

Faculté des sciences

École de Physique
IRMP

Particules entrelacées et fonctions de corrélation dans le diamant aztèque

Auteur :
Nicolas Robert

Lecteurs :
Prof. Tom Claey's,
Prof. Christian Hagendorf

Promoteur :
Prof. Philippe Ruelle

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique
de Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie

Année académique 2020-2021

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, mon promoteur, le Professeur Philippe Ruelle, qui a su me guider tout au long de ce travail par son expertise avisée, mais également Bryan Debin, dont les conseils et les recommandations furent d'une aide très précieuse lors de mes recherches et analyses.

Je remercie aussi mes lecteurs pour l'intérêt et le temps qu'ils ont consacrés à la lecture de ce mémoire.

Ce mémoire étant également l'aboutissement de cinq années d'études passionnantes, j'en profite pour remercier les enseignants de l'école de physique et de mathématique de l'UCLouvain qui m'ont accompagné durant ma formation. Et évidemment, mes collègues étudiants sans qui ces années n'auraient pas été les mêmes.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	6
1 Introduction au diamant aztèque	8
2 Description du diamant aztèque en termes de particules entrelacées	12
2.1 Ensemble Gaussien Unitaire	12
2.1.1 Brève introduction historique	12
2.1.2 Densité de probabilité des valeurs propres	14
2.1.3 Fonction de corrélation à 1 point	16
2.2 Processus GUE-corners	22
2.2.1 Présentation du théorème	22
2.2.2 Démonstration du résultat	24
2.2.3 Application aux pavages par des losanges	28
2.3 Représentation bicolore du diamant aztèque et particules entrelacées	29
2.3.1 Représentation bicolore : introduction et motivation	29
2.3.2 Densité de probabilité des particules dans le diamant aztèque	32
2.4 Vérification numérique des propriétés induites par GUE sur le diamant aztèque	36
2.4.1 Densité de particules	37
2.4.2 Loi du demi-cercle de Wigner	39
2.4.3 Corrélations entre les particules	43
2.4.4 Distribution de Tracy-Widom	47
3 Fonctions de corrélation à deux points dans le diamant aztèque	50
3.1 Réseau carré et matrice de Kasteleyn	50

3.2	Corrélations exactes sur le réseau carré	55
3.3	Corrélations numériques sur le diamant aztèque	60
3.3.1	Corrélations dans le centre du diamant	60
3.3.2	Corrélations hors du centre et sur le cercle arctique	63
Conclusion		70
Bibliographie		71

Introduction

L'étude des pavages en dominos sur le diamant aztèque fut originalement introduite par N. Elkies et al. en 1992 [1]. Depuis, ce modèle a été longuement étudié et de nombreuses propriétés, mathématiquement très riches, ont pu être mises en exergue. Le phénomène le plus important lié à ce modèle étant une *séparation de phase spatiale* au niveau de la disposition des dominos, pour des diamants de grande taille. La courbe qui sépare ainsi les différentes régions du diamant est nommée *courbe arctique*, et dans la situation où chaque configuration est équiprobable, cette courbe tend vers un cercle dans la limite d'échelle [2].

Bien que ce modèle possède une formulation très mathématique en apparence, il est également d'un grand intérêt en physique. En effet, la présence d'une séparation de phase le relie à l'étude des phénomènes de transition, qui est un vaste sujet de la physique mathématique. Les phénomènes arctiques, tels que celui présent dans le diamant aztèque, apparaissent concrètement dans l'étude de la forme de certains cristaux [3], mais de manière plus générale, il est fréquent de pouvoir relier des modèles de pavage à des théories de fermions [4]. En particulier, dans le cas du diamant aztèque, toujours lorsque les configurations sont équiprobables, c'est une *théorie de fermions libres en espace courbe* qui a été exhibée [5]. Ce type de théorie est un sujet d'étude récent, qui a encore beaucoup de choses à dévoiler.

Un autre point valorisant l'étude de ce modèle vient du fait qu'il est fréquent de pouvoir relier différents modèles statistiques entre eux, parfois par le biais de certaines hypothèses ou contraintes. Dans le cas du diamant aztèque, on peut montrer que celui-ci est équivalent, lorsque les configurations sont équiprobables, au modèle à 6-vertex à $\Delta = 0$ (point de fermion libre) et pour des conditions aux bords de type « domain wall » (DWBC). Ce modèle, quant à lui, possède des applications physiques plus directes, ayant été à la base introduit pour décrire des structures de glace en deux dimensions [6]. L'étude du diamant aztèque peut donc également potentiellement aboutir à une meilleure compréhension d'autres modèles physiques.

De plus, l'étude du diamant aztèque est également intéressante d'un point de vue purement mathématique. Comme on le verra tout au long de ce mémoire, ce modèle présente des liens avec des théories mathématiques extrêmement riches, comme la théorie des matrices aléatoires. On retrouve également dans les fluctuations de la courbe arctique la distribution de Tracy-Widom [7], qui apparaît également dans d'autres domaines de la physique tels que dans l'étude des cristaux liquides [8, 9] ou bien pour des fermions confinés dans des pièges harmoniques [10].

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier le diamant aztèque au moyen de simulations

numériques tout en fournissant le bagage théorique nécessaire à la compréhension de ces simulations. Les différents résultats théoriques qui seront présentés sont connus, la raison de leur présence a surtout pour objectif de rassembler et synthétiser ces résultats au sein d'un même document, mais également afin que ce mémoire puisse être lu de manière indépendante, sans qu'une connaissance approfondie de ces thématiques soit requise. Le point innovant de ce travail réside quant à lui dans la vérification de ces propriétés au moyen de simulations numériques, ce qui, à ma connaissance, a été assez peu étudié dans la littérature. Après une brève et générale introduction au diamant aztèque (chapitre 1), notre étude se concentrera en particulier sur deux aspects clés de celui-ci.

Le premier étant le lien avec la théorie des matrices aléatoires et plus précisément *l'Ensemble Gaussien Unitaire* (GUE). Dans cette optique, nous commencerons par introduire le lecteur à la théorie des matrices aléatoires et, en particulier, nous démontrerons certains résultats majeurs concernant GUE (section 2.1). Nous présenterons ensuite la densité de probabilité jointe des valeurs propres du processus GUE-corners (aussi appelé GUE-minors), qui sera l'une des pierres angulaires de ce travail (section 2.2). Dans la section 2.3, nous donnerons une description du diamant aztèque en termes de particules entrelacées à partir de laquelle nous démontrerons formellement le lien avec le processus GUE-corners. Cette relation sera ensuite étudiée du point de vue numérique dans la section 2.4, où nous verrons en particulier qu'il est possible d'obtenir les fonctions de corrélation à un et deux points de ces particules entrelacées à partir de notre connaissance des distributions de GUE.

Le second aspect du diamant aztèque que nous étudierons concerne les fonctions de corrélation à deux points entre dimères horizontaux et verticaux dans la région désordonnée. Ces fonctions n'ont pas encore été beaucoup étudiée dans la littérature, il peut donc être pertinent d'en extraire le comportement global en recourant à des simulations numériques afin d'accroître notre compréhension de ces dernières. Nous commencerons cette étude par l'analyse des corrélations sur le plan, qui peut être résolue de manière exacte (section 3.1 et 3.2). Ceci nous servira de point de référence pour l'analyse numérique sur le diamant aztèque dans laquelle nous verrons que plusieurs comportements algébriques et exponentiels se dégageront pour les décroissances de ces fonctions de corrélation (section 3.3).

Chapitre 1

Introduction au diamant aztèque

Le diamant aztèque est un sous-domaine du plan constitué de carrés dont les sommets, de coordonnées (x, y) , respectent la relation $|x| + |y| \leq n + 1$.

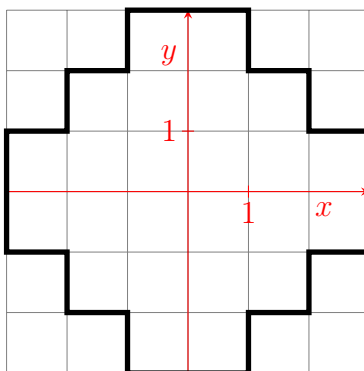


FIGURE 1.1 – Diamant aztèque d'ordre 3.

