits et les efforts internes qui en résultent se modélise par un système d'équations linéaires qu'il faut résoudre. Pour ce faire, la structure est décomposée en éléments distincts, analysés individuellement.

Matrice de raideur locale d'un élément



Figure A.1 - Élément de structure isolé dans le repère local $2D$ [37] [12].

En chaque nœud, l'équilibre suivant doit être respecté :

$$\bar{F}_{ext} = \bar{F}_{int} \tag{27}$$

Avec :

— $\bar{F}_{ext}$ correspondant aux charges nodales appliquées à la structure.
— $\bar{F}_{int} = KU$ correspondant aux efforts internes induits dans la structure.
— U correspondant au vecteur de déplacements nodaux.
— K la matrice de raideur de l'élément.

Si on développe l'Équation 27, le système à résoudre est donc :

$$\bar{F}_{int} = \frac{EA}{L_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{K}_{0,loc}\bar{u}_{loc} = \bar{F}_{ext} \tag{28}$$

Dans ce cas particulier, la matrice de rigidité locale $\bar{K}_{0,\text{loc}}$ adopte une forme simplifiée. En effet, les structures en tenségrité, tout comme les structures treillis, ne sont soumises qu'à des efforts internes

normaux (Section 1.1). Cette caractéristique permet d'éliminer certaines composantes de la matrice de rigidité, ce qui en réduit la complexité.

Une fois le système d'équations établi pour un élément dans son repère local, il convient de le reformuler dans le repère global de la structure. Cette opération nécessite l'application d'une transformation à l'aide d'une matrice de compatibilité $\bar{r}_c$. Dans le cas d'un élément soumis uniquement à des efforts normaux, cette matrice s'exprime sous la forme suivante :

$$\bar{r}_c = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \tag{29}$$

La matrice de compatibilité permet ainsi d'exprimer les déplacements nodaux de l'élément, initialement définis dans son repère local, dans le repère global de la structure, selon la relation suivante :

$$u_{loc} = \bar{r}_c u \tag{30}$$

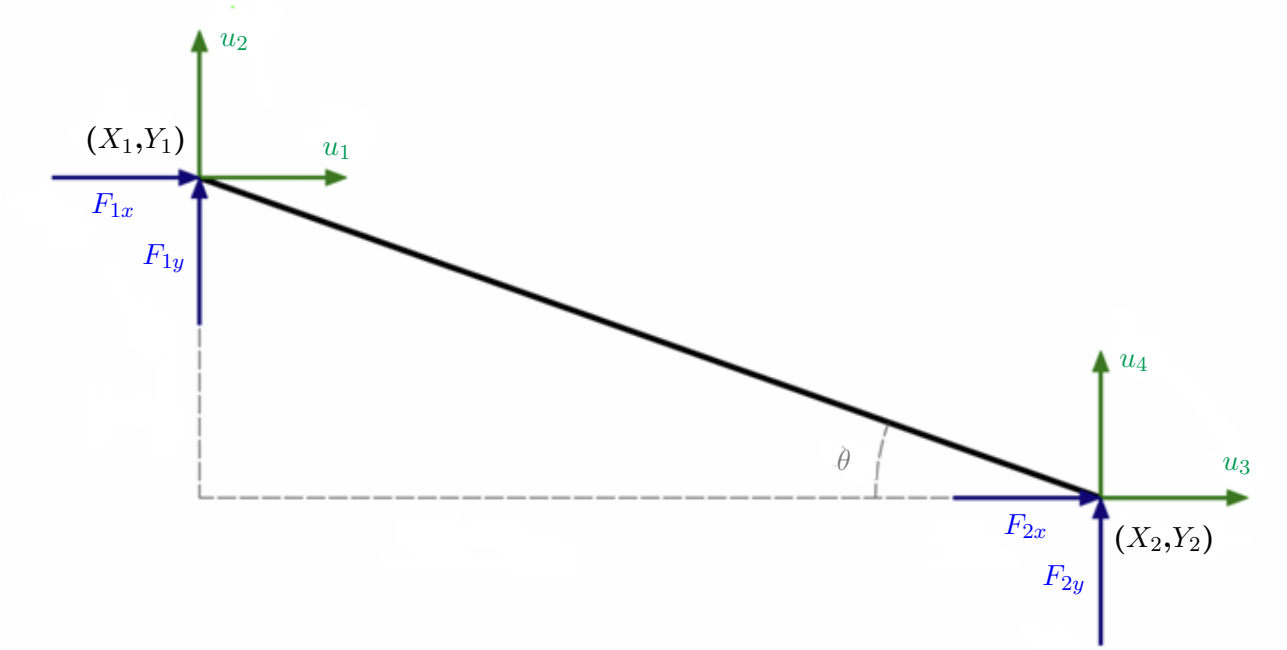


Figure A.2 - Élément de structure isolé dans le repère global $2D$[37][12].

Finalement, l'équation à résoudre, exprimée dans le repère global est définie comme :

$$\bar{r}_c^T \bar{K}_{0,loc} \bar{r}_c \bar{u} = \bar{F}_{ext} \tag{31}$$

Le développement de la méthode linéaire des éléments finis à été réalisé, dans ce cas-ci sur un exemple bidimensionnel. Il est évident que la taille de la matrice de rigidité, et des vecteurs de déplacement nodaux et de charges nodales seront différents si on considère notre élément dans un espace tridimensionnel. Dans ce là, les dimensions des matrices et vecteurs de l'équation d'équilibre seront :

$$\bar{K}_{0,loc}; \bar{r}_c \in \mathbf{R}^{6\times6} \text{ et } \bar{u}_{loc}; \bar{F}_{ext} \in \mathbf{R}^{6\times1}$$

Matrice de raideur globale de la structure

Une fois cette démarche appliquée à l'ensemble des éléments constituant la structure, il devient possible de formuler le système d'équations global, exprimé dans le repère global, intégrant l'ensemble des contributions de chaque élément.

Pour un élément quelconque de la structure dont les extrémités sont les nœuds i et j, l'égalité s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ii} & | & \bar{A}_{ij} \\ - & + & - \\ \bar{A}_{ji} & | & \bar{A}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix} \tag{32}$$

Cette équation constitue la forme générale du système précédemment développé dans cette section (voir Équation 31). À partir des relations établies pour chaque élément de la structure, il est alors possible de construire la matrice de raideur globale, le vecteur des déplacements ainsi que le vecteur des charges appliquées, tous exprimés à l'échelle de la structure complète. Le système global peut ainsi être formulé comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Sigma\bar{A}_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Sigma\bar{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \Sigma\bar{A}_{ii} & \cdots & \Sigma\bar{A}_{jj} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \Sigma\bar{A}_{ji} & \cdots & \Sigma\bar{A}_{ji} & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \Sigma\bar{A}_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Sigma\bar{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_i \\ \vdots \\ \bar{u}_j \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_i \\ \vdots \\ \bar{F}_j \\ \vdots \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{K}_0\bar{u} = \bar{F}_{ext} \tag{33}$$

Avec :

— $\bar{K}_0$: la matrice de raideur globale de la structure
— $\bar{u}$: le vecteur des déplacements nodaux
— $\bar{F}_{ext}$: le vecteur des charges appliquées à la structure

On peut donc également généraliser la dimension des matrices et vecteurs en fonction du nombre de nœuds N dans la structure. Si on décide maintenant d'être plus général, pour une structure composée de N nœuds :

