

Faculté des sciences

Produits de rente viagère et partage du risque de longévité.

Auteur: **Kubilay TULUMOGU**
Promoteur: **Pierre DEVOLDER**
Lecteur: **Jérôme BARBARIN**
Année académique 2024–2025
Master [120] en sciences actuarielles

Résumé

Ce travail étudie, dans le contexte belge, la conception et la tarification de la *Tail Index-Linked Annuity* (TILA), une rente dont les versements sont modulés par un indice de survie encadré par deux seuils. La mortalité est modélisée via une extension *multipopulation* du modèle de Lee–Carter, le modèle de Li–Lee, qui combine un facteur de tendance commun paneuropéen et une composante spécifique à la Belgique. La valorisation s’appuie sur une mesure de tarification construite au moyen de la *distorsion de probabilité de Wang* ; toutefois, l’absence de données de marché suffisantes, en particulier pour un produit récent comme la TILA, empêche un calibrage direct sur les prix de marché. Nous calibrons dès lors les *primes de risque* via un *ratio de Sharpe* cible. L’analyse s’appuie sur des simulations Monte-Carlo et des indicateurs prudentiels (perte future attendue, probabilité de perte, perte conditionnelle moyenne, VaR 99,5 %) pour comparer des portefeuilles mêlant rentes fixes et rentes TILA. Nos résultats indiquent que la TILA réduit le risque de queue et améliore la mutualisation du risque de longévité en Belgique, y compris en situation de stress, renforçant sa compatibilité avec Solvabilité II.

Mots-clés : risque de longévité ; TILA ; modèle de mortalité multipopulation ; indice de survie ; transformation de Wang ; mesure de tarification ; ratio de Sharpe cible.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Revue de la littérature	7
2.1	Tail Index Linked-Annuity	7
2.1.1	Définition	7
2.1.2	Fonctionnement du TILA	7
2.2	Utilité	8
2.3	Modélisation	10
2.3.1	Le modèle Li-Lee	10
2.3.2	Spécification du modèle de mortalité	11
2.3.3	Estimation des paramètres communs (A_x, B_x, K_t)	12
2.3.4	Calibration conditionnelle des ajustements locaux $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$	12
2.3.5	Projection	13
2.4	Pricing théorique du TILA	16
2.4.1	Cadre et notations	16
2.4.2	Règle de paiement	16
2.4.3	Prix risque-neutre	16
2.4.4	Courbe d'équité $B(z)$	17
2.4.5	Estimation pratique (Monte Carlo)	18
2.4.6	Mesure risque neutre	18
2.5	Robustesse du portefeuille	20
3	Résultats	23
3.1	Sensibilité market price of risk	23
3.1.1	Effet du taux sans risque	23
3.1.2	Effet du Sharpe ratio cible	24
3.1.3	Effet de l'âge	24
3.2	Analyse du produit TILA	25
3.2.1	Sensibilité TILA	28
4	Conclusion	33

5	Références	35
6	Annexes	39

Chapitre 1

Introduction

Introduction

Depuis plusieurs décennies, les pays développés connaissent un phénomène démographique majeur : le vieillissement accéléré de leur population. Cette évolution provient essentiellement des progrès remarquables en matière de santé, de médecine préventive et d'amélioration globale des conditions de vie (Milevsky et al. 2006). L'augmentation continue de l'espérance de vie est certes une victoire humaine et sociale, mais elle entraîne aussi des enjeux économiques complexes liés à la gestion des retraites et au financement des soins de santé. Ces défis découlent principalement de ce que les économistes et les actuaires appellent aujourd'hui le risque de longévité.

Le *risque de longévité* désigne la possibilité que la durée de vie réalisée d'individus ou de cohortes dépasse les niveaux anticipés par les tables de mortalité utilisées pour la tarification et la provision. Il en résulte des prestations versées plus longtemps que prévu et des engagements accrus pour les assureurs et les fonds de pension. (Milevsky et al. 2006). En d'autres termes, il existe une probabilité que la durée de vie réelle excède systématiquement les estimations initiales, entraînant des frais financiers plus importants et sur une plus longue période.

Au-delà des institutions privées, ce même risque pèse également sur les États et les régimes publics, les soins médicaux et les prestations sociales. Le vieillissement démographique rapide accentue la pression sur les finances publiques, d'autant plus que la proportion d'actifs, contribuant par leurs impôts et cotisations sociales, tend à diminuer relativement à celle des retraités (Milevsky et al. 2006) ; (Peijnenburg et al. 2016). Les individus eux-mêmes sont directement concernés, ils risquent de voir leur épargne accumulée tout au long de leur vie active devenir insuffisante à mesure que la durée effective de leur retraite s'allonge, augmentant ainsi leur vulnérabilité économique (Peijnenburg et al. 2016).

Toutefois, en théorie, la rente viagère représente une solution optimale à ce danger pour l'individu. Elle assure un revenu jusqu'à la fin de vie, supprimant ainsi l'incertitude associée à l'espérance de vie individuelle (Yaari 1965). En dépit de cet avantage théorique évident, l'utilisation des rentes reste faible, tant sur le continent européen qu'américain. Ce paradoxe, fréquemment désigné dans les écrits comme le « puzzle de l'annuitisation », est associé à divers éléments, y compris les préférences personnelles, le manque de liquidité des contrats offerts, ou encore des préjugés comportementaux liés à l'évaluation des risques (Peijnenburg et al. 2016).

Parallèlement aux solutions de conception produit, une littérature récente analyse le transfert du risque de longévité via des titres indexés. Zeddouk et Devolder (2022) montrent que l'adossement à une population de référence laisse subsister un *longevity basis risk* et proposent un *S-exchange* valorisé de manière cohérente avec Solvabilité II (méthode du *Cost of Capital*) dans un cadre multipopulation de type Hull–White, avec illustrations sur données belges.

Face à la complexité du marché, Chen et al. (2022) avancent la TILA. Hybride rente–tontine, elle prévoit des paiements constants sauf en cas de longévité exceptionnelle où s'applique un ajustement conditionnel. L'objectif est de rééquilibrer le risque de longévité entre assureurs et assurés tout en lissant les flux.

Ce travail s'organise comme suit : le chapitre 2 passe en revue la littérature et précise le fonctionnement de la TILA, les fondements de l'utilité et la modélisation de la mortalité (modèle de Li–Lee) ainsi que le cadre de tarification (mesure risque neutre via transformation de Wang). Le chapitre 3 présente le dispositif empirique, les scénarios et les principaux résultats, y compris les analyses de sensibilité au taux sans risque, au ratio de Sharpe et à l'âge d'entrée. Le chapitre 4 conclut.

Chapitre 2

Revue de la littérature

2.1 Tail Index Linked-Annuity

2.1.1 Définition

Le *Tail Index-Linked Annuity (TILA)* est un produit de retraite innovant proposé par Chen et al. (2022) conçu pour partager le risque de longévité entre les assureurs et les assurés. Ce produit ajuste les paiements annuels en fonction d'un indice de survie, permettant ainsi de mieux gérer les incertitudes liées à la mortalité future.

2.1.2 Fonctionnement du TILA

Indice de survie

L'indice de survie Y_t mesure la proportion de survivants dans une population de référence à un instant t . Cet indice est utilisé pour ajuster les paiements des rentes en fonction des taux de mortalité observés.

Structure des paiements

Les paiements annuels $B(t)$ dans le TILA sont déterminés par l'indice de survie Y_t et sont ajustés en fonction des seuils prédéfinis L_t et U_t . La formule des paiements est la suivante :

$$B(t) = \begin{cases} B, & Y_t \leq L_t, \\ z + \frac{B - z}{U_t - L_t} (U_t - Y_t), & L_t < Y_t < U_t, \\ z, & Y_t \geq U_t. \end{cases} \quad (2.1)$$

ou de manière compacte

$$B(t) = z + \frac{B - z}{U_t - L_t} (\max\{U_t - Y_t, 0\} - \max\{L_t - Y_t, 0\}).$$

où :

- B est le paiement nominal en années normales.
- z est le paiement réduit en cas de survie améliorée.
- L_t est le seuil inférieur de l'indice de survie.
- U_t est le seuil supérieur de l'indice de survie.

Seuils de survie

Les seuils L_t et U_t sont choisis pour déterminer les conditions de paiement :

- L_t : Ce seuil est fixé pour indiquer une mortalité normale. Si l'indice de survie Y_t est inférieur ou égal à L_t , les paiements sont au niveau nominal B .
- U_t : Ce seuil est fixé pour indiquer une mortalité améliorée. Si l'indice de survie Y_t est supérieur ou égal à U_t , les paiements sont réduits au niveau z .
- Entre L_t et U_t : Si l'indice de survie Y_t se situe entre L_t et U_t , les paiements sont ajustés linéairement entre B et z .

2.2 Utilité

Les fonctions d'utilité paramétriques décrivent l'utilité au sens de von Neumann–Morgenstern au moyen d'un ou plusieurs paramètres, qui offrent une manière concise de caractériser l'aversion au risque des agents économiques (Darmon et al. 2021).

Nous nous intéressons à la fonction d'utilité de type puissance (CRRA) :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, & \gamma \neq 1, \\ \ln(x), & \gamma = 1, \end{cases}$$

$$\text{Indice d'Arrow-Pratt absolu : } R_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{\gamma}{x},$$

$$\text{Indice d'Arrow-Pratt relatif : } R_R(x) = x R_A(x) = \gamma.$$

L'indice relatif d'Arrow-Pratt, noté $R(x)$, obtenu en multipliant l'indice absolu, noté $A(x)$, par la richesse x correspond à l'élasticité-richeesse de l'utilité marginale. Il mesure la sensibilité proportionnelle de l'utilité marginale aux variations de richesse, c.-à-d. qu'il permet de mieux prendre en compte le niveau de richesse (de Palma et al. 2009).

Dans le cas d'une fonction d'utilité à puissance (CRRA), l'indice relatif d'Arrow-Pratt reste inchangé quel que soit le niveau de richesse. Cette constance facilite les développements, l'indice coïncide exactement avec le paramètre d'aversion relative au risque, γ . Plus γ est élevé, plus l'agent manifeste une aversion au risque proportionnelle marquée.

Par ailleurs, on appelle *équivalent certain* d'une loterie le montant garanti qui procure à l'agent la même utilité que ladite loterie (Chassagnon, 2017), c'est-à-dire le niveau de richesse pour lequel l'individu se déclare indifférent entre toucher ce montant sûr et conserver le billet de loterie (Darmon et al. 2021).

Notons $B(t)$ le paiement au temps t , $\beta = e^{-\rho}$ le facteur d'actualisation, $\mathbf{1}_{\{T_x > t\}}$ l'indicateur "vivant à t ", et $S_t = \mathbb{P}(T_x > t)$ la probabilité correspondante. L'utilité vie entière anticipée associée au contrat s'écrit alors

$$U(\{B(t)\}) = \sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t \mathbb{E}[u(B(t)) \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}]. \quad (2.2)$$

Dans le cas d'un TILA (2.1), les trois événements $\{Y_t \leq L_t\}$, $\{L_t < Y_t < U_t\}$ et $\{Y_t \geq U_t\}$ forment une partition, on peut écrire, pour tout t ,

$$u(B(t)) = u(B) \mathbf{1}_{\{Y_t \leq L_t\}} + u\left(z + \frac{B-z}{U_t-L_t}(U_t - Y_t)\right) \mathbf{1}_{\{L_t < Y_t < U_t\}} + u(z) \mathbf{1}_{\{Y_t \geq U_t\}}. \quad (2.3)$$

L'équation (2.2) peut être écrite

$$U(\{B(t)\}) = \sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t \left\{ u(B) \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_t \leq L_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}] + \mathbb{E}\left[u\left(z + \frac{B-z}{U_t-L_t}(U_t - Y_t)\right) \mathbf{1}_{\{L_t < Y_t < U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\right] + u(z) \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y_t \geq U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}] \right\}. \quad (2.4)$$

L'*équivalent certain* CE est défini comme le montant constant qui procure exactement la même utilité vie entière :

$$\sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t S_t u(CE) = \sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t \mathbb{E}[u(B(t)) \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}]. \quad (2.5)$$

Comme $u(CE)$ ne dépend pas du temps, on factorise le membre de gauche. En posant $D = \sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t S_t$, on isole

$$u(CE) = \frac{U(\{B(t)\})}{D} \quad \Rightarrow \quad CE = u^{-1} \left(\frac{\sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t \mathbb{E}[u(B(t)) \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}]}{\sum_{t=1}^{\omega_x} \beta^t S_t} \right).$$

On applique l'inverse u^{-1} car l'égalité (2.5) compare d'abord des *utilités*, on calcule une moyenne (pondérée) de $u(B(t))$ en unités de satisfaction, pas en euros. Pour revenir à un *montant monétaire certain* qui produise la même utilité, il faut inverser la fonction d'utilité.