On définit une configuration de ce modèle comme étant un pavage de ce domaine par des dimères (aussi appelés dominos) de taille 2×1 (horizontal) ou 1×2 (vertical). Il est possible d'attribuer des poids différents à ces deux types de dominos. Cependant, dans ce travail, on se concentrera essentiellement sur le cas où ces poids sont égaux.

Il est également fréquent de représenter une configuration du diamant aztèque sur le réseau dual, les dominos sont alors schématisés par des liens entre les points de ce réseau (voir figure 1.2).

On peut écrire la probabilité d'obtenir une certaine configuration c de ce modèle comme

$$\mathbb{P}(c) = \frac{1}{\mathcal{Z}_n} u^{N_h^c} v^{N_v^c} \quad (1.1)$$

où

$$\mathcal{Z}_n = \sum_{\{c\}} u^{N_h^c} v^{N_v^c} \quad (1.2)$$

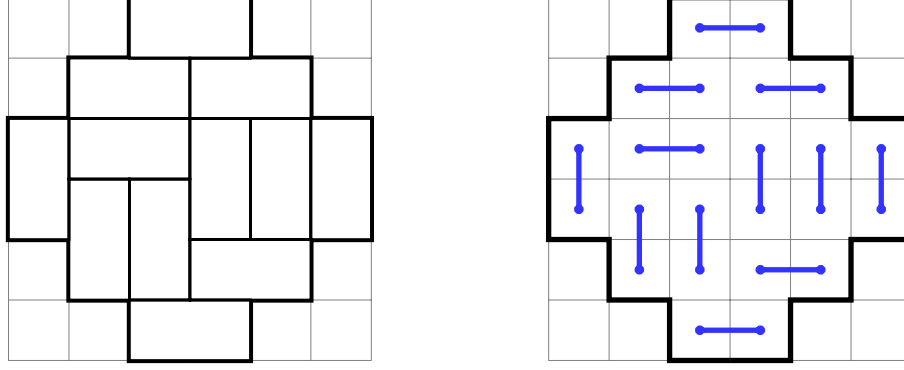


FIGURE 1.2 – À gauche, un exemple de configuration du diamant aztèque. À droite, cette même configuration représentée cette fois en termes de liens sur le réseau dual.

est la fonction de partition du modèle, u et v sont les poids attribués aux dimères horizontaux et verticaux respectivement, tandis que N_h^c et N_v^c sont le nombre de dimères horizontaux et verticaux dans la configuration c . Dans le cas qui nous intéresse, si on prend $u = v$, le nombre total de dimères constituant un diamant aztèque d'ordre n étant égal à $n(n+1)$,

$$\mathcal{Z}_n \Big|_{u=v} = \sum_{\{c\}} u^{N_h^c + N_v^c} = u^{n(n+1)} \sum_{\{c\}} 1.$$

On voit ici que seul le rapport entre les poids est important puisque la constante devant la somme disparaîtra dans la probabilité (1.1), mais ceci nous apprend également que, pour de tels poids, toutes les configurations sont équiprobables. De plus, la fonction de partition est alors donnée par le nombre de configurations possibles. Ce nombre total de configuration $A_n = 2^{n(n+1)/2}$ peut être calculé de plusieurs façons. Les références [1, 11] exploitent la relation entre le diamant aztèque et les matrices de signes alternées, tandis que [7] construit une preuve sur base de l'algorithme de shuffling permettant de générer des configurations aléatoires pour le diamant aztèque. Pour notre part, nous démontrerons cette formule dans la section 2.3 en suivant l'idée de [12] qui s'appuie sur la description du diamant aztèque en termes d'un système de particules entrelacées. Cela sera d'ailleurs un sujet important traité dans le second chapitre de ce mémoire.

Regardons maintenant ce qui fait la spécificité du diamant aztèque, à savoir le phénomène arctique qu'il présente. Pour cela, il est courant de colorier les dimères de la façon suivante. Commençons par superposer le diamant avec un quadrillage en damier (une case sur deux est marquée par une croix) avec pour convention que la première case de la première ligne contenue dans le diamant est barrée. On prend ensuite une certaine convention pour le coloriage des dominos, dépendant de la position de la croix sur le dimère en question, comme illustré sur la figure 1.3. Cette représentation est utile pour mieux discerner les différents types de dimères lorsqu'on regarde des diamants de plus grande taille. Si l'on considère des diamants d'ordre plus élevé, on peut constater l'apparition de zones aux comportements distincts, comme illustré sur la figure 1.4. L'image sur cette figure est une configuration qui a été générée aléatoirement parmi toutes celles possibles. Cependant elle présente des caractéristiques génériques dues à la probabilité beaucoup plus grande de générer des configurations ressemblant qualitativement à celle affichée ici.

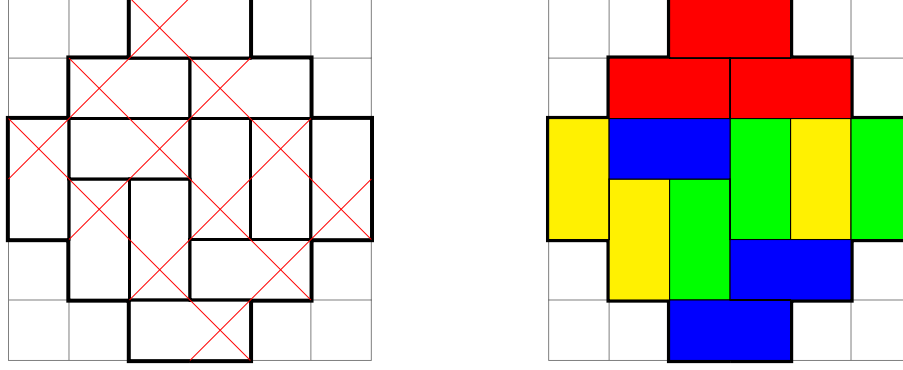


FIGURE 1.3 – À gauche, on a marqué d’une croix une case sur deux afin de prendre en compte la parité du réseau dans la distinction des dimères. À droite, cette même configuration représentée cette fois avec des couleurs pour différencier les quatre types de dimères.

On peut voir que les quatre coins sont ordonnés, on parle de *régions gelées*, tandis que le centre du diamant est désordonné, on parle parfois de *région liquide*. L’interface qui sépare ces deux domaines converge vers une courbe dans la limite d’échelle, appelée *courbe arctique*, et qui s’avère être un cercle lorsque les poids attribués aux dimères horizontaux et verticaux sont les mêmes. Cependant, pour des configurations de poids différentes, la forme de la courbe peut changer. Pour être plus précis à ce sujet, la situation où les poids sont égaux correspond à un cas particulier du modèle où celui-ci est relié à une théorie de *fermions libres*. Il est alors possible d’interpréter le changement du rapport entre les poids comme l’ajout d’interactions dans le modèle, introduisant ainsi des complexités supplémentaires et justifiant intuitivement pourquoi le modèle devient insoluble analytiquement.

D’autres auteurs [4] expliquent également qu’il est possible de complexifier le modèle en introduisant, par exemple, des « interactions de plaquettes », en favorisant (ou défavorisant) les configurations présentant des dominos adjacents alignés. Ceci affecte alors d’une façon non triviale la forme de la courbe arctique. Si l’on applique ces interactions uniquement sur le sous-réseau pair, une troisième phase (gazeuse), où les fonctions de corrélation décroissent exponentiellement, peut d’ailleurs émerger au centre du diamant.

Les lecteurs avertis ne sont pas sans savoir qu’il est possible de relier le diamant aztèque ayant des poids égaux sur les différents dimères au modèle à 6-vertex pour $\Delta = 0$, $a = b = 1$ et des conditions aux bords de type *domain wall*. Il se trouve en réalité, que de telles interactions de plaquettes (appliquées uniquement sur le sous-réseau pair ou impair) ne détruisent pas ce lien entre les deux modèles, et permettent en fait de le prolonger pour différentes valeurs de Δ , ce qui en fait l’une des rares interactions pour laquelle le modèle du diamant aztèque reste exactement soluble. Par ailleurs, il a été prouvé [13] que pour le modèle à 6-vertex, la courbe arctique n’est en général pas algébrique lorsqu’on s’éloigne du point de fermions libres.