— Exprimé dans un repère bidimensionnel, les dimensions des matrices et vecteurs seront :

$$\bar{K}_{0,loc}; \bar{r}_c \in \mathbf{R}^{2N\times 2N} \text{ et } \bar{u}_{loc}; \bar{F}_{ext} \in \mathbf{R}^{2N\times 1}$$

— Exprimé dans un repère tridimensionnel, les dimensions des matrices et vecteurs seront :

$$\bar{K}_{0,loc}; \bar{r}_c \in \mathbf{R}^{3N\times 3N} \text{ et } \bar{u}_{loc}; \bar{F}_{ext} \in \mathbf{R}^{3N\times 1}$$

Conditions aux appuis

Maintenant que l'équation d'équilibre générale, permettant de déterminer les déformations nodales induites par les charges extérieures, a été établie, il est essentiel de définir les conditions aux limites du problème, c'est-à-dire les appuis de la structure. Ces conditions sont modélisées par l'introduction de blocages aux nœuds correspondants, afin d'annuler leurs déplacements dans certaines directions de l'espace. Cela revient à contraindre certaines composantes du vecteur des déplacements nodaux $\bar{d}$.

Dans le système global d'équations, ces blocages se traduisent par l'imposition de conditions supplémentaires, restreignant ainsi le champ des solutions admissibles.

Pour une structure à laquelle on impose M contraintes aux appuis, on obtient l'équation suivante :

$$\bar{c}\bar{u} = \bar{D} \tag{34}$$

Avec :

— $\bar{c} \in \mathbf{R}^{M\times 3N}$: la matrice de contraintes. Pour chaque contrainte (chaque ligne), tous les éléments de la colonne du degré de liberté bloqué valent 1.
— $\bar{D} \in \mathbf{R}^{M\times 1}$: le vecteur des déplacements imposés (vecteur nul dans le cas d'appuis fixes).

Le système d'équation final à résoudre est donc de degré $3N + M$ et peut s'écrire comme :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^T \\ \bar{c} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^T \\ \bar{c} & \bar{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Avec $\bar{r}$ qui correspond au vecteur de réactions d'appuis.

Problème de minimisation

Ce système d'équation traduit en réalité un problème de minimisation dans lequel on souhaite déterminer la configuration déformée qui minimise l'énergie potentielle. Cette minimisation peut s'exprimer comme :

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \bar{u}} = 0 \Leftrightarrow \bar{K}_0\bar{u} = \bar{F}_{ext} \tag{37}$$

Avec :

— $\Pi = U - W_{ext}$: l'énergie potentielle totale de la structure
— $U = \frac{1}{2}\bar{u}^t\bar{K}_0\bar{u}$: l'énergie élastique interne de la structure
— $W_{ext} = \bar{u}^t\bar{F}_{ext}$: le travail exercé par les forces externes sur la structure

En exprimant, de surcroît, la fonction de contrainte comme :

$$\bar{g} = \bar{c}\bar{u} - \bar{D} = 0 \tag{38}$$

Le problème de minimisation se traduit par la minimisation du lagrangien qui lui se définit par l'équation suivante :

$$L(\bar{u}, \bar{r}) = \Pi(\bar{u}) + \bar{g}^t(\bar{u})\bar{r} \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow L(\bar{u}, \bar{r}) = \frac{1}{2}\bar{u}^t\bar{K}_0\bar{u} - \bar{u}^t\bar{F}_{ext} + (\bar{c}\bar{u} - \bar{D})^t\bar{r} \tag{40}$$

Au final, le problème de minimisation, en considérant les contraintes appliquées aux appuis :

$$\nabla L(\bar{u}, \bar{r}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta \bar{u}} = 0 \Leftrightarrow \bar{K}_0\bar{u} - \bar{F}_{ext} + \bar{c}^t\bar{r} = 0 \\ \\ \frac{\delta L}{\delta \bar{r}} = 0 \Leftrightarrow \bar{c}\bar{u} - \bar{D} = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Annexe B : Valeurs numériques choisies pour le cas d'étude initial du simplex présenté dans la Section 4.2

Cette annexe a pour objectif de lister les valeurs numériques choisies dans le cas d'étude initial de l'optimisation d'un simplex en tenségrité et de son homologue treillis présenté dans la Section 4.2.

Caractéristiques matérielles et géométriques du simplex

Caractéristiques matérielles

Paramètres	Description
Poids volumique ρ $[kg/m^3]$	7850
Module de Young E $[MPa]$	210 000
Contrainte admissible des barres σ_s $[MPa]$	355
Contrainte admissible des câbles σ_c $[MPa]$	1570

Table 18 – Caractéristiques matérielles du simplex et leur valeur numérique.

Caractéristiques géométriques

Paramètres	Description
Angle relatif entre les bases α [°]	30
Rapport diamètre-épaisseur des tubes $\frac{D_s}{e}$ [/]	10
Rayon du cercle définissant la base r_b $[m]$	0.667
Largeur de la base D $[m]$	$\frac{3}{2}r_b = 1$

Table 19 – Caractéristiques géométriques du simplex.

Scenario de chargement

Paramètres	Description
Charge totale appliquée à chaque nœud Q $[kg]$	1000
Force totale appliquée à chaque nœud $F/3$ $[kN]$	9.81
Force verticale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	4.905
Force horizontale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	4.905
Force totale appliquée au simplex F $[kN]$	29.43

Table 20 – Scenario de chargement du cas d'étude initial.

Indicateurs morphologiques adimentionnels

Paramètres	Description
Indicateur de raideur des barres $\frac{E}{\sigma_s}$	591.55
Indicateur de raideur des câbles $\frac{E}{\sigma_c}$	133.75
Indicateur de poids propre des barres ϕ_s	2.169e-4
Indicateur de poids propre des câbles ϕ_c	4.905e-5
Indicateur de géométrie des sections q	0.3625
Indicateur de flambement ψ	7.5

Table 21 – Indicateurs morphologiques du cas d'étude initial.

Annexe C : Valeurs numériques choisies pour les cas d'étude du simplex présentés en Sections 4.4 et 4.5

Variation de l'indicateur de flambement avec le scenario de chargement F choisi

Scenario de chargement pour une force 10x plus petite

Paramètres	Description
Charge totale appliquée à chaque nœud Q $[kg]$	100
Force totale appliquée à chaque nœud $F/3$ $[kN]$	0.981
Force verticale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	0.4905
Force horizontale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	0.4905
Force totale appliquée au simplex F $[kN]$	2.943

TABLE 22 – Scenario de chargement du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 10x plus faible ($\psi = 24$).

Indicateurs morphologiques adimentionnels pour une force 10x plus petite

Paramètres	Description
Indicateur de flambement ψ	24

TABLE 23 – Indicateurs morphologiques du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 10x plus faible ($\psi = 24$).

Scenario de chargement pour une force 100x plus petite

Paramètres	Description
Charge totale appliquée à chaque nœud Q $[kg]$	10
Force totale appliquée à chaque nœud $F/3$ $[kN]$	0.0981
Force verticale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	0.04905
Force horizontale à chaque nœud $F/6$ $[kN]$	0.04905
Force totale appliquée au simplex F $[kN]$	0.2943

TABLE 24 – Scenario de chargement du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 100x plus faible ($\psi = 75$).

Indicateurs morphologiques adimensionnels pour une force 100x plus petite

Paramètres	Description
Indicateur de flambement ψ	75

TABLE 25 – Indicateurs morphologiques du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 100x plus faible ($\psi = 75$).