Pour comparer deux options risquées, par exemple un contrat TILA et une rente classique, il convient de les ramener à leurs équivalents certains respectifs. L'alternative affichant l'équivalent certain le plus élevé procure, par construction, l'utilité espérée la plus forte ; c'est donc celle qu'un agent rationnel choisira de privilégier (Darmon et al. 2021).

2.3 Modélisation

2.3.1 Le modèle Li–Lee

Les trajectoires de mortalité dans des populations étroitement liées (pays développés, sexes, régions géographiquement proches) présentent souvent des similarités structurelles. Bien que des écarts ponctuels puissent exister, ceux-ci tendent généralement à se stabiliser, voire à converger à long terme. Partant de ce constat, on peut enrichir les projections de mortalité pour un pays en tirant parti des tendances observées dans un panel de populations comparables.

Dans Li et Lee (2005), la dynamique de mortalité est décomposée en une tendance commune inter-populations et un terme d'ajustement spécifique à la population cible, constituant ainsi une extension multipopulation du modèle de Lee–Carter.

Nous nous basons sur des données issues d'un ensemble de 14 pays européens, à savoir : la Belgique, les Pays-Bas, le Luxembourg, la Norvège, la Suisse, l'Autriche, l'Irlande, la Suède, le Danemark, l'Allemagne de l'Ouest, la Finlande, l'Islande, l'Angleterre et le Pays de Galles ainsi que la France. Chaque pays a un PIB par habitant qui dépasse la moyenne de l'Europe.

Le choix de n'inclure que des pays dont le PIB par habitant dépasse la moyenne européenne repose sur l'idée qu'un niveau de vie élevé se traduit généralement par des systèmes de santé plus performants, une meilleure nutrition et des politiques sociales plus développées. En considérant uniquement des pays aux caractéristiques économiques comparables, on s'assure que les tendances observées dans l'évolution de la mortalité ne soient pas faussées par des disparités majeures en matière d'accès aux soins ou de conditions de vie. Cette homogénéité socio-économique renforce la pertinence du « trend » européen commun et permet de distinguer plus clairement la déviation propre à la Belgique .

2.3.2 Spécification du modèle de mortalité

Soit $\mu_{x,t}^{\text{BE}}$ la force de mortalité à l'âge x et à l'année t pour la Belgique. Le modèle Li–Lee décompose le logarithme de cette force en deux composantes :

$$\ln \mu_{x,t}^{\text{BE}} = \ln \mu_{x,t}^{\text{EU}} + \ln \mu_{x,t}^{\text{D}}, \quad (2.6)$$

où

- $\mu_{x,t}^{\text{EU}}$ représente la tendance de mortalité commune à l'ensemble des pays étudiés (ici l'Europe)
- $\mu_{x,t}^{\text{D}}$ est le ratio (ou écart) entre la mortalité belge et la mortalité européenne.

Chacune de ces composantes est modélisée selon la forme bilinéaire de Lee–Carter :

$$\ln \mu_{x,t}^{\text{EU}} = A_x + B_x K_t, \quad (2.7)$$

$$\ln \mu_{x,t}^{\text{D}} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t, \quad (2.8)$$

avec :

- A_x : niveau moyen de la log-mortalité selon l'âge, estimé sur le panel ;
- B_x : sensibilité de l'âge x au facteur commun K_t ;
- K_t : facteur de période global reflétant l'évolution générale de la mortalité ;
- α_x : décalage moyen de la log-mortalité belge par rapport à la tendance paneuropéenne ;
- β_x : sensibilité des âges belges à l'écart κ_t ;
- κ_t : facteur temporel propre à l'écart.

En combinant (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\ln \mu_{x,t}^{\text{BE}} = A_x + B_x K_t + \alpha_x + \beta_x \kappa_t. \quad (2.9)$$

Le facteur commun K_t suit une marche aléatoire avec dérive :

$$K_{t+1} = K_t + \theta + \varepsilon_{t+1}, \quad (2.10)$$

avec θ la dérive et (ε_t) un bruit blanc de variance σ_K^2 .

Le facteur d'écart κ_t est modélisé par un AR(1) :

$$\kappa_{t+1} = a\kappa_t + \delta_{t+1}, \quad (2.11)$$

2.3.3 Estimation des paramètres communs (A_x, B_x, K_t)

L'objectif de la calibration du modèle de mortalité Li-Lee est d'extraire d'abord une tendance commune à plusieurs populations, puis d'ajuster finement cette tendance aux spécificités de la population cible.

On part de l'hypothèse que, pour chaque âge x et chaque année t du panel, le nombre de décès observé $D_{x,t}$ suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda_{x,t} = E_{x,t} \mu_{x,t},$$

c'est-à-dire

$$D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t} \mu_{x,t}).$$

avec

$$\mu_{x,t} = \exp(A_x + B_x K_t),$$

$E_{x,t}$ est l'exposition au risque, A_x et B_x sont respectivement le niveau et la sensibilité de la log-mortalité à l'âge x , et K_t le facteur de période commun.

La vraisemblance jointe s'écrit alors

$$L(A, B, K) = \prod_{x,t} \frac{(E_{x,t} \exp(A_x + B_x K_t))^{D_{x,t}}}{D_{x,t}!} \exp(-E_{x,t} \exp(A_x + B_x K_t)).$$

Sans contrainte, les triplets (A_x, B_x, K_t) ne sont pas identifiables : on impose classiquement

$$\sum_x B_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_t K_t = 0,$$

ce qui fixe l'échelle et le point de repère du facteur commun. L'estimation s'effectue par un algorithme itératif qui maximise la log-vraisemblance sous ces contraintes.

2.3.4 Calibration conditionnelle des ajustements locaux $(\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$

Pour la population cible, on introduit un terme d'ajustement qui corrige l'écart par rapport à la tendance commune. On suppose que le nombre de décès $D_{x,t}^*$ suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda_{x,t}^* = E_{x,t}^* \exp(\hat{A}_x + \hat{B}_x \hat{K}_t + \alpha_x + \beta_x \kappa_t),$$

où α_x ajuste le niveau selon l'âge, β_x en mesure la sensibilité à l'écart κ_t , et $E_{x,t}^*$ est l'exposition de la population cible.

La vraisemblance conditionnelle s'écrit

$$L(\alpha, \beta, \kappa) = \prod_{x,t} \frac{\left(E_{x,t}^* \exp(\hat{A}_x + \hat{B}_x \hat{K}_t + \alpha_x + \beta_x \kappa_t)\right)^{D_{x,t}^*}}{D_{x,t}^*!} \exp\left(-E_{x,t}^* \exp(\hat{A}_x + \hat{B}_x \hat{K}_t + \alpha_x + \beta_x \kappa_t)\right).$$

Les contraintes d'identifiabilité sont réappliquées pour β_x et κ_t :

$$\sum_x \beta_x = 1, \quad \sum_t \kappa_t = 0.$$

L'optimisation fournit alors les estimés $(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t)$, qui traduisent précisément les déviations propres à la population étudiée.

Nous présentons les estimations des paramètres obtenus pour les données unisex dans la figure 2.1 (paramètres communs) et la figure 2.2 (paramètres belges).

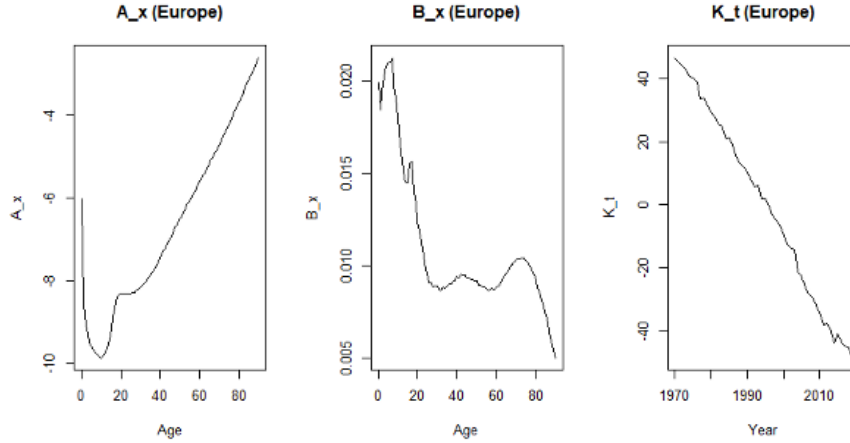


FIGURE 2.1 – Paramètres estimés pour les facteurs communs, données unisex, âges 0-90, années 1970-2019 : A_x , B_x et K_t .

2.3.5 Projection

Nous débutons par l'ajustement des séries temporelles K_t et κ_t pour la période allant de 1970 à 2019. Nous supposons que les termes d'erreur $(\varepsilon_t, \delta_t)$ adhèrent à une distribution normale bivariée de moyenne zéro et de matrice de covariance C , et qu'ils sont i.i.d d'une année à l'autre. On procède ensuite à la détermination des coefficients de la dérive θ , de l'autocorrélation a et de la matrice C par estimation du maximum de vraisemblance.

Une fois les paramètres de séries temporelles calibrés, nous générons des trajectoires de mortalité de la manière suivante. Pour chaque scénario i (allant de 1 à N),

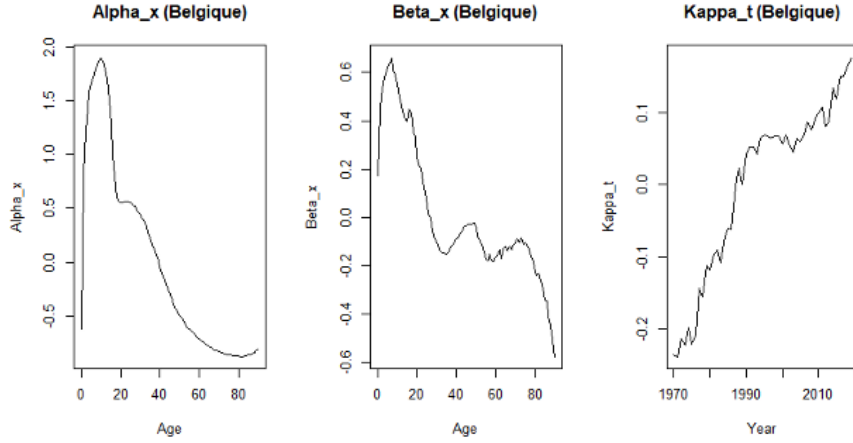


FIGURE 2.2 – Paramètres estimés pour la Belgique, données unisex, âges 0-90, années 1970-2019 : α_x , β_x et κ_t .

nous partons des valeurs estimées en 2019, $(K_{2019}, \kappa_{2019})$, puis nous étendons ces deux suites jusqu'à l'année cible T en appliquant chaque année les dynamiques :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + \theta + \varepsilon_{t+1}, \\ \kappa_{t+1} &= a \kappa_t + \delta_{t+1}, \end{aligned}$$

où, pour chaque pas de temps, $(\varepsilon_{t+1}, \delta_{t+1})$ est tiré d'une loi normale bivariée de moyenne nulle et de matrice de covariance C .

Lorsque nous disposons des trajectoires simulées (K_t^i, κ_t^i) pour $t = 2020, \dots, T$, nous calculons, pour chaque âge x , la force de mortalité simulée $\mu_{x,t}^i$ selon :

$$\ln \mu_{x,t}^i = (A_x + B_x K_t^i) + (\alpha_x + \beta_x \kappa_t^i).$$

La figure 2.3 présente la projection des séries temporelles K_t (à gauche) et κ_t (à droite).

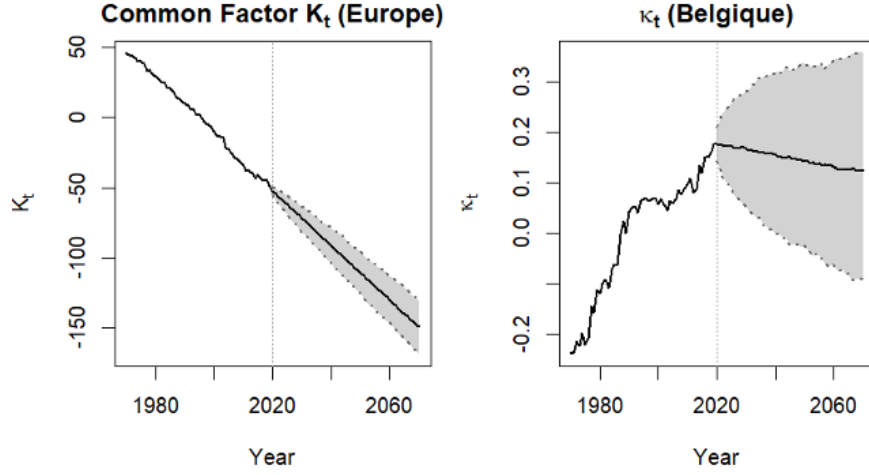


FIGURE 2.3 – Projection des séries temporelles K_t et κ_t . Le fanchart représente la bande de prévision formée par le 5% quantile, la médiane et le 99,5% quantile.