On terminera cette section en mentionnant un résultat important concernant le diamant aztèque. Dans le cas de poids identiques sur les quatre types de dimères, il est possible de calculer la densité de chacun d’entre eux dans la limite d’échelle (les variables x et y de la figure 1.1 vont alors de -1 à $+1$), on trouve à l’intérieur du cercle arctique, pour $x^2 + y^2 < 1/2$, la densité de dominos rouges (aussi appelé dominos « Nord »),

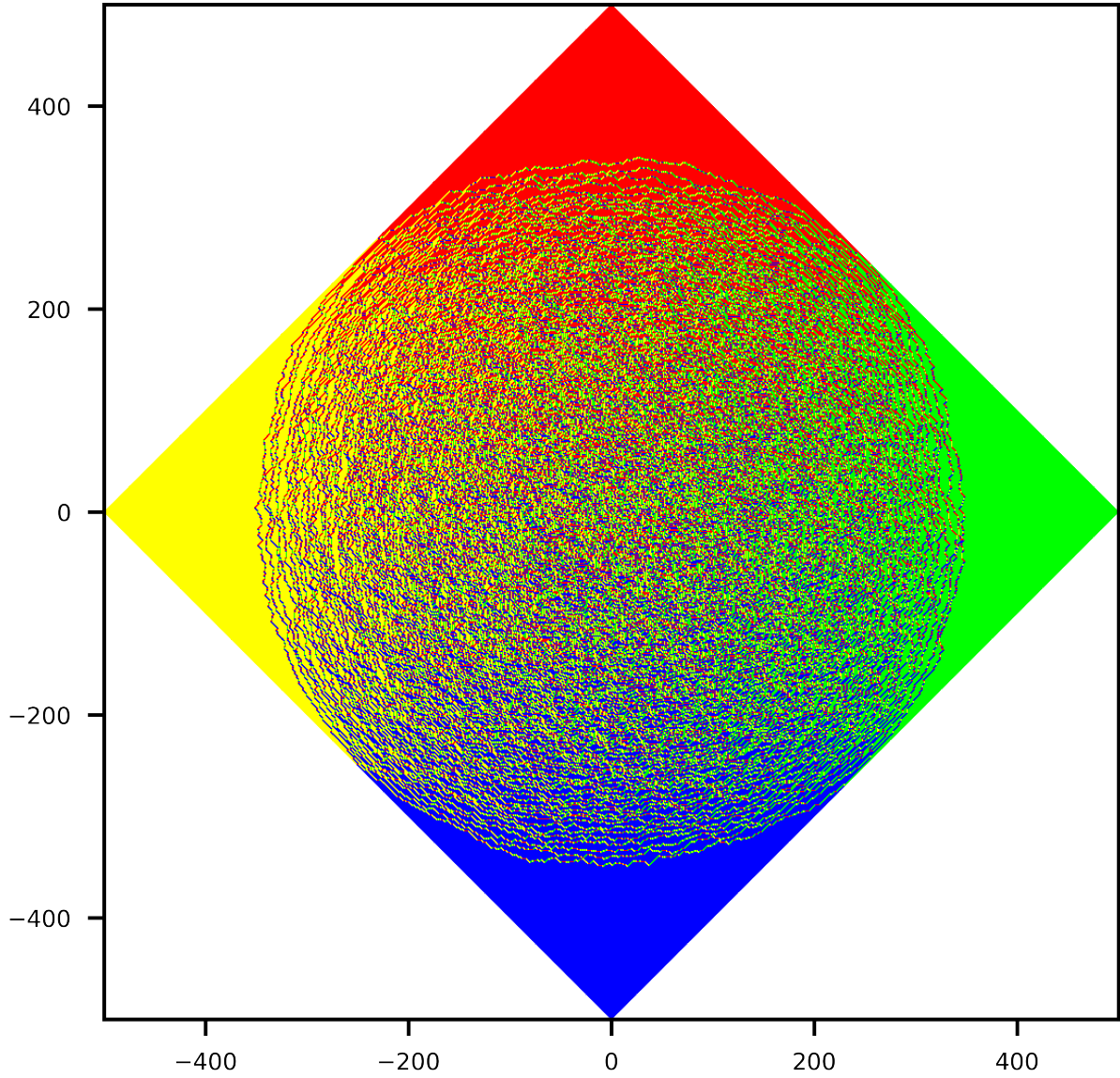


FIGURE 1.4 – Diamant aztèque d’ordre 500, généré à partir de l’algorithme de shuffling.

$$\rho_N(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2y - 1}{\sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}} \right), \quad (1.3)$$

tandis qu’en dehors du cercle arctique cette densité vaut $+1$ dans le coin supérieur (région Nord), et 0 dans les trois autres coins. On peut ensuite obtenir les densités des autres types de dimères par symétrie du diamant aztèque. Ce résultat est obtenu et détaillé dans [14].

Chapitre 2

Description du diamant aztèque en termes de particules entrelacées

Dans ce chapitre, nous commencerons par introduire la théorie des matrices aléatoires et présenterons quelques propriétés majeures de *l'Ensemble Gaussien Unitaire* (GUE). Nous verrons ensuite comment il est possible de relier l'étude du diamant aztèque dans une description en termes de particules entrelacées au processus GUE-corners. Et pour finir, nous étudierons cette relation du point de vue des simulations numériques.

2.1 Ensemble Gaussien Unitaire

2.1.1 Brève introduction historique

Durant la seconde moitié du 20^e siècle, la théorie des matrices aléatoires (RMT) a fortement gagné en popularité, grâce, entre autres, au physicien Eugene Paul Wigner. À ce moment-là, les physiciens nucléaires étudiaient la structure des noyaux lourds, mais l'hamiltonien du système gagnait tellement en complexité que le problème devenait difficile voire impossible à résoudre. Néanmoins, on avait expérimentalement accès à certaines informations telles que la répartition des niveaux d'énergie, ainsi que leurs corrélations, révélant une certaine structure universelle indépendante de l'atome lui-même. Wigner a alors eu l'idée de remplacer l'hamiltonien, trop complexe, par une matrice ayant pour entrées des variables aléatoires suivant des lois gaussiennes, tout en conservant la propriété du hamiltonien d'être hermitien. Il se fait que cette approche a permis de retrouver théoriquement les courbes attendues pour ce modèle [15].

Depuis, la RMT s'est beaucoup développée, en particulier, on a identifié deux ensembles de matrices ayant des propriétés particulièrement intéressantes. Le premier est constitué de ce que l'on appelle des matrices de Wigner, dont les entrées sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. Pour être plus précis, cela signifie que l'on peut factoriser la distribution de probabilité jointe en termes des distributions de probabilité de chaque

variable

$$\rho(X_{11}, X_{12}, \dots) = \rho_{11}(X_{11})\rho_{12}(X_{12}) \dots \quad (2.1)$$

De telles matrices ont l'avantage d'être faciles à générer et à traiter numériquement. Cependant, il est assez difficile d'obtenir analytiquement la distribution de probabilité jointe pour les valeurs propres.

Le second ensemble est celui des matrices rotationnellement invariantes, pour lesquelles la densité de probabilité jointe respecte la propriété, pour $X' = GXG^{-1}$, avec X et X' des matrices aléatoires¹,

$$\rho(X)dX = \rho(X')dX', \quad (2.2)$$

où G est une représentation matricielle d'un élément du groupe de Lie $\mathcal{G}$ (généralement $O(n)$, $U(n)$ ou $Sp(n)$). En particulier, ceci implique qu'à la fois la distribution de probabilité ρ doit être invariante sous conjugaison, mais également la mesure [16].