Graphe de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ pour une force 100x plus faible

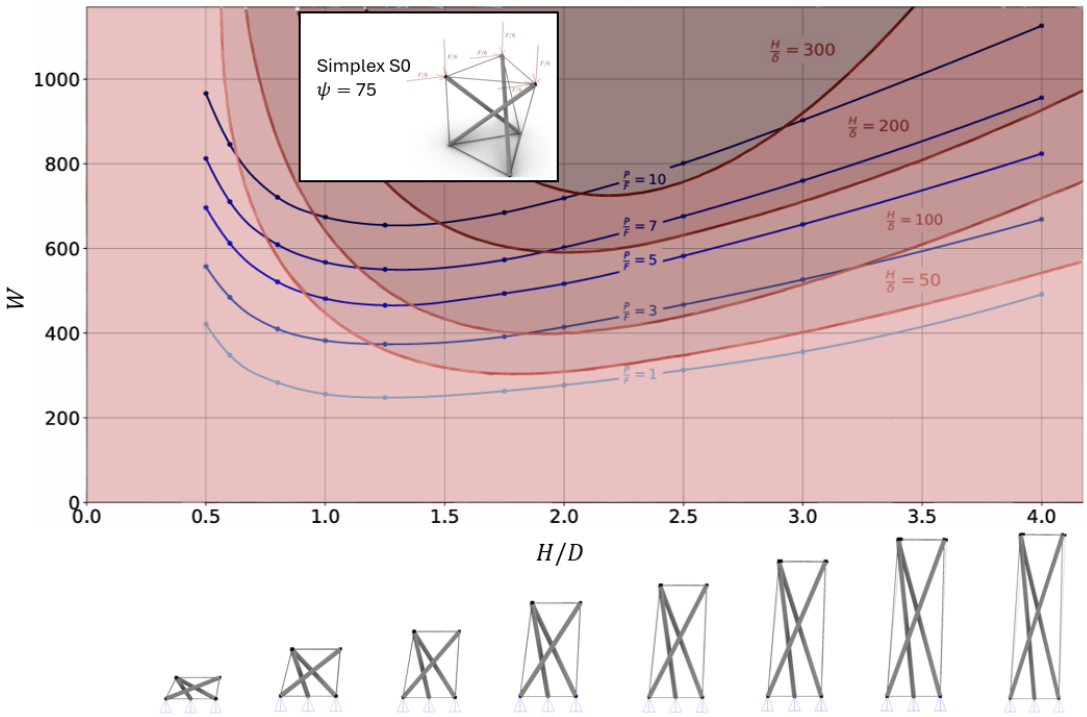


Figure C.1 - Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 75$.

Graphes des comparaisons de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ entre un simplex et un treillis pour une force 100x plus faible

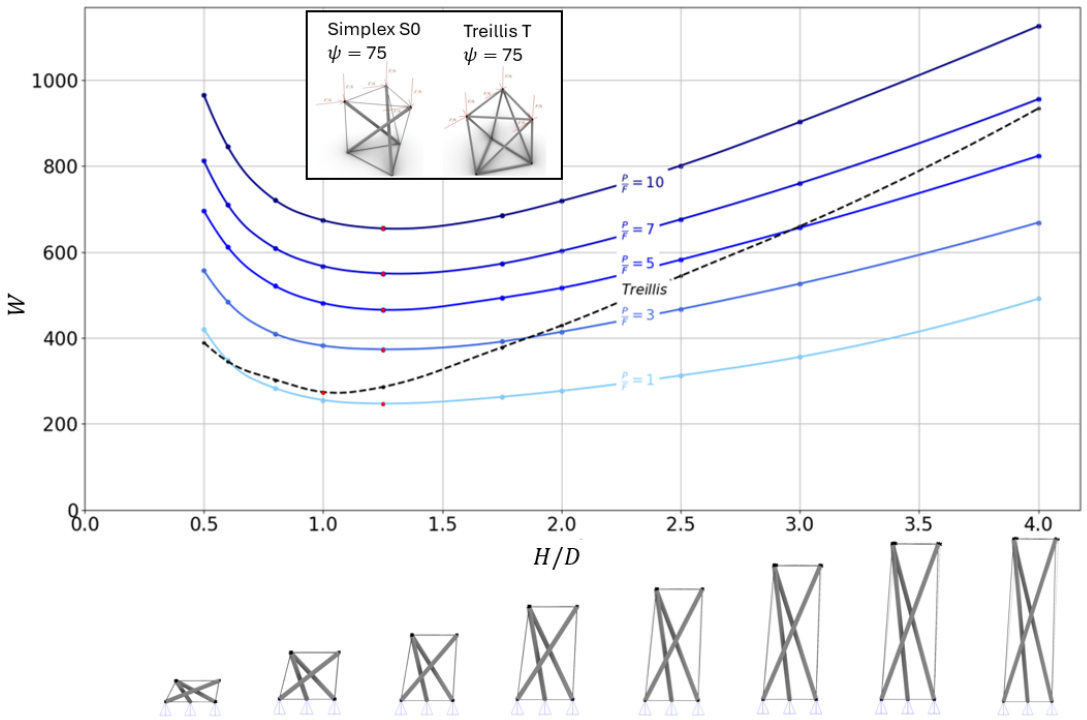


Figure C.2 - Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, $\psi = 75$.

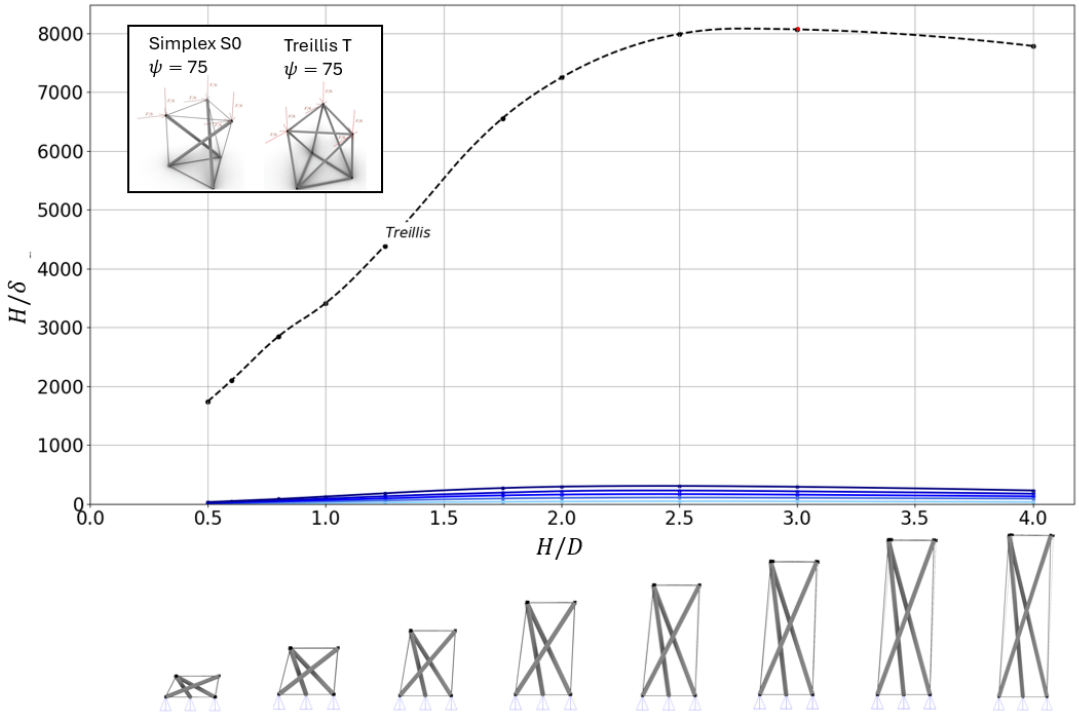


Figure C.3 - Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, $\psi = 75$.