Au-delà de 90 ans, les données de décès et d'exposition deviennent très aléatoires et peu fiables (faibles effectifs, erreurs d'enregistrement, etc.), si bien qu'on préfère les remplacer par une loi paramétrique dédiée plutôt que de s'appuyer directement sur les observations. C'est pourquoi la table de mortalité est prolongée jusqu'à 120 ans en appliquant la loi de Kannistö. Pour chaque scénario simulé i et chaque année t , la force de mortalité $\mu_{x,t}^i$ pour $x > 90$ est donnée par

$$\mu_{x,t}^i = \frac{A_t^i \exp(B_t^i x)}{1 + A_t^i \exp(B_t^i x)},$$

où les paramètres A_t^i et B_t^i sont calibrés à partir des âges 80 à 90.

Ils sont obtenus en régressant, par la méthode des moindres carrés ordinaires, la transformation logit de $\mu_{x,t}^i$ sur l'âge x :

$$\text{logit}(\mu_{x,t}^i) = \ln\left(\frac{\mu_{x,t}^i}{1-\mu_{x,t}^i}\right) = \ln A_t^i + B_t^i x.$$

Les coefficients estimés $\ln A_t^i$ et B_t^i sont ensuite substitués dans la première formule pour générer les taux de mortalité simulés jusqu'à 120 ans.

Enfin, nous convertissons ces valeurs en taux de mortalité $q_{x,t}^i$ par

$$q_{x,t}^i = 1 - \exp(-\mu_{x,t}^i),$$

pour tous les âges $x \in 0, 1, \dots, 120$ et $t = 2020, 2021, \dots, T$.

2.4 Pricing théorique du TILA

2.4.1 Cadre et notations

On fixe l'âge d'entrée x_0 , l'horizon $\omega_x = 120 - x_0$ et un taux sans risque constant r . L'évaluation se fait sous une mesure de tarification $\mathbb{Q}$ (définie au chapitre suivant). On considère :

- la population de référence (1), qui porte l'indice de survie

$$Y_t \equiv \prod_{s=1}^t \tilde{p}_{x_0+s-1,s}^{(1)}, \quad (2.12)$$

où $\tilde{p}_{x,s}^{(1)}$ désigne une probabilité annuelle de survie (sous $\mathbb{Q}$) ;

- la population assurée (2), avec $\tilde{p}_{x_0,t}^{(2)} := \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(T_x > t)$ la probabilité d'être vivant en t .

Les seuils $L_t < U_t$ sont fixés ex ante comme quantiles de Y_t sous $\mathbb{Q}$:

$$L_t = q_{\alpha_L}(Y_t), \quad U_t = q_{\alpha_U}(Y_t), \quad 0 < \alpha_L < \alpha_U < 1. \quad (2.13)$$

2.4.2 Règle de paiement

Pour un nominal B et un plancher z avec $0 \leq z \leq B$, le flux au temps t est

$$B(t) = \begin{cases} B, & \text{si } Y_t \leq L_t, \\ z + \frac{B-z}{U_t - L_t} (U_t - Y_t), & \text{si } L_t < Y_t < U_t, \\ z, & \text{si } Y_t \geq U_t. \end{cases} \quad (2.14)$$

Une forme compacte équivalente est

$$B(t) = z + \frac{B-z}{U_t - L_t} \left(\max\{U_t - Y_t, 0\} - \max\{L_t - Y_t, 0\} \right). \quad (2.15)$$

2.4.3 Prix risque-neutre

La prime unique (par unité de capital) est la valeur actuelle espérée des flux conditionnels à la survie :

$$W_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} B(t) \mathbf{1}_{\{T_x > t\}} \right]. \quad (2.16)$$

Pour expliciter (2.16), posons pour chaque t les poids (sous $\mathbb{Q}$) :

$$H_t^{\leq} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{Y_t \leq L_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}], \quad (2.17)$$

$$H_t^{\geq} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{Y_t \geq U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}], \quad (2.18)$$

$$M_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{U_t - Y_t}{U_t - L_t} \mathbf{1}_{\{L_t < Y_t < U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\right]. \quad (2.19)$$

On obtient alors l'expression linéaire en (B, z) :

$$\begin{aligned} W_0 &= \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} \left(B H_t^{\leq} + z H_t^{\geq} + (B - z) M_t \right) \\ &= \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} \left((H_t^{\leq} + M_t) B + (H_t^{\geq} - M_t) z \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4.4 Courbe d'équité $B(z)$

Proposition. Pour des seuils $(L_t, U_t)_t$ fixés, l'ensemble des couples (B, z) satisfaisant (2.16) est donné par la courbe

$$B(z) = \frac{W_0 - \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} z (H_t^{\geq} - M_t)}{\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} (H_t^{\leq} + M_t)}. \quad (2.21)$$

Esquisse. Isoler B dans (2.20).

Propriétés.

1. **Variation en fonction du plancher.** La courbe $B(z)$ décroît avec z . Plus précisément,

$$B'(z) = - \frac{\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} (H_t^{\geq} - M_t)}{\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} (H_t^{\leq} + M_t)} \leq 0,$$

car $H_t^{\geq} - M_t \geq 0$

2. **Plancher nul.** À $z = 0$, le nominal compatible avec la prime W_0 vaut

$$B(0) = \frac{W_0}{\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} (H_t^{\leq} + M_t)}.$$

Comme B est décroissante, $B(0)$ constitue la borne supérieure lorsque le plancher n'est pas contraint.

3. **Rente fixe en limite.** Lorsque z tend vers B , la règle TILA se réduit à un paiement constant z et la condition de tarification impose

$$W_0 = \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} z {}_t\tilde{p}_x^{(2)}$$

où ${}_t\tilde{p}_x^{(2)}$ désigne la probabilité t -années de survie sous $\mathbb{Q}$ pour la population assurée.

2.4.5 Estimation pratique (Monte Carlo)

Sous $\mathbb{Q}$, on simule des trajectoires conjointes $\{Y_t, \mathbf{1}_{\{T_x > t\}}\}_{t \leq \omega_x}$. Les estimateurs naturels sont

$$\widehat{H}_t^{\leq} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{Y_t^{(n)} \leq L_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x^{(n)} > t\}}, \quad (2.22)$$

$$\widehat{H}_t^{\geq} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{Y_t^{(n)} \geq U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x^{(n)} > t\}}, \quad (2.23)$$

$$\widehat{M}_t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{U_t - Y_t^{(n)}}{U_t - L_t} \mathbf{1}_{\{L_t < Y_t^{(n)} < U_t\}} \mathbf{1}_{\{T_x^{(n)} > t\}}. \quad (2.24)$$

Injectés dans (2.21), ils permettent de tracer la courbe d'échange (B, z) .

2.4.6 Mesure risque neutre

Prenons une variable aléatoire X (par exemple un taux de mortalité) décrite par la fonction de répartition F_P sous la mesure réelle $\mathbb{P}$. La *transformée de Wang* définit la répartition sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ par :

$$F_Q(x) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(F_P(x)\right) + \lambda\right),$$

où Φ est la CDF de la loi normale centrée réduite et λ la *prime de risque*, qui fait glisser la distribution vers des scénarios plus défavorables à l'assureur. On procède en trois étapes :

1. convertir la probabilité $F_P(x)$ en un score- z via Φ^{-1} ;
2. ajouter la prime λ ;
3. revenir à l'échelle des probabilités en appliquant Φ .

Selon Shaun Wang (2007), si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, cette manipulation se traduit par un *déplacement de la moyenne* :

$$X^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(\mu + \lambda \sigma, \sigma^2).$$

La variance reste inchangée, seule l'espérance est rehaussée de $\lambda\sigma$.

Dans le modèle Li & Lee, sous la mesure réelle $\mathbb{P}$ les deux facteurs temporels évoluent selon :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + \theta + \varepsilon_{t+1}, & \varepsilon_{t+1} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2), \\ \kappa_{t+1} &= a \kappa_t + \delta_{t+1}, & \delta_{t+1} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2). \end{aligned}$$

En appliquant cette à ces innovations, on décale :

$$\varepsilon_{t+1}^{\mathbb{Q}} = \varepsilon_{t+1} + \lambda_1 \sigma_1, \quad \delta_{t+1}^{\mathbb{Q}} = \delta_{t+1} + \lambda_2 \sigma_2.$$

Les dynamiques sous la mesure neutre $\mathbb{Q}$ deviennent alors :

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= K_t + (\theta + \lambda_1 \sigma_1) + \varepsilon_{t+1}, \\ \kappa_{t+1} &= a \kappa_t + (\lambda_2 \sigma_2) + \delta_{t+1}. \end{aligned}$$

On remplace K_t, κ_t par leurs trajectoires $\mathbb{Q}$ dans la formule Li & Lee :

$$\ln \mu_{x,t} = (A_x + B_x K_t) + (\alpha_x + \beta_x \kappa_t).$$

La force neutre $\mu_{x,t}^{\mathbb{Q}}$ en découle, puis les taux de mortalité sous mesure risque neutre :

$$q_{x,t}^{\mathbb{Q}} = 1 - \exp(-\mu_{x,t}^{\mathbb{Q}}).$$

La procédure de Milevsky *et al.* (2006) consiste à imposer un Sharpe ratio cible η à deux portefeuilles d'annuités, l'un adossé à la population de référence (pop. 1), l'autre à la population assurée (pop. 2). L'objectif est de déterminer les primes de risque λ_1 et λ_2 de manière à ce que, pour chaque portefeuille, le ratio

$$\eta = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X(L_x^{(i)})] - \mathbb{E}_P[X(L_x^{(i)})]}{\sqrt{\text{Var}_P[X(L_x^{(i)})]}}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

soit atteint.

On considère un portefeuille de $L_x^{(i)}$ rentes viagères pour la cohorte d'âge x dans la population i . La valeur actuelle aléatoire des paiements est

$$X(L_x^{(i)}) = L_x^{(i)} \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} 1_{\{T_x^{(i)} > t\}},$$

où $T_x^{(i)}$ désigne la durée de vie restante. Sous la mesure physique,

$$\mathbb{E}_P[X(L_x^{(i)})] = L_x^{(i)} \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} {}_t p_x^{(i)}.$$

La variance se décompose en un terme systématique et un terme diversifiable :

$$\begin{aligned} \text{Var}_P[X(L_x^{(i)})] &= (L_x^{(i)})^2 \text{Var}_P\left[\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} 1_{\{T_x^{(i)} > t\}}\right] \\ &+ L_x^{(i)} \mathbb{E}_P\left[\text{Var}_P\left(\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} 1_{\{T_x^{(i)} > t\}} \mid \mathcal{F}^{(i)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Lorsque $L_x^{(i)} \rightarrow \infty$, la seconde composante disparaît et

$$\lim_{L_x^{(i)} \rightarrow \infty} \frac{1}{L_x^{(i)}} \text{SD}_P[X(L_x^{(i)})] = \text{SD}_P\left[\sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} {}_t p_x^{(i)}\right]. \quad (18)$$

Les probabilités de survie neutres au risque sont notées

$${}_t \tilde{p}_x^{(1)}(\lambda_1), \quad {}_t \tilde{p}_x^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2),$$

la première ne dépendant que de λ_1 . Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[X(L_x^{(1)})] &= L_x^{(1)} \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} {}_t \tilde{p}_x^{(1)}(\lambda_1), \\ \mathbb{E}_Q[X(L_x^{(2)})] &= L_x^{(2)} \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} {}_t \tilde{p}_x^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned}$$

2.5 Robustesse du portefeuille

Dans cette section, nous évaluons la robustesse du portefeuille face aux aléas de longévité. On considère une cohorte de l_x rentiers d'âge initial x . Le portefeuille « rentes classiques » sert des paiements fixes tant que l'assuré est vivant ; le portefeuille « mixte » combine une fraction a de rentes classiques et une fraction $1 - a$ de rentes indexées TILA. Cette architecture reprend la règle de paiement posée plus haut.

Passif actualisé du portefeuille

Notons $z_{A,i}$ le paiement annuel de la rente classique du i -ème assuré, et (B_i, z_i) les paramètres de sa rente TILA. La valeur actuelle aléatoire des engagements s'écrit :

Portefeuille 100 % rentes classiques

$$L_A = \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} \sum_{i=1}^{l_x} \mathbf{1}_{\{T_x^i > t\}} z_{A,i}.$$

Portefeuille mixte

$$L_{\text{MIX}} = \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} \sum_{i=1}^{al_x} \mathbf{1}\{T_x^i > t\} z_{A,i} + \sum_{t=1}^{\omega_x} e^{-rt} \sum_{i=al_x+1}^{l_x} \mathbf{1}\{T_x^i > t\} \left[z_i + \frac{B_i - z_i}{U_t - L_t} \left(\max\{U_t - Y_t, 0\} - \max\{L_t - Y_t, 0\} \right) \right].$$

La première ligne représente les flux fixes des rentes ordinaires ; la seconde, les flux TILA qui se réduisent automatiquement dans les scénarios de longévité exceptionnelle, ce qui amortit le risque en queue pour l'assureur.