Cet ensemble de matrices présente les avantages et inconvénients inverses du précédent, c'est-à-dire que ces matrices sont assez difficiles à traiter du point de vue numérique, mais il est possible d'obtenir plus facilement des résultats analytiques tels que la distribution de probabilité jointe pour les valeurs propres.

On pourrait se demander s'il existe également certains ensembles de matrices appartenant aux deux catégories. La réponse est apportée par un théorème de Porter et Rosenzweig [16], disant que les ensembles gaussiens sont les seuls à avoir cette propriété si l'on considère les matrices aléatoires ayant un spectre réel. Ici, on désigne par ensembles gaussiens ceux dont la distribution de probabilité jointe est donnée par

$$\rho(X) = \mathcal{A} \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(X^2) \right) = \mathcal{A} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_i |x_{ii}|^2 - \sum_{i < j} |x_{ij}|^2 \right), \quad (2.3)$$

où X est une matrice aléatoire et $\mathcal{A}$ une constante de normalisation. On voit directement dans le membre de droite de cette expression que les entrées de X sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gaussiennes, tandis que dans la partie centrale, l'expression en termes d'une trace nous garantit que la propriété (2.2) est respectée. On distingue ensuite trois ensembles parmi ceux-ci, à savoir, GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble), GUE (Gaussian Unitary Ensemble) et GSE (Gaussian Symplectic Ensemble), faisant chacun référence au groupe de Lie pour lequel l'identité (2.2) est vérifiée. Ainsi, GUE est constitué des matrices complexes hermitiennes (ce qui garantit que le spectre des valeurs propres est réel) dont les parties réelles et imaginaires des coefficients sont des variables aléatoires gaussiennes. Dans la suite, on s'intéressera principalement à GUE, car comme on le verra, cet ensemble peut être relié à certains modèles de pavage, dont le diamant aztèque.

Aujourd'hui, la théorie des matrices aléatoires trouve beaucoup d'applications en mathématique et en physique notamment dans les domaines suivants :

- chaos quantique,
- atomes ultra-froid,

1. Par dX , on désigne ici la quantité $dX_{11}dX_{12}dX_{13} \dots$.

- chromodynamique quantique,
- fonction zêta de Riemann,
- processus déterminantaux.

Mais également en finance, en neurologie, ainsi que dans beaucoup d'autres domaines [10, 17].

2.1.2 Densité de probabilité des valeurs propres

Un résultat important de la RMT est l'obtention de la densité de probabilité jointe des valeurs propres pour un certain ensemble de matrices. Dans le cas des ensembles gaussiens, il est possible d'obtenir analytiquement cette distribution, nous ferons donc ce calcul en détail dans cette section. Plusieurs preuves assez différentes existent, nous suivrons ici le raisonnement proposé par [16] qui est particulièrement intuitif. Cette preuve s'appuie sur le fait que l'on peut diagonaliser notre matrice $H \in \mathbf{GUE}(n)$ par une matrice U unitaire,

$$H = UXU^\dagger, \quad UU^\dagger = \mathbb{1}, \quad X \text{ diagonale.} \quad (2.4)$$

On effectue donc le changement de variables $\{h_{11}, h_{12}, \dots, h_{nn}\} \rightarrow \{x_1, \dots, x_n; U\}$, où les h_{ij} sont les éléments de H , les x_i sont les valeurs propres et U désigne la collection de variables indépendantes contenues dans la matrice des vecteurs propres. Au niveau de la jpdf (joint probability density function), ce changement de variable s'exprime comme

$$\begin{aligned} \rho(h_{11}, h_{12}, \dots, h_{nn}) \prod_{i \leq j} dh_{ij} &= \rho'(x_1, \dots, x_n; U) dU \prod_i dx_i \\ &= \rho(h_{11}(X, U), h_{12}(X, U), \dots, h_{nn}(X, U)) |\mathcal{J}(\{h_{ij}\} \rightarrow \{x_i; U\})| dU \prod_i dx_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\mathcal{J}$ désigne le Jacobien du changement de variable.

Afin de s'assurer que ce changement de variable est correct, on peut procéder à un comptage des degrés de liberté. D'un côté, on a une matrice hermitienne, et donc $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$ variables réelles indépendantes. De l'autre, on a n valeurs propres ainsi qu'une matrice unitaire contenant n^2 variables réelles indépendantes. Ce changement de variable n'est donc pas bijectif à première vue, en raison d'un trop grand nombre de degrés de liberté dans notre matrice U . On se rend compte cependant, que la phase globale, par exemple, disparaît dans la diagonalisation. Il nous faut donc restreindre certains de ces degrés de liberté superflus présent dans la matrice U . Le document [18] résout ce problème en imposant des conditions supplémentaires sur cette matrice U et en vérifiant certaines propriétés. Nous n'irons pas aussi loin dans le détail ici, mais nous verrons dans la suite de la preuve comment s'assurer que le changement de variable soit bien bijectif.

En premier lieu, on peut regarder ce que devient la jpdf sous ce changement de variable. Grâce à l'expression en termes de la trace de H^2 , on obtient directement le résultat

$$\rho(h_{11}, h_{12}, \dots, h_{nn}) = \mathcal{A} \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(H^2) \right) = \mathcal{A} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \right). \quad (2.6)$$

On remarquera que la fonction ne dépend pas des vecteurs propres.

Pour calculer le Jacobien, on différentie formellement ² les relations (2.4),

$$\begin{aligned}\delta H &= (\delta U)XU^\dagger + U(\delta X)U^\dagger + UX(\delta U^\dagger), \\ (\delta U)U^\dagger + U(\delta U^\dagger) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \delta U^\dagger = -U^\dagger(\delta U)U^\dagger,\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\delta H = (\delta U)XU^\dagger + U(\delta X)U^\dagger - UX[U^\dagger(\delta U)U^\dagger]. \quad (2.7)$$

On pose $\delta \tilde{H} = U^\dagger(\delta H)U$ et $\delta \Omega = U^\dagger(\delta U)$. On vérifie facilement que $\delta \Omega$ est anti-hermitienne puisque

$$U^\dagger(\delta U) = -(\delta U^\dagger)U = -[U^\dagger(\delta U)]^\dagger,$$

et du fait que H et $\tilde{H}$ sont reliés par une transformation unitaire, les Jacobiens des changements de variables $\{H\} \rightarrow \{X; U\}$ et $\{\tilde{H}\} \rightarrow \{X; U\}$ sont les mêmes, par invariance rotationnelle. On a donc, en multipliant (2.7) à droite par U et à gauche par $U^\dagger$,

$$\delta \tilde{H} = (\delta \Omega)X + \delta X - X(\delta \Omega), \quad (2.8)$$

ou sous forme indicielle, ³

$$\begin{aligned}d\tilde{h}_{ij} &= d\omega_{ij}(x_j - x_i) + dx_i\delta_{ij} \\ &= d\omega_{ij}^{\mathcal{R}}(x_j - x_i) + i d\omega_{ij}^{\mathcal{I}}(x_j - x_i) + dx_i\delta_{ij}.\end{aligned} \quad (2.9)$$

De cette expression, on déduit les entrées de la Jacobienne,

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{R}}}{dx_k} &= \delta_{ij}\delta_{ik}, & \frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{R}}}{d\omega_{kl}^{\mathcal{R}}} &= (x_j - x_i)\delta_{jl}\delta_{ik}, & \frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{R}}}{d\omega_{kl}^{\mathcal{I}}} &= 0, \\ \frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{I}}}{dx_k} &= 0, & \frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{I}}}{d\omega_{kl}^{\mathcal{R}}} &= 0, & \frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{I}}}{d\omega_{kl}^{\mathcal{I}}} &= (x_j - x_i)\delta_{jl}\delta_{ik}.\end{aligned} \quad (2.10)$$

On peut remarquer ici que si les entrées diagonales de $\delta \Omega$ ne sont pas nulles, la Jacobienne n'est pas inversible, puisque

$$\frac{d\tilde{h}_{ij}^{\mathcal{B}}}{d\omega_{kk}^{\mathcal{I}}} = 0, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n \text{ et } \mathcal{B} = \mathcal{R}, \mathcal{I}. \quad (2.11)$$

Du fait que $\delta \Omega$ est anti-hermitienne, il y a n degrés de liberté dans ses entrées diagonales, cela correspond aux n degrés de liberté superflus que l'on avait discuté précédemment et qu'il faut contraindre si l'on veut rendre le changement de variable bijectif. On supposera donc que ces entrées sont nulles et ne font pas partie des variables de la nouvelle base, sans rentrer davantage dans les détails.