Variation de l'indicateur de flambement avec le modèle de tube (rapport $\frac{D_s}{e}$) choisi

Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels pour un rapport $\frac{D_s}{e}$ 1.25 fois plus faible

Paramètres	Description
Rapport diamètre-épaisseur des tubes $\frac{D_s}{e}$ [/]	8
Indicateur de flambement ψ	8.5
Indicateur de géométrie des sections q	0.2842

TABLE 26 – Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels du simplex pour le nouveau cas étudié dont le rapport $\frac{D_s}{e}$ est 1.25 fois plus faible ($\psi = 8.5$).

Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels pour un rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand

Paramètres	Description
Rapport diamètre-épaisseur des tubes $\frac{D_s}{e}$ [/]	65
Indicateur de flambement ψ	3
Indicateur de géométrie des sections q	2.5471

TABLE 27 – Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels du simplex pour le nouveau cas étudié dont le rapport $\frac{D_s}{e}$ est 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$).

Graphe de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ pour un rapport $\frac{D_s}{e}$ 1.25 fois plus faible

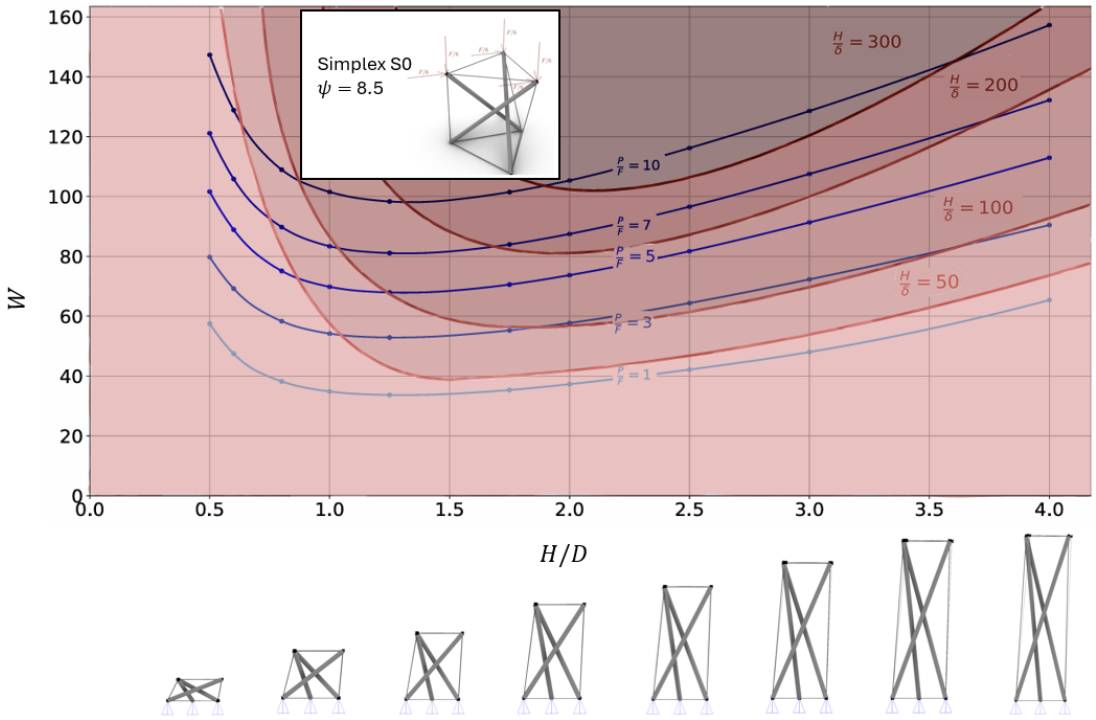


Figure C.4 - Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 8.5$.

Graphes des comparaisons de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ entre un simplex et un treillis pour un rapport $\frac{D_s}{e}$ 1.25 fois plus faible

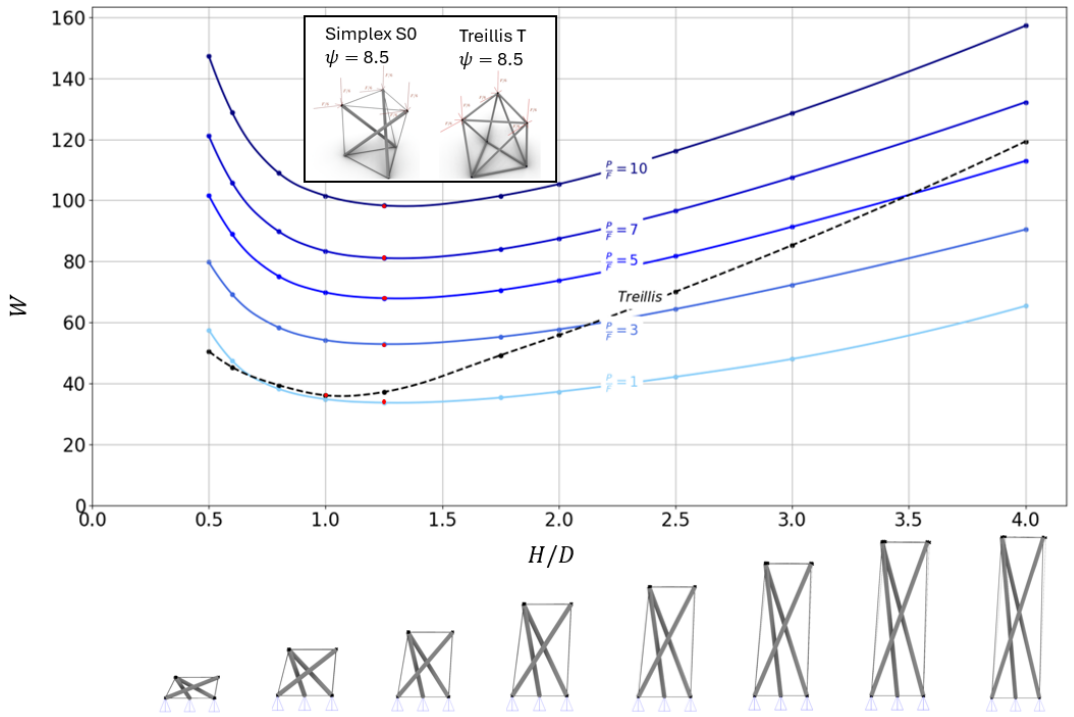


Figure C.5 - Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 8.5$.