On mesure la performance réalisée par rapport à la réserve constituée à l'émission. Appelons $\tilde{L}_X$ la « perte future actualisée » du portefeuille $X \in \{A, \text{MIX}\}$:

$$\tilde{L}_X = L_X - \mathbb{E}_Q[L_X].$$

Autrement dit, on compare la valeur réalisée (simulée sous la mesure historique $\mathbb{P}$) au passif attendu sous la mesure de tarification Q . $\tilde{L}_X > 0$ signifie une perte économique pour l'assureur ; $\tilde{L}_X < 0$ signifie un gain.

Quatre indicateurs de risque

Notations communes : Soit un échantillon Monte-Carlo $\{\tilde{L}_{X,p}\}_{p=1}^N$.

— Perte future attendue

$$EL_X = \mathbb{E}[\tilde{L}_X], \quad \widehat{EL}_X = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \tilde{L}_{X,p}.$$

— Probabilité de perte

$$p_{\text{loss},X} = \mathbb{P}(\tilde{L}_X > 0), \quad \hat{p}_{\text{loss},X} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \mathbf{1}_{\{\tilde{L}_{X,p} > 0\}}.$$

— Perte conditionnelle moyenne par contrat

$$\frac{CEL_X}{\text{contrat}} = \frac{1}{l_x} \mathbb{E}[\tilde{L}_X \mid \tilde{L}_X > 0], \quad \frac{\widehat{CEL}_X}{\text{contrat}} = \frac{1}{l_x} \cdot \frac{\sum_{p=1}^N \tilde{L}_{X,p} \mathbf{1}_{\{\tilde{L}_{X,p} > 0\}}}{\sum_{p=1}^N \mathbf{1}_{\{\tilde{L}_{X,p} > 0\}}}.$$

— VaR à 99,5 %

$$\text{VaR}_{99.5\%}(\tilde{L}_X) = \inf\{\ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\tilde{L}_X \leq \ell) \geq 0.995\},$$

$$\widehat{\text{VaR}}_{99.5\%}(\tilde{L}_X) = \text{quantile}_{0.995}(\{\tilde{L}_{X,p}\}_{p=1}^N).$$

Nous reportons ces quatre indicateurs pour (i) le portefeuille 100 % rentes classiques et (ii) des portefeuilles mixtes où $a \in \{0,9,0,5,0,1\}$. On observe systématiquement : (i) une moyenne des pertes qui se renverse (positive $\rightarrow$ négative) quand on augmente la part TILA, (ii) une probabilité de perte qui tombe presque à zéro, et (iii) une VaR 99,5 % qui recule fortement, signe d'une meilleure maîtrise du risque extrême. Ces tendances valent en régime normal et restent visibles sous choc Solvabilité II.

Chapitre 3

Résultats

3.1 Sensibilité market price of risk

Dans le but d'évaluer la robustesse du calibrage, nous avons examiné l'incidence de trois paramètres exogènes : le taux sans risque r , le Sharpe ratio cible η et l'âge initial x . Pour chaque jeu de valeurs, les équations de Sharpe sont résolues numériquement afin de reproduire la rémunération exigée par le marché, ce qui fournit un couple (λ_1, λ_2) .

3.1.1 Effet du taux sans risque

La figure 3.1 nous montre que lorsque r augmente de 0,5% à 4%, la prime systémique λ_1 décroît presque linéairement. Une actualisation plus forte réduit en effet la contribution des flux lointains dans le prix de la rente, limitant l'impact financier d'une amélioration de la longévité européenne. Parallèlement, la prime spécifique λ_2 s'élève : la même hausse de taux met en lumière la part non mutualisable du risque belge.

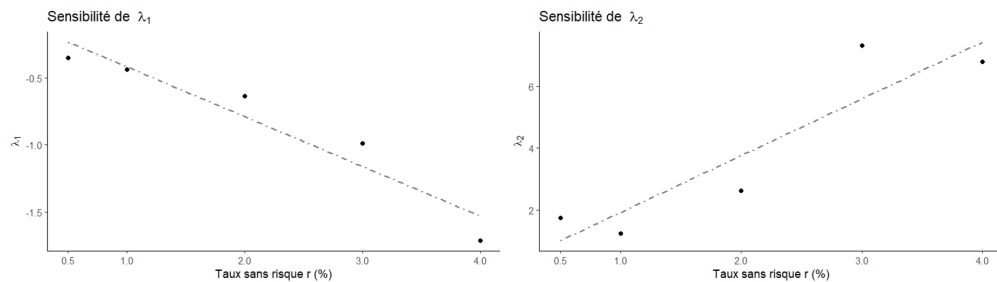


FIGURE 3.1 – Variation (λ_1, λ_2) en fonction du taux d'intérêt sans risque

3.1.2 Effet du Sharpe ratio cible

En faisant varier η entre 4% et 12%, on observe que λ_1 se décale vers des valeurs plus négatives : le modèle prolonge alors l'espérance de vie projetée pour dégager le rendement exigé. La réaction de λ_2 reste positive mais moins régulière ; la prime nationale absorbe le résidu de risque après l'ajustement du composant commun.

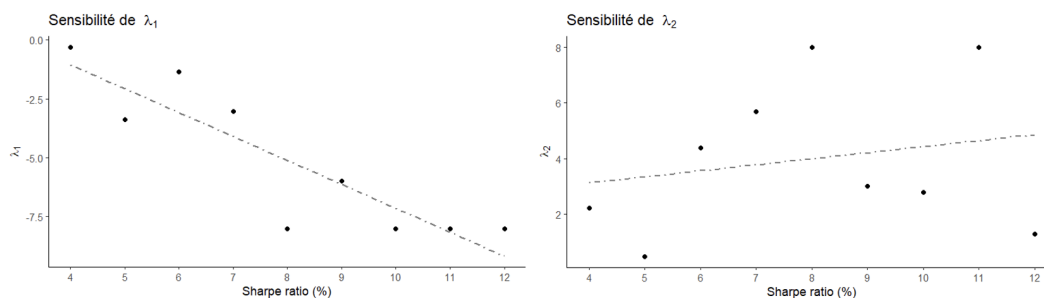


FIGURE 3.2 – Variation (λ_1, λ_2) en fonction du ratio de sharpe

3.1.3 Effet de l'âge

L'âge initial, testé de 65 à 70 ans, influence surtout la prime systémique. Un âge élevé raccourcit l'horizon des flux à risque ; la dérive additionnelle imposée à K_t se réduit, d'où un λ_1 en baisse. Le profil de λ_2 montre une inclinaison douce et ascendante, indiquant qu'un assuré plus âgé prend en charge proportionnellement plus de risques locaux.

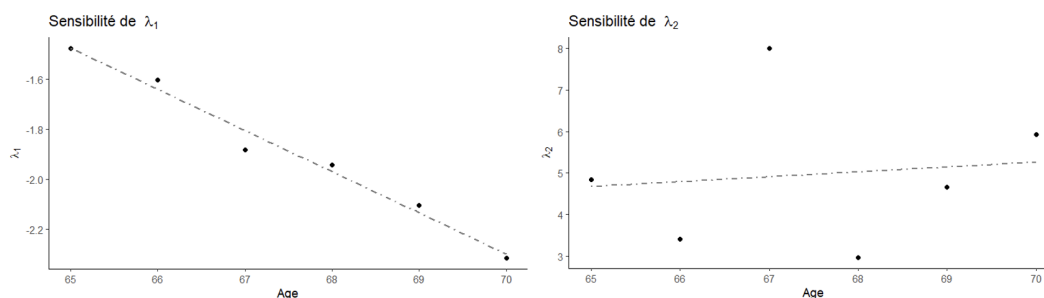


FIGURE 3.3 – Variation (λ_1, λ_2) en fonction de l'âge initial

λ_1 demeure dominé par les conditions macrofinancières affectant l'ensemble de la zone d'observation, tandis que λ_2 ajuste la composante propre à la Belgique, très sensible aux variations du taux sans risque et, dans une moindre mesure, aux choix de Sharpe et d'âge.

3.2 Analyse du produit TILA

Cette section détaille la mise en oeuvre numérique de la structure de paiement du TILA (*Tail Index-Linked Annuity*) à partir des paramètres de base repris dans la figure 3.4. Le cadre retient une cohorte initiale de 1 000 assurés, tous âgés de 65 ans au départ. Le taux sans risque est fixé à 2 %, conformément aux hypothèses actuariels standard, tandis que le ratio de Sharpe cible est établi à 10 %, dans la fourchette recommandée par Bauer et al. (2010) pour les régimes de retraite.

Dans cette configuration, la population 1 sert de référence pour l'indice de survie ; on pose donc $l_x^{(1)} = \infty$, de sorte que seul le risque systématique de longévité est pris en compte. Les versements du TILA sont ajustés à partir de l'indice

$$Y_t = {}_t p_x^{(1)},$$

c'est-à-dire la probabilité, pour la population 1, de survivre t années à partir de l'âge initial $x = 65$.

Pour estimer ces probabilités sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$, nous avons généré $N = 10\,000$ trajectoires de Monte Carlo. Cette démarche intègre explicitement le risque systémique de longévité dans une tarification pilotée par un ratio de Sharpe et sert de base au mécanisme de revalorisation des versements de la TILA, afin de cibler un rendement espéré ajusté du risque conforme aux conditions de marché.

Âge initial	Taille du portefeuille	Prix de la rente	Taux sans risque	ratio de Sharpe
$x_0 = 65$	$l_{x_0}^{(2)} = 1000$	$W_0 = 1$	$r = 2\%$	$\eta = 5\%$

FIGURE 3.4 – Paramètre de base

Nous allons examiner les résultats numériques associés à la détermination conjointe des paramètres contractuels B et z , dans le cadre du mécanisme TILA. Pour cela, une stratégie fondée sur des quantiles de l'indice de survie Y_t sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est utilisée. Les seuils L_t et U_t sont respectivement fixés aux quantiles 95% et 99.5% de Y_t , ce qui permet de capturer des scénarios de longévité extrême défavorables dans lesquels la population de référence vit significativement plus longtemps que prévu.

Cette méthode de fixation des seuils repose sur des critères simples à interpréter pour les assurés. De plus, elle cible spécifiquement les queues de distribution, c'est-à-dire les cas où la longévité dépasse largement les attentes actuarielles. Dans ce cadre, la relation entre le paiement nominal équitale B et le paiement annuel minimum garanti z est analysée à l'aide de simulations. La Figure 3.5 illustre,

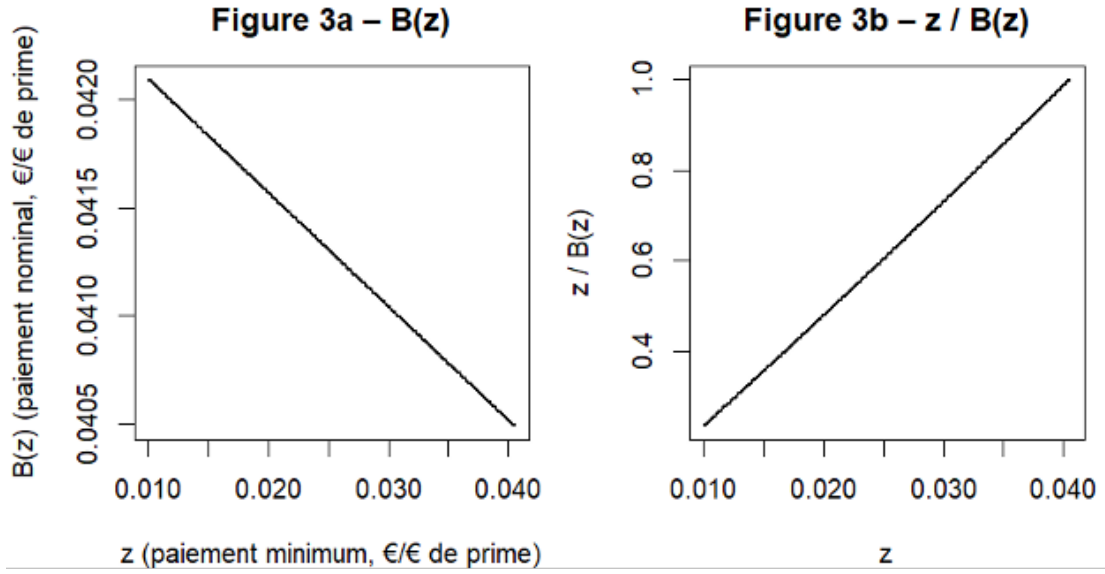


FIGURE 3.5 – Structure de dépendance entre le paiement annuel nominal équitale B (panneau de gauche) et le ratio z/B (panneau de droite) sur le paiement annuel minimum z .

dans son panneau gauche, la manière dont B varie en fonction de z , tandis que le panneau droit représente l'évolution du ratio $z/B(z)$ en fonction de z .

On observe une décroissance de $B(z)$ avec z , un plancher plus élevé implique un nominal plus faible pour conserver l'équité. Le compromis de la TILA consiste à échanger un léger abaissement en régime normal contre un rehaussement marqué en cas de longévité extrême. La hausse de $z/B(z)$ traduit l'amélioration du minimum garanti par rapport au paiement moyen.