2. δH est un raccourci pour désigner la matrice dont les entrées sont données par dh_{ij} .

3. Par souci de lisibilité, on a posé $A^{\mathcal{R}} = \text{Re}(A)$ et $A^{\mathcal{I}} = \text{Im}(A)$.

La forme de la Jacobienne étant un peu abstraite, il peut être utile de la calculer explicitement pour une petite valeur de n . Ainsi, pour $n = 2$, on trouve

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{d\tilde{h}_{11}}{dx_1} & \frac{d\tilde{h}_{11}}{dx_2} & \frac{d\tilde{h}_{11}}{d\omega_{12}^{\mathcal{R}}} & \frac{d\tilde{h}_{11}}{d\omega_{12}^{\mathcal{I}}} \\ \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{R}}}{dx_1} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{R}}}{dx_2} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{R}}}{d\omega_{12}^{\mathcal{R}}} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{R}}}{d\omega_{12}^{\mathcal{I}}} \\ \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{I}}}{dx_1} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{I}}}{dx_2} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{I}}}{d\omega_{12}^{\mathcal{R}}} & \frac{d\tilde{h}_{12}^{\mathcal{I}}}{d\omega_{12}^{\mathcal{I}}} \\ \frac{d\tilde{h}_{22}}{dx_1} & \frac{d\tilde{h}_{22}}{dx_2} & \frac{d\tilde{h}_{22}}{d\omega_{12}^{\mathcal{R}}} & \frac{d\tilde{h}_{22}}{d\omega_{12}^{\mathcal{I}}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)^2.$$

En fait, si l'on examine attentivement les expressions (2.10), on peut s'apercevoir que chaque ligne de la matrice ne contient qu'une entrée non nulle, le déterminant est alors simplement donné par le produit de ces entrées,

$$|\mathcal{J}(x_1, \dots, x_n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2. \quad (2.12)$$

On remarquera également que l'expression ne dépend pas des vecteurs propres comme on aurait pu le penser au départ. En réalité, le fait que ni la densité de probabilité, ni le jacobien ne dépendent des vecteurs propres est une conséquence de l'invariance rotationnelle mentionnée au début de la section, et cette prodigieuse simplification nous permet d'intégrer l'expression (2.5) sur les variables des vecteurs propres sans complications supplémentaires, afin d'obtenir la densité de probabilité jointe en termes des valeurs propres uniquement. Cette intégration nous amènera une constante que l'on ne discutera pas ici, mais cela est fait dans les références [16, 18].

En conclusion, si l'on rassemble les résultats (2.5), (2.6) et (2.10), et que l'on intègre sur les vecteurs propres, on obtient finalement la densité de probabilité jointe pour les valeurs propres d'une matrice de **GUE**(n),

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{A}_n e^{-\frac{1}{2} \sum_i^n x_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2. \quad (2.13)$$

Un point sur lequel il est important d'insister ici est que, malgré le fait que les entrées de la matrice de **GUE**(n) sont des variables aléatoires indépendantes, ce n'est pas le cas des valeurs propres. En effet, le produit de la différence des valeurs propres nous empêche désormais de factoriser l'expression. Ce terme induit donc des corrélations entre les valeurs propres qui peuvent s'interpréter comme des répulsions entre celles-ci. Les valeurs propres vont donc avoir tendance à s'écarter un peu les unes des autres.

2.1.3 Fonction de corrélation à 1 point

Maintenant que le résultat (2.13) est établi, on aimerait pouvoir en déduire certaines quantités faciles à étudier du point de vue numérique. L'une des plus importantes est la distribution

marginale à un point, donnant la densité moyenne de valeurs propres. Cette fonction est obtenue en intégrant la jpdf sur toutes ses variables sauf une,

$$\rho(x_1) = \mathcal{A}_n \int \left(\prod_{i=2}^n dx_i \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n x_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2. \quad (2.14)$$

Afin de réaliser ce calcul, il nous faut introduire quelques notions supplémentaires. On appelle déterminant de Vandermonde la quantité

$$\Delta_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

On peut facilement montrer que le déterminant d'une telle matrice est en effet égale au produit de l'égalité intermédiaire. Plusieurs preuves existent, on peut le montrer notamment de la façon suivante, par induction. Pour $n = 2$ le résultat est immédiat, on peut ensuite utiliser les propriétés du déterminant pour se ramener au cas $n - 1$. Pour cela, on rappelle que le déterminant garde la même valeur si l'on effectue des opérations additives entre les lignes de la matrice, on peut ainsi effectuer sur la ligne $k > 1$ l'opération $L_k \mapsto L_k - x_1 L_{k-1}$ de façon à placer des zéros sur la première colonne, et ensuite calculer uniquement le déterminant de la sous-matrice restante,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_n - x_1) \dots (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé le fait que chaque entrée de la colonne k possédait un facteur $(x_k - x_1)$ pour le sortir du déterminant. Ainsi, si l'on suppose le résultat vrai pour $n - 1$, on obtient l'expression (2.15), ce qui conclut la preuve.

En réalité, cette propriété reste essentiellement vraie pour une matrice dont les entrées à la ligne k sont des polynômes de degré $k - 1$,

$$\begin{vmatrix} \pi_0(x_1) & \pi_0(x_2) & \dots & \pi_0(x_n) \\ \pi_1(x_1) & \pi_1(x_2) & \dots & \pi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n-1}(x_1) & \pi_{n-1}(x_2) & \dots & \pi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \Delta_n(x_1, \dots, x_n) \prod_k a_k, \quad (2.16)$$

où les $\pi_k(x)$ sont des polynômes de degré k dont le coefficient x^k est a_k . On comprend tout de suite, sur base des mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve, qu'effectivement, seul l'ordre le plus grand du polynôme a de l'importance, tout le reste pouvant être mis à zéro par des opérations entre les lignes sans changer la valeur du déterminant.

Commençons maintenant le calcul de la distribution marginale. Nous suivrons pour cela la méthode proposée par [16], qui utilise plusieurs outils récurrents de la théorie des matrices aléatoires. En premier lieu, il sera utile de réexprimer le produit venant du Jacobien comme le carré du déterminant de Vandermonde (2.16), sans préciser pour le moment les polynômes utilisés,

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 &= \Delta_n^2(x_1, \dots, x_n) = \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n [\Delta_n(\mathbf{x})]_{ki} [\Delta_n(\mathbf{x})]_{kj} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\prod_k a_k} \right)^2 \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_i) \pi_k(x_j) \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

On a utilisé le fait que le produit de deux déterminants est égal au déterminant du produit des matrices, et également que le déterminant d'une matrice transposée est égal à celui de la matrice d'origine.