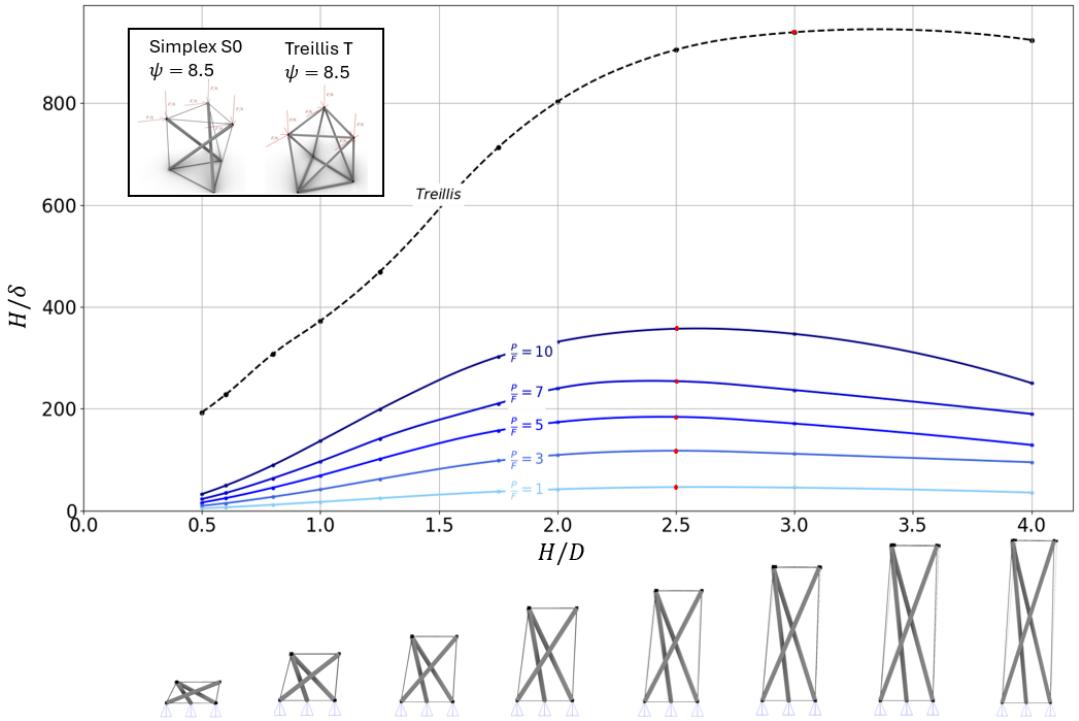


Figure C.6 - Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 8.5$.

Variation de l'échelle géométrique du simplex pour un ψ donné

Graphes des comparaisons de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ entre un simplex et un treillis pour une structure 10 fois plus petite

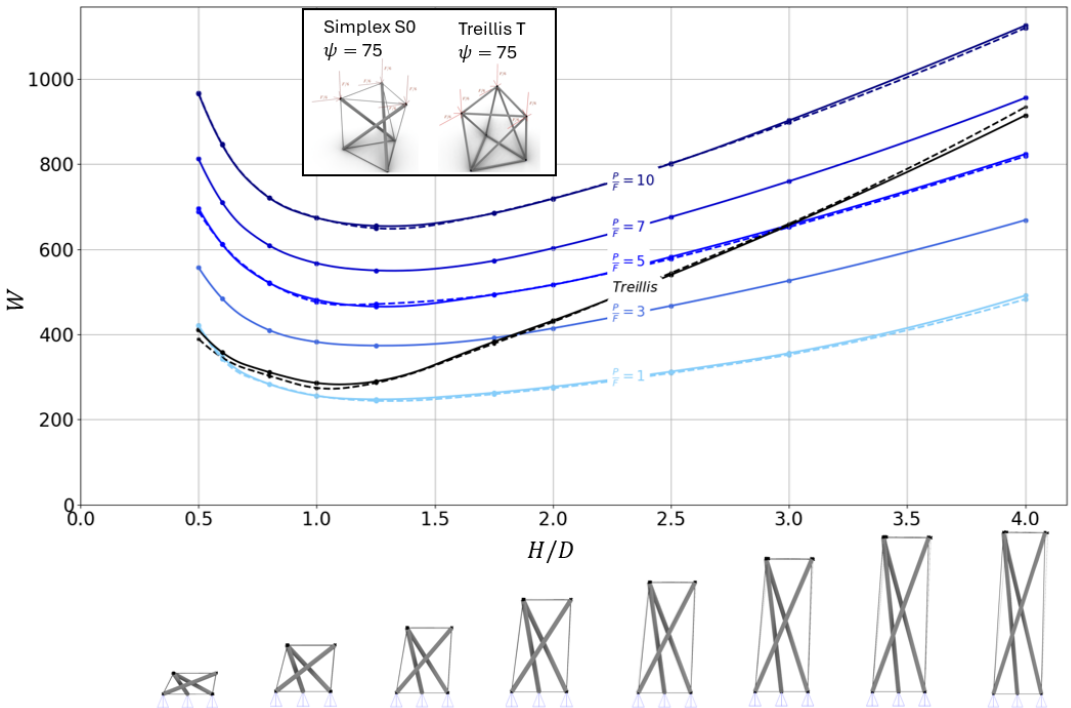


Figure C.7 - Comparaison des résultats de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour des échelles géométriques différentes ($\psi = 75$).

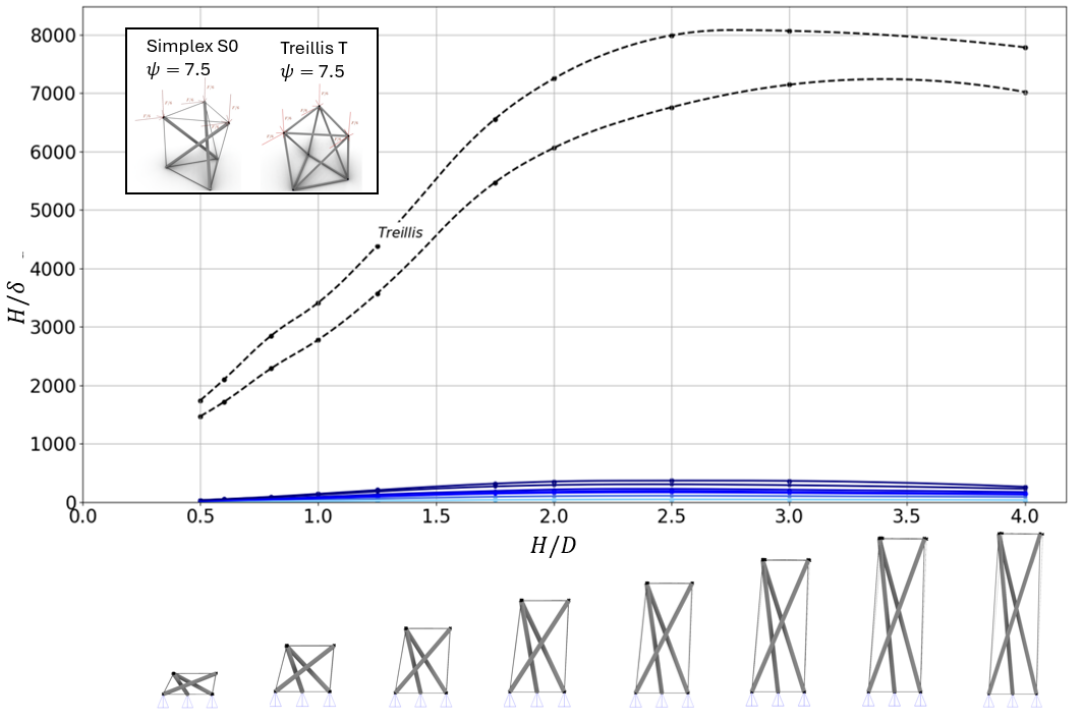


Figure C.8 - Comparaison des résultats de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour des échelles géométriques différentes ($\psi = 75$).