Enfin, on observe dans le cas extrême que le contrat TILA converge vers une rente classique, c'est-à-dire un paiement fixe constant dans le temps, $B = z = 0.0405$.

Aversion au risque individuel La Figure 3.6 dresse, pour une plage de coefficients γ allant de 2 à 10, les couples optimaux (B, z) et les équivalents certains correspondants, CE^{TILA} pour la rente indexée et CE^A pour la rente ordinaire.

On constate qu'à mesure que l'aversion au risque s'accroît, la configuration glisse progressivement vers un contrat plus protecteur : le paiement minimal garanti z augmente, tandis que le montant nominal B recule légèrement. L'assuré prudent préfère ainsi garantir ses revenus dans des scénarios de longévité extrême, quitte à céder un peu de rentabilité en période normale. À l'inverse, un assuré plus tolérant renonce à une fraction de la garantie pour profiter d'un potentiel de revalorisation plus élevé si la longévité se révèle exceptionnelle.

Un calibrage adéquat de (B, z) permet d'adapter le TILA au profil de chaque

γ	z	B	CE^{TILA}	CE^A
2	0.0204	0.0416	0.0017	0.0013
4	0.0291	0.0411	0.0140	0.0089
6	0.0326	0.0409	0.0214	0.0116
8	0.0344	0.0408	0.0257	0.0124
10	0.0355	0.0408	0.0284	0.0126

FIGURE 3.6 – Choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque, équivalents certains correspondants pour la rente indexée et la rente ordinaire.

assuré, le contrat offre alors un compromis équilibré entre sécurité et participation au risque de longévité, tout en assurant une mutualisation partielle de ce risque.

Solidité financière des portefeuilles. Les résultats présentés dans les Figures 3.7 et 3.8 opposent un portefeuille composé exclusivement de rentes classiques à des portefeuilles mixtes dont la part de contrats TILA croît progressivement $(1-a)$.

En régime ordinaire (Figure 3.7), le portefeuille composé uniquement de rentes ordinaires présente une perte future attendue légèrement positive et une probabilité de perte positive. À l'inverse, toutes les allocations mixtes affichent une *perte moyenne négative*, ramènent la probabilité de perte proche de zéro et abaissent la *Value-at-Risk* (VaR). Introduire le TILA s'avère donc être un levier efficace pour contenir le risque extrême tout en limitant la probabilité de perte globale.

En scénario de stress (Figure 3.8), une hausse de longévité de 20 % met en lumière la vulnérabilité du portefeuille traditionnel, la perte attendue s'envole et la probabilité de perte devient inévitable. Les portefeuilles intégrant du TILA résistent, dès que $a \leq 0,5$, la perte attendue baisse au moins de moitié. Ces résultats confirment la capacité du TILA à amortir les chocs démographiques les plus sévères tout en préservant la solvabilité de l'assureur.

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$VaR_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.08	0.51	0.01	17.12
Mix $a = 0.9$	-2.26	0.37	0.00	14.37
Mix $a = 0.5$	-9.40	0.12	0.00	10.13
Mix $a = 0.1$	-12.48	0.08	0.00	8.78

FIGURE 3.7 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 .

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$VaR_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	15.65	0.99	0.02	30.37
Mix $a = 0.9$	13.43	0.98	0.01	28.51
Mix $a = 0.5$	6.72	0.81	0.01	24.62
Mix $a = 0.1$	3.61	0.67	0.01	23.45

FIGURE 3.8 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Choc de longévité = 20%.

Globalement, l'intégration partielle ou majoritaire de rentes TILA dans le portefeuille améliore sensiblement la solidité du portefeuille.

3.2.1 Sensibilité TILA

L'objectif de cette section est d'évaluer la robustesse des résultats du modèle TILA face à des variations des paramètres clés du cadre d'évaluation.

L'analyse de sensibilité porte notamment sur le ratio de Sharpe cible η , l'âge initial de l'assuré x_0 , ainsi que le taux d'intérêt sans risque r . Ces paramètres influencent directement la structure des paiements, les équivalents certains pour l'assuré, ainsi que les indicateurs de perte et de risque pour l'assureur.

Ratio de Sharpe Cette sous-section étudie l'incidence d'un relèvement du ratio de Sharpe cible sur la configuration optimale du contrat TILA et sur le profil de risque du portefeuille de l'assureur. Porter la cible de 5 % à 10 % revient à exiger un rendement espéré ajusté du risque plus élevé, ce qui affecte à la fois la tarification et les préférences individuelles.

Du point de vue de l'assuré (Figure 3.9), on observe des résultats très proches de ceux obtenus avec un ratio de 5 %. On observe une baisse significative de la garantie z et du montant B . De même, l'écart entre le montant garanti z et B s'est réduit, on observe que le montant B reste stable malgré la valeur de γ qui augmente alors que z augmente et réduit l'écart. Ce qui traduit une amélioration de l'attractivité du contrat indexé pour les assurés prudents. Le TILA est toujours préféré mais l'équivalent certain CE^{TILA} est très proche à CE^A . L'augmentation de η a eu un impact fort sur les montants versé et l'attrait de l'individu au TILA.

Côté assureur, les résultats présentés dans les Figures 3.10 et 3.11 confirment la performance du TILA sous la nouvelle contrainte de Sharpe. En situation normale, la perte future attendue reste très proche de zéro pour le portefeuille 100 % fixe, mais devient plus favorable dans les configurations mixtes, avec des pertes moyennes négatives et une probabilité de perte qui diminuent. En présence d'un choc de

longévité de 20 %, on observe que le TILA permet de faire diminuer les pertes attendues mais ne suffit pas à se couvrir.

γ	z	B	CE^{TILA}	CE^A
2	0.0100	0.0139	0.0002	0.0002
4	0.0100	0.0139	0.0033	0.0032
6	0.0105	0.0138	0.0058	0.0056
8	0.0112	0.0138	0.0074	0.0072
10	0.0117	0.0138	0.0085	0.0083

FIGURE 3.9 – Choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque, équivalents certains correspondants pour la rente indexée et la rente ordinaire. Ratio de Sharpe = 10%

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.03	0.51	0	5.77
Mix $a = 0.9$	-0.26	0.46	0	5.26
Mix $a = 0.5$	-1.12	0.32	0	4.63
Mix $a = 0.1$	-1.54	0.26	0	4.33

FIGURE 3.10 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Ratio de Sharpe = 10%

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	5.28	0.99	0.01	10.24
Mix $a = 0.9$	5.01	0.99	0.01	10.05
Mix $a = 0.5$	4.22	0.98	0.00	9.38
Mix $a = 0.1$	3.78	0.96	0.00	9.17

FIGURE 3.11 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Ratio de Sharpe = 10% et un choc de longévité = 20%.

Lorsque le ratio de Sharpe est porté à 10%, le TILA ne parvient plus à amortir convenablement le choc de longévité ; la mutualisation s'affaiblit et le profil rendement-risque se détériore, tant pour l'assureur que pour l'assuré. Autrement dit, la performance du TILA se révèle sensible à une prime de risque plus élevée et perd sa robustesse face à un stress de mortalité défavorable.

Âge de l'assuré Nous étudions l'impact de l'âge initial de l'assuré fixé à $x = 70$ ans. Les autres paramètres sont maintenus constants, avec un taux sans risque $r = 2\%$, un ratio de Sharpe $\eta = 5\%$, et des bornes définies par $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99,5\%)$.

Pour cette population plus âgée, l'horizon de paiement est plus court. Du point de vue de l'assuré, cela se traduit par un paiement nominal B plus élevé que z (Table 3.12). L'écart entre les équivalents certains CE^{TILA} et CE^A est globalement plus élevé que précédemment, et se creuse avec γ qui augmente.

Du point de vue de l'assureur, la réduction de l'horizon contractuel limite les risques agrégés. En situation normale (Table 3.13), les pertes moyennes et la VaR sont plus contenues que pour des populations plus jeunes. Les portefeuilles intégrant une part importante de TILA permettent néanmoins de neutraliser efficacement le risque, avec des pertes attendues négatives et des VaR qui diminuent avec la proportion $(1 - a)$.

En présence d'un choc de longévité de 20% (Table 3.14), le TILA ne parvient plus à amortir convenablement le choc de longévité; la mutualisation s'affaiblit et le profil rendement-risque se détériore, tant pour l'assureur que pour l'assuré. Autrement dit, la performance du TILA se révèle sensible à un l'âge de l'assuré et perd sa robustesse face à un stress de mortalité défavorable.

γ	z	B	CE^{TILA}	CE^A
2	0.0100	0.0143	0.0002	0.0002
4	0.0104	0.0143	0.0034	0.0031
6	0.0115	0.0142	0.0060	0.0054
8	0.0121	0.0142	0.0077	0.0068
10	0.0125	0.0142	0.0088	0.0078

FIGURE 3.12 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour $x_0 = 70$

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.00	0.51	0	5.29
Mix $a = 0.9$	-0.35	0.44	0	4.90
Mix $a = 0.5$	-1.42	0.26	0	4.02
Mix $a = 0.1$	-1.98	0.19	0	3.56

FIGURE 3.13 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour $x_0 = 70$

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{\tilde{L}_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	5.70	1.00	0.01	10.54
Mix $a = 0.9$	5.35	1.00	0.01	10.09
Mix $a = 0.5$	4.30	0.98	0.00	9.25
Mix $a = 0.1$	3.79	0.96	0.00	8.86

FIGURE 3.14 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour $x_0 = 70$ et un choc de longévité = 20%.

Taux d'intérêt sans risque Nous analysons les effets d'un abaissement du taux sans risque à $r = 0.5 \%$ sur le fonctionnement du contrat TILA. Le ratio de Sharpe est maintenu à $\eta = 5 \%$, les bornes standards sont conservées avec $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

En régime "normal" (Figure 3.16), le portefeuille de rentes ordinaires affiche une légère perte espérée ($\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X] \approx 0,03$) et une probabilité de perte proche d'un tirage-pile-ou-face (51%). Dès que l'on introduit une part – même modeste – de contrats indexés (mix $a = 0,9 \rightarrow 0,1$), l'espérance devient négative (donc bénéficiaire pour l'assureur) et la probabilité de perte glisse de 49% à 39%, tandis que la $Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$ décroît de 7,01 à 6,03. Autrement dit, la diversification vers l'indexation atténue la queue de distribution et améliore à la fois la rentabilité moyenne et le capital réglementaire requis. Lorsque survient un choc de longévité de +20% (Figure 3.17), les conclusions sont différentes : quelle que soit la composition, la perte espérée s'envole ($\approx 6,4 - 7,2$ par contrat) et le sinistre devient quasi certain (probabilité ≈ 1). Néanmoins, la surcharge de risque extrême reste sensiblement plus faible pour les portefeuilles les plus diversifiés : le VaR passe de 13,36 (rentes pures) à 12,63 (mix $a = 0,1$). Cette réduction d'environ 0,7 point peut représenter plusieurs millions d'euros de capital économique sur un gros portefeuille.

γ	z	B	CE^{TILA}	CE^A
2	0.01	0.011	0.0001	0.0001
4	0.01	0.011	0.0024	0.0021
6	0.01	0.011	0.0044	0.0038
8	0.01	0.011	0.0057	0.0049
10	0.01	0.011	0.0066	0.0056

FIGURE 3.15 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour un ratio de Sharpe = 5%, $r = 0.5\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.03	0.51	0	7.01
Mix $a = 0.9$	-0.11	0.49	0	6.67
Mix $a = 0.5$	-0.54	0.43	0	6.21
Mix $a = 0.1$	-0.75	0.39	0	6.03

FIGURE 3.16 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 5%, $r = 0.5\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

Portefeuille	$E_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} E_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	7.19	1.00	0.01	13.36
Mix $a = 0.9$	7.06	1.00	0.01	13.25
Mix $a = 0.5$	6.68	1.00	0.01	12.74
Mix $a = 0.1$	6.44	0.99	0.01	12.63

FIGURE 3.17 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 5%, $r = 0.5\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$ et un choc de longévité = 20%.

Chapitre 4

Conclusion

Ce mémoire a exploré, dans le contexte belge, la conception et la tarification d'une Tail Index-Linked Annuity (TILA), en combinant un modèle de mortalité multipopulation de Li-Lee et une mesure de tarification issue de la transformée de Wang, calibrée via un ratio de Sharpe cible faute de prix de marché observables. L'évaluation s'est appuyée sur des simulations Monte-Carlo et des indicateurs pruden-
tiels (perte future attendue, probabilité de perte, perte conditionnelle moyenne, VaR 99,5 %). Ce cadre a permis d'étudier conjointement les préférences individuelles et la soutenabilité du produit pour l'assureur.

Les résultats suggèrent que le TILA constitue un instrument pertinent de partage du risque de longévité. Il améliore la mutualisation et s'articule de manière crédible avec les exigences de Solvabilité II. Dans des portefeuilles mixtes, même une allocation modeste en TILA abaisse la probabilité de perte et la VaR, y compris sous un stress de longévité.