La seconde étape consiste à faire rentrer le reste de l'expression (2.13) à l'intérieur du déterminant également. Pour cela, on scinde l'exponentielle des valeurs propres en deux, et on la distribue sur les lignes et colonnes de la matrice,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n e^{-\frac{1}{2} \sum_i^n x_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 &= \frac{\mathcal{A}_n}{(\prod_k a_k)^2} \prod_i^n e^{-\frac{1}{4} x_i^2} \prod_j^n e^{-\frac{1}{4} x_j^2} \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_i) \pi_k(x_j) \right) \\ &= \frac{\mathcal{A}_n}{(\prod_k a_k)^2} \det_{1 \leq i, j \leq n} [K_n(x_i, x_j)], \end{aligned}$$

où l'on a défini

$$K_n(x_i, x_j) = e^{-\frac{1}{4}(x_i^2 + x_j^2)} \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_i) \pi_k(x_j). \quad (2.18)$$

On utilise ici le fait que l'on puisse choisir les polynômes π_k à notre avantage. Un choix particulièrement bénéfique, dans notre cas, est de choisir ces polynômes orthogonaux de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{1}{2} x^2} \pi_k(x) \pi_{k'}(x) = \delta_{kk'}. \quad (2.19)$$

Sachant que les polynômes de Hermite satisfont

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2} H_k(x) H_{k'}(x) = \delta_{kk'} \sqrt{\pi} 2^k k!, \quad (2.20)$$

on pose

$$\pi_k(x) = \frac{H_k(x/\sqrt{2})}{\sqrt{\sqrt{2} \pi 2^k k!}}. \quad (2.21)$$

Ce choix nous permet d'avoir ce que l'on nomme *la propriété de reproductivité* sur K_n , à savoir que

$$\int_{\mathbb{R}} dy K_n(x_i, y) K_n(y, x_j) = K_n(x_i, x_j). \quad (2.22)$$

On peut démontrer que ceci est effectivement le cas,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dy K_n(x_i, y) K_n(y, x_j) &= \int_{\mathbb{R}} dy e^{-\frac{x_i^2}{4} - \frac{x_j^2}{4} - \frac{y^2}{2}} \sum_{kk'} \pi_k(x_i) \pi_k(y) \pi_{k'}(y) \pi_{k'}(x_j) \\ &= e^{-\frac{1}{4}(x_i^2 + x_j^2)} \sum_{kk'} \pi_k(x_i) \delta_{kk'} \pi_{k'}(x_j) \\ &= K_n(x_i, x_j). \end{aligned}$$

En réalité, le fait qu'on ait pu exprimer la distribution de probabilité sous forme d'un déterminant, et que l'opérateur $K_n(x_i, x_j)$ satisfait la propriété de reproductivité, n'est pas anodin. Ceci est en fait révélateur de la structure sous-jacente du problème. On appelle un problème respectant de telles propriétés, un *processus déterminantal*, et la fonction $K_n(x_i, x_j)$ est appelée le *noyau* (ou aussi noyau de corrélation). De tels processus ont la particularité que les fonctions de corrélation, elles aussi, s'exprimeront sous la forme d'un déterminant comme nous le verrons plus bas⁴.

Pour obtenir ce résultat, on montre que pour toutes fonctions $K(x_i, x_j)$ respectant la propriété (2.22), on a

$$\int dx_n \det_{1 \leq i, j \leq n} [K(x_i, x_j)] = (q - (n - 1)) \det_{1 \leq i, j \leq n-1} [K(x_i, x_j)], \quad (2.23)$$

où q est donné par

$$q = \int dx K(x, x).$$

Pour démontrer cette propriété, nous suivrons les développements proposés par [20] et [21], mais avant cela, commençons par regarder l'exemple du cas $n = 2$. Dans ce cas, on a tout de suite le résultat

$$\int dx_2 [K(x_1, x_1) K(x_2, x_2) - K(x_1, x_2) K(x_2, x_1)] = (q - 1) K(x_1, x_1).$$

Pour résoudre l'intégrale sur le premier terme, on a repris la définition de q , tandis que pour le second, on a utilisé la propriété de reproductivité. Cet exemple est peut être un peu simple, mais il permet néanmoins d'illustrer efficacement comment apparaît ce coefficient q ainsi que l'importance de la propriété (2.22).

4. Dans la littérature, on prend généralement comme définition de processus déterminantal le fait que la fonction de corrélations à m points puisse s'exprimer comme un déterminant de $K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq m}$, pour tout m , cependant ceci peut être assez difficile à vérifier. Heureusement, un résultat, démontré par Mehta [19], nous dit que si les deux propriétés que nous avons vues ici sont respectées, alors le processus est bel et bien déterminantal.

Maintenant, pour le cas n quelconque, commençons par réexprimer le déterminant sous la forme

$$\begin{aligned} \int dx_n \det_{1 \leq i, j \leq n} [K(x_i, x_j)] &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \int dx_n K(x_1, x_{\sigma(1)}) K(x_2, x_{\sigma(2)}) \cdots K(x_n, x_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \varepsilon(\sigma) \int dx_n K(x_1, x_{\sigma(1)}) K(x_2, x_{\sigma(2)}) \cdots K(x_n, x_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

où S_n désigne le groupe des permutations de n objets et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ . En premier lieu, on peut extraire de la première sommation et traiter séparément le terme où $k = n$, pour lequel on a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) \int dx_n K(x_1, x_{\sigma(1)}) K(x_2, x_{\sigma(2)}) \cdots K(x_n, x_n) \\ &= q \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) K(x_1, x_{\sigma(1)}) K(x_2, x_{\sigma(2)}) \cdots K(x_{n-1}, x_{\sigma(n-1)}) \\ &= q \det_{1 \leq i, j \leq n-1} [K(x_i, x_j)]. \end{aligned}$$

Regardons ce qu'il en est pour le reste de la sommation sur k . Si $\sigma(n) = k < n$, cela signifie que $\sigma(l) = n$ pour un certain $l < n$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \varepsilon(\sigma) \int dx_n K(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots K(x_l, x_n) \cdots K(x_n, x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \varepsilon(\sigma) K(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots K(x_l, x_k) \cdots K(x_{n-1}, x_{\sigma(n-1)}). \end{aligned}$$

L'astuce pour poursuivre le calcul ici est de définir une permutation $\tilde{\sigma} \in S_{n-1}$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}(i) = \sigma(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n-1, \text{ et } i \neq l \\ \tilde{\sigma}(i) = k & \text{si } i = l. \end{cases}$$

Cette permutation est de signature opposée à celle de σ , puisque $\sigma(n) = k$ et $\sigma(l) = n$,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tilde{\sigma}) &= \varepsilon(\{\sigma(1), \dots, \sigma(l-1), k, \sigma(l+1), \dots, \sigma(n-1), n\}) \\ &= -\varepsilon(\{\sigma(1), \dots, \sigma(l-1), n, \sigma(l+1), \dots, \sigma(n-1), k\}) \\ &= -\varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

On peut donc reprendre notre calcul, pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} \varepsilon(\sigma) K(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots K(x_l, x_k) \cdots K(x_{n-1}, x_{\sigma(n-1)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k \\ \sigma(l)=n}} \varepsilon(\sigma) K(x_1, x_{\sigma(1)}) \cdots K(x_l, x_k) \cdots K(x_{n-1}, x_{\sigma(n-1)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in S_{n-1} \\ \tilde{\sigma}(l)=k}} -\varepsilon(\tilde{\sigma}) K(x_1, x_{\tilde{\sigma}(1)}) \cdots K(x_l, x_{\tilde{\sigma}(l)}) \cdots K(x_{n-1}, x_{\tilde{\sigma}(n-1)}) \\
&= - \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{\tilde{\sigma} \in S_{n-1}} \varepsilon(\tilde{\sigma}) K(x_1, x_{\tilde{\sigma}(1)}) \cdots K(x_l, x_{\tilde{\sigma}(l)}) \cdots K(x_{n-1}, x_{\tilde{\sigma}(n-1)}) \\
&= - \sum_{l=1}^{n-1} \det_{1 \leq i, j \leq n-1} [K(x_i, x_j)] \\
&= -(n-1) \det_{1 \leq i, j \leq n-1} [K(x_i, x_j)].
\end{aligned}$$

En mettant ce résultat et le précédant ensemble, on obtient alors effectivement la propriété (2.23). Cette propriété nous permet maintenant de résoudre les intégrales qui nous posaient problème et d'obtenir les expressions recherchées pour les fonctions de corrélation. Dans notre cas, par la définition de K_n et en utilisant (2.19), on trouve directement que $q = n$. Par conséquent, si on itère la formule k fois, on obtient la fonction de corrélation à $n - k$ point,

$$\int dx_n \cdots dx_{n-k+1} \det_{1 \leq i, j \leq n} [K(x_i, x_j)] = k! \det_{1 \leq i, j \leq n-k} [K(x_i, x_j)].$$

La première conséquence de ceci est que nous sommes désormais en mesure de calculer le coefficient devant la jpdf en intégrant sur toutes les variables,

$$\int \left(\prod_{k=1}^n dx_k \right) \rho(x_1, \dots, x_n) = 1.$$

Et par conséquent,

$$\frac{\mathcal{A}_n}{(\prod_k a_k)^2} = \frac{1}{n!}. \quad (2.24)$$

On obtient également la fonction de corrélation à un point, en intégrant sur toutes les variables sauf une,

$$\rho(x) = \frac{(n-1)!}{n!} K_n(x, x) = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k^2(x/\sqrt{2})}{2^k k!}. \quad (2.25)$$

Cette fonction est très importante, car elle décrit la densité des valeurs propres de **GUE**(n) et elle interviendra à nouveau dans la section 2.4.