Graphes des comparaisons de l'évolution de W et de $\frac{H}{\delta}$ entre un simplex et un treillis pour une structure 5 fois plus grande

Les graphes concernant la comparaison des résultats obtenus avec une structure 5 fois plus grande et pour une valeur de ψ de 75, sont exactement les mêmes que ceux illustrés par les Figures C.7 et C.8.

Annexe D : Analyse des épaisseurs de tubes disponible sur le marché

Cette section a pour objectif de présenter les diamètres de tubes, et leur épaisseur associée disponible sur le marché. Cette recherche permet de déterminer les rapports de diamètre D_s et d'épaisseur e des tubes existants afin d'en fixer les bornes inférieures et supérieures réalistes. Ces valeurs seront ensuite utilisées dans la Section 4.5 afin de faire varier l'indicateur de flambement ψ en modifiant le modèle de tube considéré.

Les modèles de tubes étudiés ont été extraits des catalogues techniques de l'entreprise **Sadel Stainless Steel** [38], spécialisée dans la fabrication de tubes en acier inoxydable. Le Tableau 28 présente l'ensemble des modèles disponibles, ainsi que le rapport géométrique associé $\frac{D_s}{e}$. Il ressort de cette analyse que ce rapport varie entre une valeur minimale de 8 et une valeur maximale de 64,5. Pour les besoins de l'étude, ces bornes seront arrondies et fixées respectivement à $\frac{D_s}{e} = 8$ pour la limite inférieure, et $\frac{D_s}{e} = 65$ pour la limite supérieure. En comparaison avec la valeur de $\frac{D_s}{e}$ adoptée dans les cas précédemment analysés, ces bornes correspondent à une réduction du rapport par un facteur de 0.8 pour la borne inférieure, et à une augmentation par un facteur de 6.5 pour la borne supérieure.

D_s $[mm]$	e $[mm]$	D_i $[mm]$	$\frac{D_s}{e}$ $[/]$
12.00	1.00	10.00	12.00
12.00	1.50	9.00	8.00
15.00	1.50	12.00	10.00
16.00	1.00	14.00	16.00
16.00	2.00	12.00	8.00
17.20	1.50	14.20	11.47
18.00	1.50	15.00	12.00
20.00	1.50	17.00	13.33
20.00	2.00	16.00	10.00
21.30	2.00	17.30	10.65
22.00	1.50	19.00	14.67
25.00	1.50	22.00	16.67
25.00	2.00	21.00	12.50
26.90	2.00	22.90	13.45
28.00	1.50	25.00	18.67
...			
50.00	1.50	47.00	33.33
50.00	2.00	46.00	25.00
60.30	1.20	57.90	50.25
60.30	2.00	56.30	30.15
70.00	2.00	66.00	35.00
80.00	2.00	76.00	40.00
84.00	2.00	80.00	42.00
88.90	2.00	84.90	44.45
101.60	2.00	97.60	50.80
104.00	2.00	100.00	52.00
114.30	2.00	110.30	57.15
129.00	2.00	125.00	64.50

TABLE 28 – Caractéristiques mécaniques des diamètres de tubes en acier INOX.

Annexe E : Valeurs numériques choisies pour la vérification des résultats réalisée à la Section 4.6

Variation de la charge F et du rapport $\frac{D_s}{e}$ pour un ψ donné

Sensibilité au flambement pour une valeur de $\psi = 7.5$	
Anciennes valeurs	Nouvelles valeurs
$F = 29.43\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 10\ [/]$ $q = 0.3625$	$F = 9.23\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 30\ [/]$ $q = 1.155$

Table 29 – Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement.

Variation de l'échelle géométrique du simplex pour un psi donné

Simplex avec une largeur de base H 10 fois plus petite

Sensibilité au flambement pour une valeur de $\psi = 7.5$	
Anciennes valeurs	Nouvelles valeurs
$H = 1\ [m]$ $F = 29.43\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 10\ [/]$ $q = 0.3625$	$H = 0.1\ [m]$ $F = 0.2943\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 10\ [/]$ $q = 0.3625$

Table 30 – Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement.

Simplex avec une largeur de base H 5 fois plus grande

Sensibilité au flambement pour une valeur de $\psi = 7.5$	
Anciennes valeurs	Nouvelles valeurs
$H = 1\ [m]$ $F = 29.43\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 10\ [/]$ $q = 0.3625$	$H = 5\ [m]$ $F = 735.73\ [kN]$ $\frac{D_s}{e} = 10\ [/]$ $q = 0.3625$

Table 31 – Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement.

RÉFÉRENCES

Table des figures

1.1 "Gleichgewichtkonstruktion" de Karl Johasson [6]. 18

1.2 Richard Buckminster Fuller [9]. 19

1.3 "B-tree" [10] and "X-Piece" de Kenneth Snelson [5]. 20

1.4 Structures autotendantes de D.G. Emmerish [12]. 20

1.5 *Needle Tower I et II* [14]. 21

1.6 Structure *Lotus Aeroad* au *Goodwood festival of Speed* [15]. 22

1.7 *Kurilpa Bridge* [16]. 23

1.8 *The Georgia Dome* [17] et *Estadio Unico de La Plata* [18]. 23

1.9 Structure en tenségrité déployable dans son état A [23]. 26

1.10 Structure en tenségrité déployable dans son état B [23]. 26

1.11 Passerelle piétonne en tenségrité *Snake Footbridge* [12]. 27

2.1 Relation contrainte σ-déformation ϵ de l'acier [31]. 31

2.2 Calcul au premier ordre (a), calcul au second ordre (b) [31]. 32

2.3 Principe d'avancement de la solution par incréments ΔF_k [27]. 33

2.4 Interprétation graphique de la contrainte [27]. 35

2.5 Algorithme de la méthode non linéaire des éléments finis [27]. 37

2.6 Simplex avec une certaine hauteur modélisé de façon paramétrique dans *Grasshopper*. 38

2.7 Simplex avec une certaine hauteur modélisé de façon paramétrique dans *Grasshopper*. 39

2.8 Procédure de résolution d'une structure en tenségrité à l'aide de la *RD* et de *Muscle* sur le logiciel *Grasshopper*. 40