La courbe d'équité $B(z)$ met en lumière le compromis central, plus le plancher z est élevé, plus le nominal B doit reculer pour préserver l'équité actuarielle. Ce mécanisme rend le contrat paramétrable selon l'aversion au risque de l'assuré et facilite un alignement transparent entre garanties minimales et participation aux scénarios de longévité exceptionnelle.

Ces conclusions s'accompagnent de limites. D'abord, la robustesse du TILA dépend des hypothèses de prime de risque : lorsque le ratio de Sharpe exigé par le marché est relevé (par ex. 10 %), la capacité d'amortissement face aux chocs de longévité se dégrade, tant pour l'assureur que pour l'assuré. Ensuite, les résultats varient avec l'âge d'entrée et le niveau des taux sans risque. Enfin, sur le plan statistique, le schéma Li-Lee, prolongé au très grand âge via Kannistö, demeure perfectible pour modéliser la mortalité extrême, où les données sont plus volatiles.

Ces limites tracent naturellement des perspectives d'améliorations. Sur le versant démographique, il sera utile de tester des modèles mieux adaptés aux âges extrêmes

(famille CBD : M5–M6–M7) et de les décliner en multipopulations, comme le suggère la littérature Li et al. (2015). Sur le versant financier, l’indexation de type TILA doit s’intégrer à une gestion globale des risques combinant la réassurance ou des instruments de transfert pour couvrir la composante systémique.

Au-delà des chiffres, l’enjeu est profondément humain, allonger la vie est une victoire collective, mais c’est aussi un contrat de solidarité intergénérationnelle à réinventer. En montrant qu’il est possible d’adosser davantage la rente à la réalité démographique tout en préservant l’équité entre assurés et assureurs, ce travail plaide pour des produits plus justes, plus lisibles et plus résilients. Il ne s’agit pas de promettre l’impossible, mais d’organiser, avec lucidité, un partage du risque qui protège au mieux le revenu des personnes âgées et la stabilité du système dans son ensemble.

Chapitre 5

Références

- [1] André de Palma, Nathalie Picard, Jean-Luc Prigent. Prise en compte de l'attitude face au risque dans le cadre de la directive MiFID. 2009. hal-00418892
- [2] Bauer, D., Börger, M., & Ruß, J. (2010). On the pricing of longevity-linked securities. *Insurance : Mathematics and Economics*, 46(1), 139-149. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.06.005>
- [3] Bates, D. (s.d.). Generalized linear models.
- [4] Brouhns, N., & Denuit, M. (s.d.). Risque de longe´vite´ et rentes viage´res I. Evolution de la mortalite´ en Belgique de 1880 a´ nos jours.
- [5] Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. K. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance : Mathematics and Economics*, 31(3), 373-393. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(02\)00185-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(02)00185-3)
- [6] Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J., & Zhu, C. (1995). A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(5), 1190–1208.
- [7] Champagnat, N. (s.d.). Problèmes inverses Partie 2—Chapitre 3 Estimation par maximum de vraisemblance.
- [8] Chassagnon, A. (2017). Économie de l'incertain : Chapitre 1. Comportements individuels quand le risque est objectivement défini [Notes de cours]. Université de Tours. https://extranet.parisschoolofeconomics.eu/docs/chassagnon-arnold/incl3_1_2017.pdf
- [9] Chen, A., Li ,Hong, & and Schultze, M. B. (2022). Tail index-linked annuity : A longevity risk sharing retirement plan. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2022(2), 139-164. <https://doi.org/10.1080/03461238.2021.1938198>
- [10] Chesneau, C. (s.d.). Sur l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (emv).

- [11] Chevallier, C., Xuan, H., & Albouy, F.-X. (2011). Déterminants de l'inassurabilité du risque de longévité et marché de la rente viagère. *Revue française d'économie*, XXVI(4), 81-119. <https://doi.org/10.3917/rfe.114.0081>
- [12] Cutler, D. M., & Zeckhauser, R. J. (1998). Adverse Selection in Health Insurance. In *Frontiers in Health Policy Research, Volume 1* (p. 1-32). MIT Press. <https://www.nber.org/books-and-chapters/frontiers-health-policy-research-volume-1/adverse-selection-health-insurance>
- [13] Darmon, É., & L'Haridon, O. (2021). Chapitre 3. Définir et mesurer la prise de risque. *L'économie en schémas*, 202-219.
- [14] Définition—Espérance de vie / Espérance de vie à la naissance / Espérance de vie à 60 ans / Espérance de vie à la naissance / Espérance de vie à 60 ans | Insee. (s.d.). Consulté 26 mai 2025, à l'adresse <https://www.insee.fr/fr/metadonnees/definition/c1374#>
- [15] Doray, L. G. (s.d.). Inference for Logistic-type Models for the Force of Mortality.
- [16] Dowd, K., & Blake, D. P. (2019). On the Projection of Mortality Rates to Extreme Old Age. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3552235>
- [17] Dowd, K., Cairns, A. J. G., Blake, D., Coughlan, G. D., & Khalaf-Allah, M. (2011). A Gravity Model of Mortality Rates for Two Related Populations. *North American Actuarial Journal*, 15(2), 334-356. <https://doi.org/10.1080/10920277.2011.10597624>
- [18] Dowd, K., Cairns, A. J. G., & Blake, D. (2019). Hedging Annuity Risks with the Age-Period-Cohort Two-Population Gravity Model. *North American Actuarial Journal*, 25(sup1), S170-S181. <https://doi.org/10.1080/10920277.2019.1652102>
- [19] Eggerickx, T., Léger, J.-F., Sanderson, J.-P., & Vandeschrick, C. (2017). L'évolution de la mortalité en Europe du 19e siècle à nos jours. *Espace populations sociétés. Space populations societies*, 2017/3, Article 2017/3. <https://doi.org/10.4000/eps.7314>
- [20] Espérance de vie. (s.d.). [Text]. *sciensano.be*. Consulté 26 mai 2025, à l'adresse <https://www.sciensano.be/fr/sujets-sante/esperance-de-vie>
- [21] Fosse, E., & Winship, C. (2019). Analyzing Age-Period-Cohort Data : A Review and Critique. *Annual Review of Sociology*, 45(1), 467-492. <https://doi.org/10.1146/annurev-soc-073018-022616>
- [22] Holford, T. R. (1983). The Estimation of Age, Period and Cohort Effects for Vital Rates. *Biometrics*, 39(2), 311. <https://doi.org/10.2307/2531004>

- [23] Infographie : L'espérance de vie augmente dans le monde entier. (2023, février 27). Statista Daily Data. <https://fr.statista.com/infographie/29388/esperance-de-vie-estimee-a-la-naissance-en-1950-2000-et-2050-par-region-dans-le-monde>
- [24] Jiang, Y. (s.d.). The Gauss-Markov Theorem—STA 211 : The Mathematics of Regression.
- [25] Lee-Carter Model in a Generalised Linear Modelling Framework. (s.d.). Consulté 11 août 2025, à l'adresse http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/466062_fda07a1b42af4793b1f75e4b87435e3a.html
- [26] Li, J. S.-H., Zhou, R., & Hardy, M. (2015). A step-by-step guide to building two-population stochastic mortality models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 63, 121-134. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2015.03.021>
- [27] Li, N., & Lee, R. (2005). Coherent Mortality Forecasts for a Group of Populations : An Extension of the Lee-Carter Method. *Demography*, 42(3), 575–594. <http://www.jstor.org/stable/4147363>
- [28] Milevsky, M. A., Promislow, S. D., & Young, V. R. (2006). Killing the Law of Large Numbers : Mortality Risk Premiums and the Sharpe Ratio. *Journal of Risk and Insurance*, 73(4), 673-686. <https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00194.x>
- [29] Nelder, J. A., & Wedderburn, R. W. M. (2022). Generalized Linear Models.
- [30] Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). Numerical Optimization. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>
- [31] Peijnenburg, K., Nijman, T., & Werker, B. J. M. (2016). The annuity puzzle remains a puzzle. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 70, 18-35. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2016.05.023>
- [32] Planchet, F. (s.d.). TABLES DE MORTALITE D'EXPERIENCE POUR DES PORTEFEUILLES DE RENTIERS.
- [33] Poterba, J. M. (2001). Annuity Markets and Retirement Security. *Fiscal Studies*, 22(3), 249-270.
- [34] Zeddouk, F., & Devolder, P. (s.d.). Pricing and hedging of longevity basis risk through securitization.
- [35] Risque de longevite attenuer les risques de longevite grace aux rentes viageres. (s.d.). FasterCapital. Consulté 26 mai 2025, à l'adresse <https://fastercapital.com/fr/contenu/Risque-de-longevite---attenuer-les-risques-de-longevite-grace-aux-rentes-viageres.html>
- [36] Taboga, M. (s.d.). Gauss Markov theorem. Consulté 26 mai 2025, à l'adresse <https://www.statlect.com/fundamentals-of-statistics/Gauss-Markov-theorem>

- [37] Universalis, E. (s.d.). ASSURANCE - Économie de l'assurance : Antisélection. Encyclopædia Universalis. Consulté 26 mai 2025, à l'adresse <https://www.universalis.fr/encyclopedie/assurance-economie-de-l-assurance/3-antiselection/>
- [38] Wang, S. (s.d.). Wang Transform and Its Applications.
- [39] Yaari, M. E. (1965). Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer. *The Review of Economic Studies*, 32(2), 137-150. <https://doi.org/10.2307/2296058>

Chapitre 6

Annexes

Résultats suivant la procédure de Chen et al. L'analyse comparative des probabilités de survie historiques, illustrée en figure 6.1, met en évidence des divergences notables entre la population belge (population 2) et la population unisexe combinée (population 1). On observe une mortalité plus élevée en Belgique, particulièrement marquée entre les âges de 70 et 85 ans. On peut comprendre cette différence en considérant les variations démographiques entre les pays européens. L'espérance de vie moyenne est légèrement plus élevée en France qu'en Belgique, ce qui a pour effet de modifier la courbe de survie globale quand on combine les populations des deux pays (Eggerickx et al. 2017). Ajouter une population avec de meilleurs indicateurs de longévité bonifie logiquement la courbe de population 1 et améliore artificiellement la survivance moyenne.

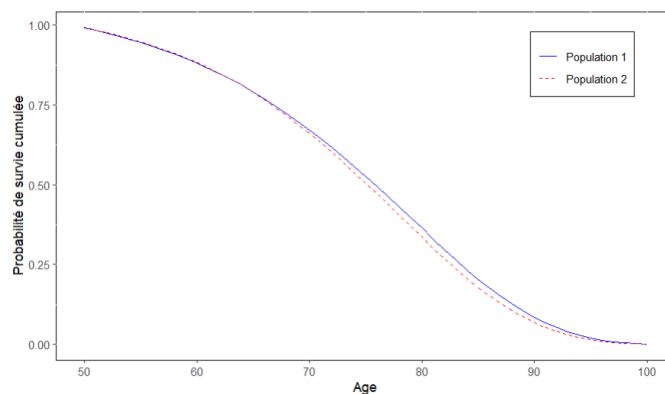


FIGURE 6.1 – Probabilité de survie historique cumulée de la cohorte fusionnée (population 1) et de la cohorte belge (population 2) nées en 1902.

La Figure 6.2 illustre les effets de période pour chacune des deux populations. Dans les deux cas, on observe une tendance à la baisse, reflet d'une amélioration générale de la survie. Toutefois, la courbe $\kappa_t^{(1)}$, relative à la population fusionnée,

s'incline de façon plus marquée, ce qui traduit une réduction de la mortalité plus rapide que dans la population belge. La Table 6.1 contient les valeurs de $\mu^{(i)}$ qui confirment notre observation.



FIGURE 6.2 – Effet de période de la population unisexe fusionnée (population 1) et belge (population 2) de 1950 à 2016, âge 50-100.

Pour approfondir l'analyse des tendances agrégées de la mortalité dans ces deux populations, nous résumons les estimations des paramètres des équations (11) et (12) dans la Table 6.1, voir Chen et al. (2022) pour le détail des équations. Nous observons que $\mu^{(1)}$ est supérieur à $\mu^{(2)}$ d'environ 6% (en valeur absolue), ce qui signale une progression plus lente de la mortalité en Belgique durant la période analysée. Le modèle inclut aussi un élément de dépendance entre les processus de mortalité au moyen du paramètre gravitationnel ϕ , estimé à 0.1373. Cette donnée positive atteste d'un lien de dépendance entre les dynamiques temporelles relatives à la mortalité des deux groupes. Finalement, les variances $C^{(11)}$ et $C^{(22)}$, liées aux innovations des processus stochastiques, révèlent une volatilité supérieure pour la population 1 ($C^{(11)} = 1.8048$) comparée à la population belge ($C^{(22)} = 0.8097$), laissant supposer une plus grande fluctuation dans l'évolution de la mortalité globale de la population combinée.