2.2 Processus GUE-corners

2.2.1 Présentation du théorème

Dans la section précédente, nous sommes parvenus à établir une expression exacte pour la densité de probabilité des valeurs propres d'une matrice de GUE de taille n fixée. On peut également se demander s'il est possible de déterminer de manière similaire une formule pour la densité de probabilité des valeurs propres d'une telle matrice en comprenant cette fois-ci les valeurs propres de chaque sous-matrice principale (supérieure gauche) de cette dernière. Ceci nous amène à un autre résultat important concernant *l'Ensemble Gaussien Unitaire*. En désignant par $x_i^{(j)}$ la i^e plus grande valeur propre de la sous-matrice principale de taille $j \times j$ prise dans le coin supérieur gauche d'une matrice de **GUE**(n) (voir figure 2.1), on a alors le résultat suivant : la densité de probabilité jointe de l'ensemble des variables $\left\{ x_i^{(j)} \mid i = 1, \dots, j \text{ et } j = 1, \dots, n \right\}$ est proportionnelle à

$$\prod_{i=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} (x_i^{(n)})^2 \right] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^{(n)} - x_j^{(n)}) \prod_{j=1}^{n-1} \chi(x^{(j)} \prec x^{(j+1)}), \quad (2.26)$$

où χ est une fonction indicatrice rendant compte de l'entrelacement des valeurs propres,

$$\chi(x^{(j)} \prec x^{(j+1)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1^{(j+1)} \geq x_1^{(j)} \geq x_2^{(j+1)} \geq \dots \geq x_j^{(j)} \geq x_{j+1}^{(j+1)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Cet entrelacement des valeurs propres entre les sous-matrices est une conséquence du caractère hermitien des matrices de GUE, et est généralement référencé comme le *théorème d'entrelacement de Cauchy*. Cette propriété peut se démontrer de plusieurs façons, la référence [22] donne notamment une preuve très courte de ce résultat en se basant sur l'entrelacement des racines de polynômes, tandis que [23] construit une preuve un peu plus longue afin de ne pas invoquer de résultats extérieurs.

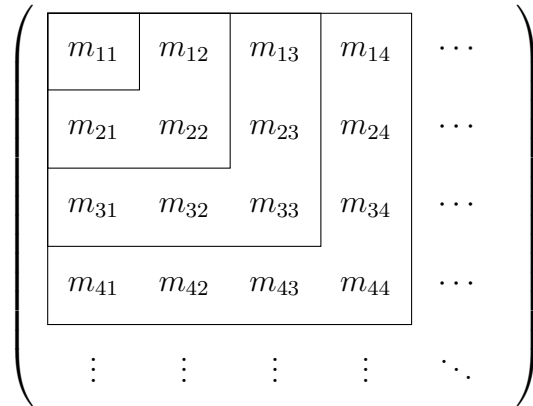


FIGURE 2.1 – Sous-matrices principales prises dans le coin supérieur gauche.

La démarche de considérer ainsi les valeurs propres des sous-matrices de $\mathbf{GUE}(n)$ est généralement désignée comme étant le processus GUE-mineures. J'ai cependant choisi ici de plutôt suivre l'appellation GUE-corners suite à une remarque faite dans [24], sur le fait que les « mineures » désignent plus exactement le déterminant des sous-matrices, tandis qu'ici, on considère les sous-matrices elles-mêmes, ainsi que leurs valeurs propres.

Avant de passer à la preuve de la formule (2.26), j'aimerais montrer qu'il est possible, à partir de cette dernière, de retrouver la densité de probabilité (2.13), établie dans la section précédente. Ceci se fait en intégrant sur toutes les valeurs propres des sous-matrices $\left\{x_i^{(j)} \mid i = 1, \dots, j \text{ et } j = 1, \dots, n-1\right\}$ et en ne conservant que les variables $x_i^{(j)}$ pour $j = n$. Puisque dans la formule (2.26) on a déjà le déterminant de Vandermonde qui apparaît et que seules les indicatrices dépendent des variables à intégrer, il nous faut montrer que l'intégrale de ces indicatrices donne bien un second déterminant de Vandermonde pour retrouver la formule (2.13),

$$\int \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^j dx_i^{(j)} \prod_{j=1}^{n-1} \chi(x^{(j)} \prec x^{(j+1)}) \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^{(n)} - x_j^{(n)}). \quad (2.28)$$

Nous commencerons par considérer les cas $n = 2, 3$ afin de gagner un peu d'intuition sur le calcul.

Pour $n = 2$, le résultat est immédiat,

$$\int dx_1^{(1)} \chi(x^{(1)} \prec x^{(2)}) = \int_{x_2^{(2)}}^{x_1^{(2)}} dx_1^{(1)} = (x_1^{(2)} - x_2^{(2)}).$$

Pour $n = 3$, il nous faut maintenant intégrer le déterminant de Vandermonde tout juste obtenu puisque

$$\begin{aligned} \int dx_1^{(2)} dx_2^{(2)} \chi(x^{(2)} \prec x^{(3)}) \int dx_1^{(1)} \chi(x^{(1)} \prec x^{(2)}) \\ &= \int_{x_2^{(3)}}^{x_1^{(3)}} dx_1^{(2)} \int_{x_3^{(3)}}^{x_2^{(3)}} dx_2^{(2)} (x_1^{(2)} - x_2^{(2)}) \\ &= \int_{x_2^{(3)}}^{x_1^{(3)}} dx_1^{(2)} x_1^{(2)} (x_2^{(3)} - x_3^{(3)}) - \frac{1}{2} \left((x_2^{(3)})^2 - (x_3^{(3)})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (x_1^{(3)} - x_2^{(3)}) (x_2^{(3)} - x_3^{(3)}) (x_1^{(3)} - x_3^{(3)}). \end{aligned}$$

On se rend compte que pour des valeurs de n plus élevées le calcul se complexifiera rapidement, il est cependant possible de prouver la formule par récurrence. Le cas $n = 2$ étant démontré, si l'on suppose le cas n comme vrai, il s'agit alors de prouver que

$$\int_{x_2^{(n+1)}}^{x_1^{(n+1)}} dx_1^{(n)} \cdots \int_{x_{n+1}^{(n+1)}}^{x_n^{(n+1)}} dx_n^{(n)} \det_{1 \leq i, j \leq n} \left[(x_i^{(n)})^{j-1} \right] = \frac{1}{n!} \det_{1 \leq i, j \leq n+1} \left[(x_i^{(n+1)})^{j-1} \right], \quad (2.29)$$

où l'on a remis le déterminant de Vandermonde sous son expression de déterminant matriciel, comme cela fut introduit dans la section 2.1. Puisque la i^e intégrale fait varier uniquement la i^e ligne du déterminant, et que le déterminant est linéaire en chaque ligne, il est possible de faire rentrer ces intégrales à l'intérieur du déterminant (pour cela, on voit les intégrales comme des sommes de Riemann),

$$\int_{x_2^{(n+1)}}^{x_1^{(n+1)}} dx_1^{(n)} \cdots \int_{x_{n+1}^{(n+1)}}^{x_n^{(n+1)}} dx_n^{(n)} \det_{1 \leq i, j \leq n} [(x_i^{(n)})^{j-1}] = \det_{1 \leq i, j \leq n} \left[\int_{x_{i+1}^{(n+1)}}^{x_i^{(n+1)}} dx_i^{(n)} (x_i^{(n)})^{j-1} \right]. \quad (2.30)$$