2.9 Initialisation des caractéristiques mécaniques des câbles (a) et des barres (b). 40

2.10 Initialisation des sections de barres (a) et de câbles (b). 40

2.11 Initialisation des éléments câbles (a) et barres (b). 41

2.12 Définition de la structure globale sur bas des éléments qui la composent. 41

2.13 Introduction de précontrainte dans les éléments barre. 41

2.14 Introduction de précontrainte dans les éléments barre. 42

2.15 Module de calcul par la méthode de le *RD* et résultat obtenu visible dans *Rhino*. . . . 42

2.16 Plug-in *Galapagos* avec les génomes en rose et le fitness en vert. 43

3.1 Représentation des paramètres sur un simplex modélisé sur le logiciel *Grasshopper*. . . 48

3.2 Courbe d'efficacité [36]. 52

3.3 Application de la précontrainte [12]. 54
3.4 Extériorisation de la force équivalente [12]. 54
3.5 Calcul des efforts internes induits [12]. 54
3.6 Efforts internes résultants [12]. 54
3.7 Algorithme d'optimisation sur base des indicateurs morphologiques [27]. 56
4.1 Simplex tenségrité et treillis homologue modélisés sur le logiciel *Grasshopper*. 59
4.2 Géométrie d'un simplex (a et b), d'un pentaplex (c et d) et d'un hexaplex (e et f) modélisés sur le logiciel *Grasshopper*. 60
4.3 Éléments composants un simplex dont l'angle de rotation est $\alpha = 30°$. 61
4.4 Simplex régulier vue 3D (a) et vue latérale (b). 61
4.5 Variation de α en fonction du paramètre r [28]. 62
4.6 Variation de l'angle de rotation α entre les deux bases. 62
4.7 Définition de la géométrie du simplex sur le logiciel *Grasshopper*. 64
4.8 Différentes configurations d'un simplex irrégulier modélisées sur le logiciel *Grasshopper*. 64
4.9 Représentation du rayon du cercle circonscrit r_b et de la largeur de la base D. 66
4.10 Illustration du scenario de chargement du $S0$. 67
4.11 Schéma des différents $\frac{P}{F}$ étudiés et des $\frac{H}{D}$ considérés pour chacun de ces $\frac{P}{F}$. 71
4.12 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$. 73
4.13 Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$. 74
4.14 Zones indiquant la rigidité atteinte par les différents indicateurs de volume W mesurés. 75
4.15 Illustration de l'optimisation automatique de l'angle α avec *Galapagos*. 77
4.16 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour le T homologue au $S0$. 77
4.17 Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour le T homologue au $S0$. 78
4.18 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T. 80
4.19 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T. 81
4.20 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W. 82
4.21 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$. 83

4.22 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 24$. 85

4.23 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le simplex $S0$ et le treillis T, pour $\psi = 24$. 86

4.24 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 24$. 86

4.25 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W dans le cas d'un charge appliquée 10x plus faible ($\psi = 24$). 87

4.26 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un charge appliquée 10x plus faible ($\psi = 24$). 88

4.27 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même W dans le cas d'un charge appliquée 100x plus faible ($\psi = 75$). 89

4.28 Comparaison des caractéristiques du $S0$ et du T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un charge appliquée 100x plus faible ($\psi = 75$). 90

4.29 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 3$. 92

4.30 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 3$. 93

4.31 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 3$. 94

4.32 Comparaison des caractéristiques du simplex $S0$ et du treillis T pour un même W dans le cas d'un rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$). 94

4.33 Comparaison des caractéristiques du simplex $S0$ et du treillis T pour un même $\frac{H}{\delta}$ dans le cas d'un rapport $\frac{D_s}{e}$ 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$). 95

4.34 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour d'autres hypothèses aboutissant à $\psi = 7.5$. 96

4.35 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour d'autres hypothèses aboutissant à $\psi = 7.5$. 97

4.36 Courbe d'efficacité comparant l'évolution des indicateurs de volume W optimaux et de déplacement nodal associé du simplex $S0$ et du treillis T, en fonction de l'indicateur de flambement. 98

5.1 Simplex $S1$ (a), $S2$ (b) et $S3$ (c). 106

5.2 Comparaison de la rigidité de $S1$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$). . . 108

5.3 Comparaison du volume de $S1$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$). . . 109

5.4 Comparaison de la rigidité de $S2$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$). . . 110

5.5 Comparaison du volume de $S2$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$). . . 111

5.6 Comparaison de la rigidité de $S3$ (a) et de $S0$ (b) pour un même volume ($\psi = 7.5$). . . 112

5.7 Comparaison du volume de $S3$ (a) et de $S0$ (b) pour une même rigidité ($\psi = 7.5$). . . 113

6.1 Illustration du scenario de chargement avec des composantes uniquement verticales. . 120

6.2 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, sous chargement uniquement vertical. 121

6.3 Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, dans un contexte de chargement uniquement vertical. 122

6.4 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement vertical. 124

6.5 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement vertical. 124

6.6 Illustration du scenario de chargement avec des composantes uniquement horizontales. 125

6.7 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, sous chargement uniquement horizontal. 126

6.8 Graphe de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour différents états de précontrainte $\frac{P}{F}$, dans un contexte de chargement uniquement horizontal. 127

6.9 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement uniquement horizontal. 128

6.10 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour un chargement horizontal. 128

6.11 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour un état de précontrainte donné et pour les différents contextes de chargement étudiés. 129

6.12 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour un état de précontrainte donné et pour les différents contextes de chargement étudiés. 130

6.13 Géométrie d'un quadruplex (a et b), d'un pentaplex (c et d) et d'un hexaplex (e et f) modélisés sur le logiciel *Grasshopper*. 132

6.14 Évolution de l'indicateur de volume W pour les différents modules prismatiques en tenségrité étudiés ($\psi = 7.5$). 134

6.15 Évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour les différents modules prismatiques en tenségrité étudiés ($\psi = 7.5$). 134

6.16 Comparaison des caractéristiques du quadruplex (a) et de son treillis homologue (b) pour un même indicateur de volume W ($\psi = 7.5$). 137

A.1 Élément de structure isolé dans le repère local $2D$ [37] [12]. 149

A.2 Élément de structure isolé dans le repère global $2D$[37][12]. 150

C.1 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 75$. 155

C.2 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, $\psi = 75$. 155

C.3 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, $\psi = 75$. 156

C.4 Graphe de l'évolution de l'indicateur de volume W et de la rigidité $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$, pour $\psi = 8.5$. 157

C.5 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 8.5$. 157

C.6 Comparaison de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ entre le $S0$ et le T, pour $\psi = 8.5$. 158

C.7 Comparaison des résultats de l'évolution de l'indicateur de volume W en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour des échelles géométriques différentes ($\psi = 75$). 158

C.8 Comparaison des résultats de l'évolution de l'indicateur de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ en fonction de l'indicateur d'élancement géométrique $\frac{H}{D}$ pour des échelles géométriques différentes ($\psi = 75$). 159

Liste des tableaux

1 Passage de l'incrément k et à l'incrément $k+1$ 35

2 Paramètres définissant une structure en tenségrité [28][36]. 48

3 Indicateurs morphologiques primaires. 49

4 Indicateurs morphologiques secondaires. 49

5 Indicateurs morphologiques secondaires pour les structures non-linéaires précontraintes. 50

6 Caractéristiques de l'acier et de l'aluminium. 65

7 Caractéristiques matérielles du $S0$. 65

8 Caractéristiques géométriques du $S0$. 66

9 Paramètres définissant le $S0$. 68

10 Indicateurs morphologiques définissant le $S0$. 70

11 Caractéristique du T optimisé pour un élancement $\frac{H}{D} = 1.25$. 81

12 Récapitulatif des valeurs du simplex $S0$ et du treillis T optimisés au chapitre précédent, respectivement pour une même rigidité et un même volume. 107

13 Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre le modèle simplex $S3$ et le treillis T ($\psi = 7.5$). 114

14 Comparaison des indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ entre le modèle simplex $S3$ et le treillis T ($\psi = 3$). 115

15 Angle optimal d'autocontrainte pour les différents modules en tenségrité. 133

16 Evolution du diamètre D_s des barres selon le modèle prismatique en tenségrité considéré, pour plusieurs états de précontrainte. 135

17 Indicateurs de volume W et de déplacement nodal $\frac{H}{\delta}$ pour le quadriplex sous différents états de précontrainte, et pour son homologue treillis. 136