TABLE 6.1 – Paramètres estimés des équations (11) et (12) ajustés à la population unisexe fusionnée (population 1) et belge (population 2) sur la période 1950-2016.

	$\mu^{(i)}$	ϕ	C
Population 1	-0.5624	—	$C^{11} = 1.8048$
Population 2	-0.53029	0.1373	$C^{11} = 1.0640$ $C^{22} = 0.8097$

Analyse numérique

Cette section détaille la mise en oeuvre numérique de la structure de paiement du TILA (*Tail Index-Linked Annuity*) à partir des paramètres de base repris dans la Table 6.2. Le cadre retient une cohorte initiale de 1 000 assurés, tous âgés de 65 ans au départ. Le taux sans risque est fixé à 2 %, conformément aux hypothèses actuariels standard, tandis que le ratio de Sharpe cible est établi à 10 %, dans la fourchette recommandée par Bauer et al. (2010) pour les régimes de retraite.

Dans cette configuration, la population 1 sert de référence pour l'indice de survie ; on pose donc $l_x^{(1)} = \infty$, de sorte que seul le risque systématique de longévité est pris en compte. Les versements du TILA sont ajustés à partir de l'indice

$$Y_t = {}_t p_x^{(1)},$$

c'est-à-dire la probabilité, pour la population 1, de survivre t années à partir de l'âge initial $x = 65$.

Pour évaluer ces probabilités sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$, nous avons procédé à 10 000 simulations. Les dérives estimées, notées $\tilde{\mu}^{(i)}$, s'établissent à $-0,5749$ pour la population 1 et $-0,6058$ pour la population 2. Plus négatives que leurs pendants sous la mesure historique $\mathbb{P}$, elles traduisent une vision de marché plus prudente quant à la mortalité future. Dès lors,

$${}_t \tilde{p}_x^{(i)} \geq {}_t p_x^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

les probabilités de survie sous $\mathbb{Q}$ excédant systématiquement les probabilités historiques.

Cette étape illustre la prise en compte du risque systémique de longévité dans une logique de tarification fondée sur le ratio de Sharpe ; elle constitue la base du mécanisme de revalorisation des versements du TILA, garantissant un rendement espéré ajusté au risque conforme aux exigences de marché.

TABLE 6.2 – Paramètres de base.

Âge initial	Taille du portefeuille	Prix de la rente	Taux sans risque	ratio de Sharpe
$x_0 = 65$	$l_{x_0}^{(2)} = 1000$	$W_0 = 1$	$r = 2\%$	$\eta = 10\%$

Combinaisons équitables des paramètres de paiements dans le TILA

L'objectif de cette section est d'examiner les résultats numériques associés à la détermination conjointe des paramètres contractuels B et z , dans le cadre du mécanisme TILA. Pour cela, une stratégie fondée sur des quantiles de l'indice de survie Y_t sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ est utilisée. Les seuils L_t et U_t sont respectivement fixés aux quantiles 95% et 99.5% de Y_t , ce qui permet de capturer des scénarios de longévité extrême défavorables dans lesquels la population de référence vit significativement plus longtemps que prévu.

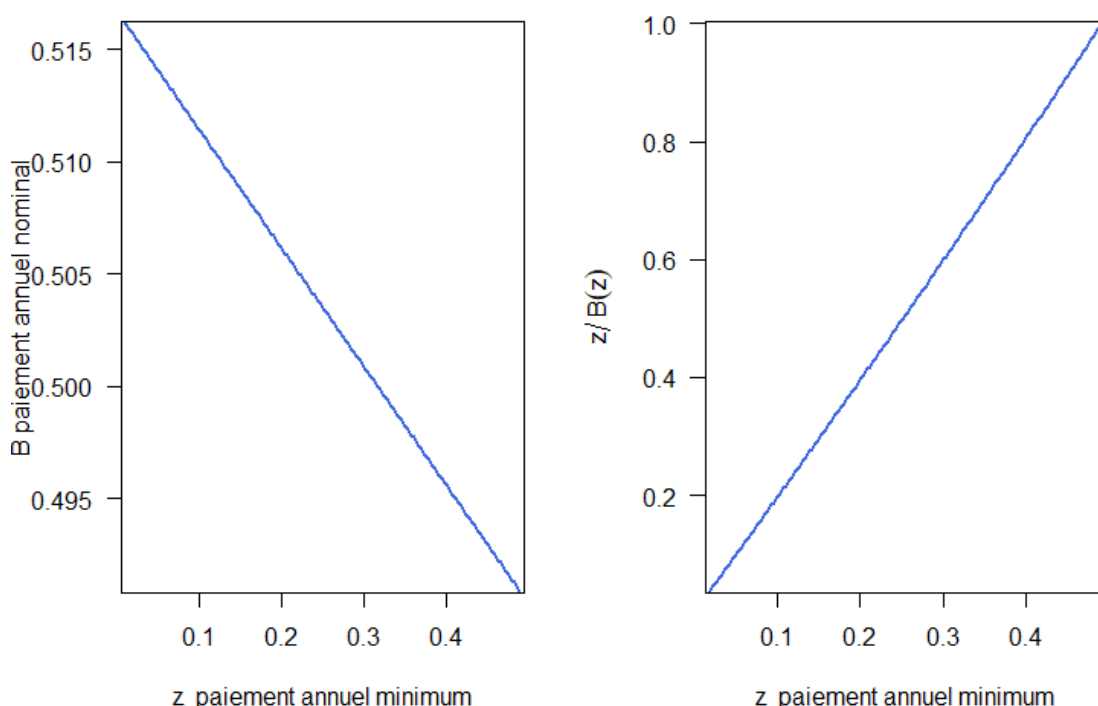


FIGURE 6.3 – Structure de dépendance entre le paiement annuel nominal équitable B (panneau de gauche) et le ratio z/B (panneau de droite) sur le paiement annuel minimum z . Sur la base de $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$ et des paramètres du cas de base, (gauche) B en fonction de z , (droit) z/B en fonction de z .

Cette méthode de fixation des seuils repose sur des critères simples à interpréter pour les assurés. De plus, elle cible spécifiquement les queues de distribution, c'est-à-dire les cas où la longévité dépasse largement les attentes actuarielles. Dans ce cadre, la relation entre le paiement nominal équitable B et le paiement annuel minimum garanti z est analysée à l'aide de simulations. La Figure 6.3 illustre, dans son panneau gauche, la manière dont B varie en fonction de z , tandis que le

panneau droit représente l'évolution du ratio $z/B(z)$ en fonction de z .

Les résultats mettent en évidence une relation décroissante entre B et z : plus le paiement garanti est élevé, plus le montant nominal B doit être ajusté à la baisse afin de préserver l'équité actuarielle du contrat. Ceci illustre le compromis propre à la conception du TILA : en acceptant un paiement réduit dans les scénarios de longévité modérée, l'assuré bénéficie d'un paiement significativement majoré lorsque la longévité devient extrême. Cette mutualisation ciblée du risque est d'ailleurs confirmée par la croissance régulière du ratio $z/B(z)$, qui traduit une amélioration du rapport entre le minimum garanti et le paiement moyen.

Enfin, on observe dans le cas extrême que le contrat TILA converge vers une rente classique, c'est-à-dire un paiement fixe constant dans le temps, $B = z = 0.4909$.

Point de vue de l'assuré

L'analyse du point de vue de l'assuré mesure dans quelle mesure le TILA s'accorde avec le degré d'aversion au risque individuel. La Table 6.6 dresse, pour une plage de coefficients γ allant de 0,5 à 10, les couples optimaux (B, z) et les équivalents certains correspondants, CE^{TILA} pour la rente indexée et CE^A pour la rente ordinaire.

TABLE 6.3 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et des équivalents certains correspondants pour la rente indexée et la rente ordinaire.

γ	B	z	CE^{TILA}	CE^A
0.5	0.5157	0.0196	0.1652	0.1522
2	0.5034	0.2528	0.3253	0.3212
4	0.4979	0.3562	0.3975	0.3953
6	0.4958	0.3971	0.4285	0.4270
8	0.4947	0.4187	0.4448	0.4436
10	0.4939	0.4332	0.4546	0.4536

On constate qu'à mesure que l'aversion au risque s'accroît, la configuration glisse progressivement vers un contrat plus protecteur : le paiement minimal garanti z augmente, tandis que le montant nominal B recule légèrement. L'assuré prudent préfère ainsi garantir ses revenus dans des scénarios de longévité extrême, quitte à céder un peu de rentabilité en période normale. À l'inverse, un assuré plus tolérant renonce à une fraction de la garantie pour profiter d'un potentiel de revalorisation plus élevé si la longévité se révèle exceptionnelle.

Les équivalents certains illustrent cet arbitrage. Pour $\gamma < 4$, CE^{TILA} dépasse (ou frôle) CE^A , signalant que les profils modérément prudents jugent la version

indexée plus attractive. Lorsque γ s'élève, les deux valeurs convergent, dès que la garantie minimale z avoisine le paiement de base B , le TILA devient difficile à distinguer d'une rente classique.

En définitive, un calibrage adéquat de (B, z) permet d'adapter le TILA au profil de chaque assuré, le contrat offre alors un compromis équilibré entre sécurité et participation au risque de longévité, tout en assurant une mutualisation partielle de ce risque.

Point de vue de l'assureur

Du point de vue de l'assureur, l'évaluation se concentre sur la solidité financière des portefeuilles. Les résultats présentés dans les Tables 6.4 et 6.5 opposent un portefeuille composé exclusivement de rentes classiques à des portefeuilles mixtes dont la part de contrats TILA croît progressivement $(1-a)$.

En régime ordinaire (Table 6.4), le portefeuille composé uniquement de rentes ordinaires présente une perte future attendue légèrement positive et une probabilité de perte positive. À l'inverse, toutes les allocations mixtes affichent une *perte moyenne négative*, ramènent la probabilité de perte à zéro et abaissent la *Value-at-Risk* (VaR) jusqu'à des valeurs négatives. Introduire le TILA s'avère donc un levier efficace pour contenir le risque extrême tout en limitant la probabilité de perte globale.

En scénario de stress (Table 6.5), une hausse de longévité de 20 % met en lumière la vulnérabilité du portefeuille traditionnel, la perte attendue s'envole et la probabilité de perte devient inévitable. Les portefeuilles intégrant du TILA résistent au contraire remarquablement, dès que $a \geq 0,5$, la perte attendue redevient négative, la probabilité de perte tombe à zéro et la VaR bascule sous le seuil neutre. Ces résultats confirment la capacité du TILA à amortir les chocs démographiques les plus sévères tout en préservant la solvabilité de l'assureur.

TABLE 6.4 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 .

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} \mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.04	0.49	0.04	122.94
Mix $a = 0.9$	-171.80	0.00	0.01	-68.49
Mix $a = 0.5$	-595.47	0.00	0.00	-541.38
Mix $a = 0.1$	-705.88	0.00	0.00	-663.21

TABLE 6.5 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Choc de longévité = 20%.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X}\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	185.70	1.00	0.19	329.36
Mix $a = 0.9$	-16.73	0.34	0.03	105.09
Mix $a = 0.5$	-515.79	0.00	0.00	-449.42
Mix $a = 0.1$	-645.59	0.00	0.00	-581.81

Globalement, l'intégration partielle ou majoritaire de rentes TILA dans le portefeuille améliore sensiblement le profil de risque de l'assureur. En particulier, un mix équilibré ($a = 0.5$) suffit à éliminer le risque de perte sous choc, tout en conservant des marges économiques favorables. Cela fait du TILA un outil de couverture efficace contre le risque agrégé de longévité, tout en permettant à l'assureur de répondre à des profils d'assurés diversifiés.

Analyse de sensibilité

L'objectif de cette section est d'évaluer la robustesse des résultats du modèle TILA face à des variations des paramètres clés du cadre d'évaluation.

L'analyse de sensibilité porte notamment sur le ratio de Sharpe cible η , les seuils L_t et U_t , l'âge initial de l'assuré x_0 , ainsi que le taux d'intérêt sans risque r . Ces paramètres influencent directement la structure des paiements, les équivalents certains pour l'assuré, ainsi que les indicateurs de perte et de risque pour l'assureur.

Ratio de Sharpe

Cette sous-section analyse l'effet d'un ratio de Sharpe cible plus faible sur la configuration optimale du contrat TILA et sur le profil de risque du portefeuille de l'assureur. En réduisant le ratio de Sharpe de 10 % à 5 %, on diminue l'exigence de rendement ajusté au risque pour la compagnie d'assurance, ce qui affecte à la fois la tarification et les préférences individuelles. Les dérivées estimées sous la mesure risque-neutre, notées $\tilde{\mu}^{(1)}$ et $\tilde{\mu}^{(2)}$, deviennent légèrement moins négatives (respectivement -0.5684 et -0.5678), reflétant une anticipation de mortalité légèrement plus optimiste sous $\mathbb{Q}$.

Du point de vue de l'assuré (Table 6.6), on observe des résultats très proches de ceux obtenus avec un ratio de 10 %. Le couple optimal (B, z) reste stable, avec une légère augmentation de la garantie z , ce qui traduit une amélioration de l'attractivité

du contrat indexé pour les assurés prudents. L'équivalent certain CE^{TILA} demeure systématiquement supérieur à CE^A pour les coefficients d'aversion au risque $\gamma \leq 4$, ce qui confirme l'intérêt du TILA pour les profils modérément prudents. À mesure que γ augmente, les équivalents certains convergent, indiquant à nouveau que le contrat devient équivalent à une rente classique lorsque $z \approx B$.

Côté assureur, les résultats présentés dans les Tables 6.7 et 6.8 confirment la performance du TILA sous la nouvelle contrainte de Sharpe. En situation normale, la perte future attendue reste très proche de zéro pour le portefeuille 100 % fixe, mais devient plus favorable dans les configurations mixtes, avec des pertes moyennes négatives et une probabilité de perte nulle. En présence d'un choc de longévité de 20 %, la différence devient encore plus marquée : le portefeuille 100 % fixe enregistre des pertes importantes, tandis que les portefeuilles contenant une part significative de TILA conservent une VaR négative et une très faible probabilité de perte.

TABLE 6.6 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour un ratio de Sharpe = 5%, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

γ	B	z	CE^{TILA}	CE^A
0.5	0.5155	0.0220	0.1648	0.1522
2	0.5031	0.2576	0.3251	0.3212
4	0.4978	0.3586	0.3974	0.3953
6	0.4957	0.3995	0.4285	0.4270
8	0.4945	0.4211	0.4448	0.4436
10	0.4939	0.4332	0.4545	0.4536

TABLE 6.7 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 5%, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} \mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	-0.33	0.49	0.04	122.48
Mix $a = 0.9$	-171.22	0.00	0.01	-68.24
Mix $a = 0.5$	-602.83	0.00	0.00	-550.04
Mix $a = 0.1$	-711.05	0.00	0.00	-669.11

TABLE 6.8 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 5%, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$ et un choc de longévité = 20%.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} \mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	185.59	1.00	0.19	330.84
Mix $a = 0.9$	-15.69	0.35	0.03	103.95
Mix $a = 0.5$	-524.14	0.00	0.00	-460.46
Mix $a = 0.1$	-651.62	0.00	0.00	-585.35

Ces résultats suggèrent que même avec un ratio de Sharpe réduit à 5 %, le TILA conserve sa capacité à améliorer la mutualisation du risque de longévité pour l'assureur, tout en maintenant un bon équilibre rendement/risque pour l'assuré. Il apparaît donc que la performance du TILA reste robuste vis-à-vis des exigences de rendement ajusté au risque imposées.

Seuils

Dans cette sous-section, nous étudions l'effet d'un ajustement des bornes de revalorisation sur les résultats du TILA. Plus précisément, les seuils sont fixés ici à $L_t = Q_{Y_t}(97.5\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99\%)$, ce qui revient à concentrer la revalorisation des paiements sur une tranche plus étroite des cas de longévité extrême. Cette modification permet d'analyser dans quelle mesure un encadrement plus serré des conditions de revalorisation influence à la fois le bien-être de l'assuré et le profil de risque de l'assureur.

Du point de vue de l'assuré, une réduction de l'écart entre L_t et U_t signifie que le paiement nominal B est potentiellement plus souvent appliqué, puisque la condition $Y_t \in [L_t, U_t]$ est remplie dans une plage de scénarios plus étroite. Cela

peut renforcer la prévisibilité des paiements, mais diminue aussi la probabilité de déclenchement du mécanisme de revalorisation. En conséquence, le paramètre z doit être légèrement relevé pour compenser le plus faible niveau de protection dans les cas extrêmes, ce qui peut limiter l'attractivité du produit pour les assurés les plus prudents.

Pour l'assureur, des bornes plus serrées entraînent une diminution de l'écart entre les paiements futurs, ce qui facilite la maîtrise de la variance des sorties de fonds et abaisse des mesures de risque telles que la Value-at-Risk (VaR). En revanche, si ces seuils sont établis trop près les uns des autres, le TILA perd de son efficacité pour mutualiser le risque de longévité systémique, ce qui l'affaiblit face à une rente traditionnelle.

Taux d'intérêt sans risque

Dans cette sous-section, nous analysons les effets d'un abaissement du taux sans risque à $r = 0$ % sur le fonctionnement du contrat TILA. Le ratio de Sharpe est maintenu à $\eta = 10$ %. Deux jeux de bornes sont considérés : dans un premier cas, les seuils sont définis comme $L_t = Q_{Y_t}(97.5\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99\%)$; dans un second cas, les bornes standards sont conservées avec $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$. Les dérivées neutres au risque obtenues sont respectivement $\tilde{\mu}^{(1)} = -0.5743$ et $\tilde{\mu}^{(2)} = -0.6229$.

Cas 1 : Seuils ajustés à 97.5 % et 99 %. La diminution du taux sans risque modifie mécaniquement la valeur actuelle des flux futurs, ce qui influence les paiements initiaux viables pour l'assureur. Du point de vue de l'assuré (Table 6.9), cela se traduit par une baisse du paiement nominal B dans toutes les configurations observées, tandis que la garantie minimale z est également ajustée à la baisse. Les équivalents certains CE^{TILA} et CE^A sont affectés à la baisse, mais le TILA reste plus attractif que la rente classique pour des coefficients d'aversion au risque modérés.

Du côté de l'assureur (Tables 6.10, 6.11), la *Value-at-Risk*(VaR) reste maîtrisée en situation normale. En cas de choc de longévité de 20 %, les portefeuilles mixtes contenant du TILA conservent une bonne résilience, avec des pertes attendues nettement réduites et une probabilité de perte fortement diminuée par rapport au portefeuille fixe.

TABLE 6.9 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$ $L_t = Q_{Y_t}(97.5\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99\%)$.

γ	B	z	CE^{TILA}	CE^A
0.5	0.4731	0.1717	0.1024	0.1009
2	0.4681	0.3653	0.2889	0.2885
4	0.4669	0.4131	0.3677	0.3675
6	0.4665	0.4291	0.4006	0.4005
8	0.4662	0.4382	0.4176	0.4175
10	0.4661	0.4428	0.4277	0.4276

TABLE 6.10 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$ $L_t = Q_{Y_t}(97.5\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99\%)$.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} \mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.31	0.49	0.04	134.28
Mix $a = 0.9$	-115.40	0.01	0.02	2.50
Mix $a = 0.5$	-399.29	0.00	0.00	-317.64
Mix $a = 0.1$	-450.46	0.00	0.00	-376.79

TABLE 6.11 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99.5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$ $L_t = Q_{Y_t}(97.5\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99\%)$ et un choc de longévité = 20%.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X} \mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	204.21	1.00	0.20	367.04
Mix $a = 0.9$	66.61	0.91	0.08	212.28
Mix $a = 0.5$	-272.56	0.00	0.00	-174.24
Mix $a = 0.1$	-333.06	0.00	0.00	-242.77

Cas 2 : Seuils standards à 95 % et 99.5 %. Lorsque les bornes classiques sont conservées, les résultats (Tables 6.12, 6.13, 6.14) montrent une hausse modérée du paiement nominal B par rapport au cas avec bornes serrées. Le gain espéré pour l'assuré est également plus élevé, avec une meilleure couverture dans les cas extrêmes. Cela se traduit par un CE^{TILA} supérieur, notamment pour les assurés à forte aversion au risque.

Pour l'assureur, l'impact est légèrement plus volatile : la VaR augmente légèrement, mais reste contenue. En revanche, les portefeuilles contenant une part significative de TILA continuent de montrer des performances solides sous stress, confirmant l'intérêt du produit même dans un environnement de taux très bas.

TABLE 6.12 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

γ	B	z	CE^{TILA}	CE^A
0.5	0.4890	0.01911	0.1116	0.1009
2	0.4773	0.24233	0.2921	0.2885
4	0.4722	0.33799	0.3695	0.3675
6	0.4702	0.37671	0.4019	0.4005
8	0.4691	0.39721	0.4186	0.4175
10	0.4684	0.41088	0.4286	0.4276

TABLE 6.13 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X}\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.41	0.49	0.04	133.13
Mix $a = 0.9$	-174.34	0.00	0.01	-61.10
Mix $a = 0.5$	-601.47	0.00	0.00	-542.11
Mix $a = 0.1$	-716.65	0.00	0.00	-669.38

TABLE 6.14 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$ et un choc de longévité = 20%.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X}\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	203.34	1.00	0.20	363.99
Mix $a = 0.9$	-4.50	0.45	0.04	133.69
Mix $a = 0.5$	-513.29	0.00	0.00	-438.88
Mix $a = 0.1$	-650.76	0.00	0.00	-583.77

Même dans un environnement de taux bas, le contrat TILA conserve sa capacité à équilibrer protection pour l'assuré et maîtrise du risque pour l'assureur. Les résultats démontrent une bonne stabilité des indicateurs clés quel que soit le choix des bornes, bien que les configurations avec seuils standards tendent à offrir un léger avantage en matière de protection individuelle. On observe en effet un écart plus important entre les équivalents certains CE^{TILA} et CE^A dans le cas des seuils standards. Ce qui suggère que plus les seuils sont resserrés, plus les assurés tendent à être indifférents entre un contrat TILA et une rente classique.

Âge de l'assuré

Nous étudions l'impact de l'âge initial de l'assuré fixé à $x = 70$ ans. Les autres paramètres sont maintenus constants, avec un taux sans risque $r = 2\%$, un ratio de Sharpe $\eta = 10\%$, et des bornes définies par $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99,5\%)$.

Pour cette population plus âgée, les dérivées sous $\mathbb{Q}$, notées $\tilde{\mu}^{(i)}$, sont respectivement estimées à -0.5749 pour la population 1 et -0.6058 pour la population 2. Ceci se s'explique par le fait que l'horizon de paiement est plus court. Du point de vue de l'assuré, cela se traduit par une hausse significative du paiement nominal B (Table 6.15), ainsi que du seuil garanti z . Les équivalents certains CE^{TILA} et CE^A sont globalement plus élevés que dans les cas précédents, mais leur écart est plus modéré, ce qui indique que les assurés perçoivent moins de différence entre les deux produits lorsque la durée de l'engagement est réduite.

Du point de vue de l'assureur, la réduction de l'horizon contractuel limite les risques agrégés. En situation normale (Table 6.16), les pertes moyennes et la VaR sont plus contenues que pour des populations plus jeunes. Les portefeuilles intégrant une part importante de TILA permettent néanmoins de neutraliser efficacement le risque, avec des pertes attendues fortement négatives et des VaR inférieures.

En présence d'un choc de longévité de 20% (Table 6.17), les résultats confirment la tendance : la VaR du portefeuille classique augmente. Les portefeuilles TILA affichent toujours de bonnes performances, en particulier pour les niveaux élevés de mutualisation ($a = 0.5$ ou 0.1), avec une probabilité de perte nulle et une réduction marquée du risque extrême.

Ces résultats montrent que le TILA conserve sa pertinence même pour des assurés âgés, bien que l'avantage perçu par rapport à une rente classique tende à se réduire lorsque l'horizon de paiement est raccourci.

TABLE 6.15 – Le choix optimal de B et z en fonction de l'aversion au risque et de l'équivalent certain correspondant de la rente indexée et de la rente ordinaire. Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 0\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

γ	B	z	CE^{TILA}	CE^A
0.5	0.8029	0.0288	0.7202	0.6978
2	0.7839	0.3909	0.7208	0.7124
4	0.7753	0.5530	0.7293	0.7251
6	0.7719	0.6171	0.7363	0.7334
8	0.7702	0.6511	0.7414	0.7393
10	0.7690	0.6737	0.7451	0.7435

TABLE 6.16 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 2\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$ et $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X}\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	0.11	0.49	0.04	133.67
Mix $a = 0.9$	-207.90	0.00	0.00	-93.02
Mix $a = 0.5$	-747.17	0.00	0.00	-689.40
Mix $a = 0.1$	-881.65	0.00	0.00	-840.61

TABLE 6.17 – Perte future attendue, la probabilité de subir une perte, la perte conditionnelle attendue par contrat et la Value-at-Risk à 99,5% du portefeuille de rentes ordinaires et des portefeuilles mixtes avec $a = 0.1, 0.5$ et 0.9 . Pour un ratio de Sharpe = 10%, $r = 2\%$, $L_t = Q_{Y_t}(95\%)$, $U_t = Q_{Y_t}(99.5\%)$ et un choc de longévité = 20%.

Portefeuille	$\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X]$	$P(\tilde{L}_X > 0)$	$\frac{1}{l_X}\mathbb{E}_P[\tilde{L}_X \tilde{L}_X > 0]$	$Var_{P,99.5}(\tilde{L}_X)$
Rentes ordinaires	244.23	1.00	0.24	411.03
Mix $a = 0.9$	-4.95	0.45	0.04	131.31
Mix $a = 0.5$	-648.82	0.00	0.00	-580.24
Mix $a = 0.1$	-809.49	0.00	0.00	-760.05