18 Caractéristiques matérielles du simplex et leur valeur numérique. 153

19 Caractéristiques géométriques du simplex. 153

20 Scenario de chargement du cas d'étude initial. 153

21 Indicateurs morphologiques du cas d'étude initial. 153

22 Scenario de chargement du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 10x plus faible ($\psi = 24$). 154

23 Indicateurs morphologiques du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 10x plus faible ($\psi = 24$). 154

24 Scenario de chargement du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 100x plus faible ($\psi = 75$). 154

25 Indicateurs morphologiques du nouveau cas d'étude dont la charge appliquée est 100x plus faible ($\psi = 75$). 154

26 Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels du simplex pour le nouveau cas étudié dont le rapport $\frac{D_s}{e}$ est 1.25 fois plus faible ($\psi = 8.5$). . . . 156

27 Caractéristiques géométriques et indicateurs morphologiques adimensionnels du simplex pour le nouveau cas étudié dont le rapport $\frac{D_s}{e}$ est 6.5 fois plus grand ($\psi = 3$). 156

28 Caractéristiques mécaniques des diamètres de tubes en acier INOX. 160

29 Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement. 161

30 Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement. 161

31 Choix de nouvelles valeurs initiales pour un même indicateur de flambement. 161

Références

[1] Richard Buckminster Fuller. *Synergetics : Exploration in the Geometry of Thinking*. Harvard University. Macmillan Publishing Co., 1979.

[2] René Motro. *Tenségrité*. Hermés science, 2005.

[3] E.Heartney. *Kenneth Snelson : Art and ideas*. Marlborough gallery, NY, USA, 2013.

[4] Jérôme Quirant. *Systèmes de tenségrité et autocontrainte : qualification, sensibilité et incidence sur le comportement*. Université de Montpellier II, 2007.

[5] Sakamantamis Konstantinos. *Tensegrity systems : an architectural appreciation*. University of Sheffield, School of Architecture, 2001.

[6] Wikipédia. *Tenségrité*. (Consulté pour le dernière fois le 19/03/2025). 2025.

[7] René Motro. *Systèmes de tenségrité à double nappe et double courbure*. Ecole d'architecture Languedoc Roussillon, Montpellier, 1988.

[8] Wikipedia. *Richard Buckminster Fuller*. (Consulté pour le dernière fois le 19/03/2025). 2025.

[9] Maxime Caulier et Nicolas Bouchat. *Conception et construction d'une passerelle de tenségrité déployable en bambous : comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux*. UCLouvain, Année académique 2021-2022.

[10] Wikipédia. *Kenneth Snelson*. (Consulté pour le dernière fois le 24/03/2025). 2025.

[11] René Motro. *Chapter 8 : Tension Structures*. University of Montpellier, France, 2011. Chap. Section 8.3 : Tensegrity Structures.

[12] Igor Bouckaert. *Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires*. UCLouvain, Année académique 2018-2019.

[13] René Motro. *Tensegrity : from Art to Structural Engineering*. Laboratory of Mechanics et Civil Engineering, University of Montpellier, France, 2012.

[14] Wikipédia. *Needle Tower*. (Consulté pour le dernière fois le 24/03/2025). 2025.

[15] Matthew Church et Stephen Melville. *Lotus Aeroad-Pushing the scale of tensegrity structures*. Springer Nature Switzerland AG, 2024.

[16] Wikipédia. *Kurilpa Bridge*. (Consulté pour le dernière fois le 26/03/2025). 2025.

[17] Wikipédia. *The Georgia Dome*. (Consulté pour le dernière fois le 26/03/2025). 2025.

[18] Roberto Ferreira. *The Georgia Dome*. Artist.

[19] Julien Averseng, Frederic Jamin et Jérôme Quirant. *Système de tenségrité déployable et modulaire pour ke développement de l'accessibilité*. LMGC, Université de Montpellier, 2017.

[20] Damien Claeys. *La conception de structure en tenségrité : Analogies systémiques*. Faculté d'architecture, d'ingénierie architecturale et d'urbanisme (LOCI) ; Université catholique de Louvain (UCL), 2017.

[21] Anh-Dung Nguyen. *Etude du comportement mécanique et du pliage d'un anneau de tenségrité à base pentagonale*. Université de Montpellier II, sciences et techniques du Languedoc, 2009.

[22] Jonas Feron et Pierre Latteur. *Implementation and propagation of prestress forces in pin-jointed and tensegrity structures*. Univeristé Catholique de Louvain ; Institut of Mechanics, Materials, Civil Engineering (IMMC) ; Department of Civil et Environmental Engineering (GCE), 2023.

[23] Nicolas Veuve, Ann C. Sychterz et Ian F. Smith. *Adaptive control of a deployable tensegrity structure*. Applied Computing, Mechanics Laboratory (IMAC), Shcool of Architecture, Civil et Environmental Engineering (ENAC), Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), 2017.

[24] Landdolf-Giosef-Anastasios Rhode-Barbarigos. *An Active Deployable Tensegrity Structure*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2012.

[25] Alexis Bastien et Quentin Gravy. *Etude d'une passerelle de tenségrité composée de simplex*. UCLouvain, Année académique 2013-2014.

[26] Jonas Feron. *Optimisation des structures de tenségrité*. UCLouvain, Année académique 2015-2016.

[27] Lindy Boucher. *Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques*. UCLouvain, Année académique 2016-2017.

[28] Alexandre Flamant. *Tenségrité : Design, calcul et optimisation sur base d'une approche paramétrique*. UCLouvain, Année académique 2019-2020.

[29] Romain Antoine et Nicolas Danzin. *Structure en tenségrité : analyse critique des résultats numériques sur base d'essais expérimentaux sur un simplex instrumenté de grande taille*. UCLouvain, Année académique 2020-2021.

[30] Théo Houriez et Violette Labrouche. *Etude expérimentale d'une structure en tenségrité*. UCLouvain, Année académique 2022-2023.

[31] Pierre Latteur. *LGCIV1022 : Mécanique des structures*. UCLouvain, 2022.

[32] Pierre Latteur, Jonas Feron et Vincent Denoel. *A design methodology for lattice and tensegrity structures based on a stiffness and volume optimization algorithm using morphological indicators*. Université catholique de Louvain Belgique ; Université de Liège Belgique, 2017.

[33] Jonas Feron, Landolf Rhode-Barbarigos et Pierre Latteur. *Experimental testing of a tensegrity simplex : Self-stress implementation and static loading*. Institute of Mechanics, Materials et al., 2023.

[34] Jonas Feron et al. *Muscle : a new open-source Grasshopper plug-in for the interactive design of tensegrity structures*. Institute of Mechanics, Materials et Civil Engineering, UCLouvain, 2024.

[35] Pierre Latteur. *Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques*. Université libre de Bruxelles, 2000. Chap. Tome 1/4 : mémoire.

[36] Jonas Feron et al. *Optimization of footbridges composed of prismatic tensegrity modules*. Université catholique de Louvain Belgique, Univeristé de Liège Belgique. ASCE Journal of Bridge Engineering, 2019.

[37] João Almeida. *LGCIV1023 : Stabilité des structures*. UCLouvain, 2022.

[38] Sadel Stainless Steel. *Fiche technique tubes construction ronds INOX*. https ://www.sadel.be/fr/rvs-producten/tubes-de-construction-rond-rvs-inox-304l-316l-diametre-sadel/, 2025.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain
Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | **www.uclouvain.be/epl**