On peut maintenant facilement réaliser ces intégrations,

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left[\int_{x_{i+1}}^{x_i} dx_i^{(n)} (x_i^{(n)})^{j-1} \right] = \det_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{(x_i)^j - (x_{i+1})^j}{j} \right] = \frac{1}{n!} \det_{1 \leq i, j \leq n} [(x_i)^j - (x_{i+1})^j] \quad (2.31)$$

(où l'on a enlevé l'indice supérieur $(n+1)$ afin d'alléger l'expression). Si l'on regarde la forme matricielle de ce déterminant, et que l'on effectue sur les lignes les opérations $L_i \mapsto \sum_{j=i}^n L_j$,

$$\begin{aligned} \det_{1 \leq i, j \leq n} [(x_i)^j - (x_{i+1})^j] &= \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_1^2 - x_2^2 & \cdots & x_1^n - x_2^n \\ x_2 - x_3 & x_2^2 - x_3^2 & \cdots & x_2^n - x_3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_{n+1} & x_n^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 - x_{n+1} & x_1^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_1^n - x_{n+1}^n \\ x_2 - x_{n+1} & x_2^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_2^n - x_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_{n+1} & x_n^2 - x_{n+1}^2 & \cdots & x_n^n - x_{n+1}^n \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans ce dernier déterminant, on peut mettre en évidence les produits $(x_1 - x_{n+1}) \cdots (x_n - x_{n+1})$, tandis que la quantité qu'il nous restera dans le déterminant sera précisément de la forme (2.16) en prenant les puissances de x_{n+1} comme coefficients des polynômes. On obtient donc le résultat désiré.

On pourrait également vérifier qu'en effectuant l'intégration sur les variables de la matrice d'origine, on retrouve bien la formule pour la plus grande sous-matrice. Ce calcul repose à nouveau sur l'intégration d'un déterminant de Vandermonde, mais on ne le discutera pas ici.

Dans la section 2.1, nous avons brièvement évoqué les processus déterminantaux. L'une des particularités du processus GUE-corners est qu'il est possible de lui trouver un noyau de corrélation, et de montrer qu'il s'agit d'un processus déterminantal. Nous ne discuterons pas davantage cette propriété ici, et renvoyons les lecteurs intéressés à la référence [25].

2.2.2 Démonstration du résultat

Après ces quelques justifications concernant la forme de l'expression (2.26) nous nous proposons maintenant de démontrer ce résultat, en suivant la méthode inductive de [24].

Pour $n = 1$, le résultat est trivial, puisque l'unique variable aléatoire en jeu est une gaussienne par hypothèse. Si l'on suppose le résultat vrai pour $n - 1$, il nous reste alors à démontrer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(y_i < x_i^{(n)} < y_i + dy_i, \ i = 1, \dots, n \mid x_i^{(j)}, \ 1 \leq i \leq j \leq n - 1 \right) \\ & \propto \prod_{i=1}^n \exp \left[-\frac{1}{2} y_i^2 \right] dy_i \prod_{i=1}^{n-1} \exp \left[\frac{1}{2} (x_i^{(n-1)})^2 \right] \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - y_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i^{(n-1)} - x_j^{(n-1)})} \chi(x^{(n-1)} \prec x^{(n)}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pour ce faire, notons Y la matrice $n \times n$ de GUE dont les valeurs propres sont les y_i et X la sous-matrice principale de taille $(n - 1) \times (n - 1)$ dont les valeurs propres sont $x_i \equiv x_i^{(n-1)}$,

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} X & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} u_1^* & \cdots & u_{n-1}^* \end{matrix} & v \end{array} \right).$$

La matrice X étant elle-même hermitienne, il existe une matrice U unitaire telle que $UXU^\dagger = D$ où D est une matrice diagonale dont les entrées sont les x_i . Posons maintenant

$$\tilde{U} = \left(\begin{array}{c|c} U & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \tilde{U}Y\tilde{U}^\dagger = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \tilde{u}_1^* & \cdots & \tilde{u}_{n-1}^* \end{matrix} & v \end{array} \right).$$

Puisque $\tilde{\mathbf{u}} = U\mathbf{u}$, les variables aléatoires complexes $\tilde{u}_i$, $i = 1, \dots, n - 1$, suivent toujours une loi gaussienne. Les matrices Y et $\tilde{Y}$ étant conjuguées l'une de l'autre, elles partagent les mêmes valeurs propres y_i . On considérera donc le polynôme caractéristique de cette dernière. On peut calculer le déterminant en développant selon la dernière colonne,

$$\det \left[\mathbb{1} \cdot y - \tilde{Y} \right] = (y - v) \prod_{i=1}^{n-1} (y - x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} (-\tilde{u}_i) \det \left[\tilde{Y}_i \right], \quad (2.34)$$

où les sous-matrices $\tilde{Y}_i$ sont de la forme

$$\tilde{Y}_i = \begin{pmatrix} y - x_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & y - x_{i-1} & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & y - x_{i+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & y - x_{n-1} \\ -\tilde{u}_1^* & \cdots & -\tilde{u}_{i-1}^* & -\tilde{u}_i^* & -\tilde{u}_{i+1}^* & \cdots & -\tilde{u}_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

On peut donc facilement calculer leurs déterminants en les rendant triangulaires au moyen

de $n - 1 - i$ permutations sur les colonnes. On trouve alors que

$$\det [\tilde{Y}_i] = (-1)^{n-1-i} (-\tilde{u}_i^*) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (y - x_j), \quad (2.35)$$

ce qui nous permet de réécrire

$$\det [\mathbb{1} \cdot y - \tilde{Y}] = \prod_{i=1}^{n-1} (y - x_i) \left[y - v - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\tilde{u}_i|^2}{y - x_i} \right]. \quad (2.36)$$

De plus, comme le déterminant est égal au produit des valeurs propres, on a aussi la relation

$$\det [\mathbb{1} \cdot y - \tilde{Y}] = \prod_{i=1}^n (y - y_i). \quad (2.37)$$

En combinant ces deux égalités, on obtient finalement

$$\frac{\prod_{i=1}^n (y - y_i)}{\prod_{i=1}^{n-1} (y - x_i)} = y - v - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\tilde{u}_i|^2}{y - x_i}. \quad (2.38)$$

Par simplicité, nous utiliserons les variables $\xi_i \equiv |\tilde{u}_i|^2 \geq 0$ dans la suite. Puisque les composantes réelles et imaginaires des $\tilde{u}_i$ suivent des lois gaussiennes de variances $1/2$, les ξ_i suivent quant à eux simplement des distributions exponentielles $e^{-\xi}$.

On peut maintenant utiliser la relation (2.38) pour déterminer l'expression des variables ξ_i et v en termes des valeurs propres de Y et X . Si l'on multiplie (2.38) par $(y - x_a)$, $1 \leq a \leq n-1$, et puis que l'on évalue en $y = x_a$, on obtient alors

$$\xi_a = - \frac{\prod_{i=1}^n (x_a - y_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^{n-1} (x_a - x_i)}, \quad \text{pour tout } a = 1, \dots, n-1. \quad (2.39)$$

On peut remarquer que le fait que les ξ_a soient positifs implique que les valeurs propres x_i et y_i s'entrelacent. Ceci peut se comprendre de la manière suivante : puisque les valeurs propres sont supposées ordonnées, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1}$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, le signe du dénominateur est $(-1)^{a-1}$. La condition $\xi_a \geq 0$ implique alors la série d'inégalités

$$\begin{cases} (x_1 - y_1) \cdots (x_1 - y_n) \leq 0 \\ (x_2 - y_1) \cdots (x_2 - y_n) \geq 0 \\ (x_3 - y_1) \cdots (x_3 - y_n) \leq 0 \\ \dots \end{cases} \quad (2.40)$$

qui a pour unique solution $\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow y_1 \geq x_1 \geq y_2 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq y_n$.

L'expression de v peut s'obtenir en l'isolant dans l'équation (2.38) et en développant son expression en série de $1/y$, pour $y \gg 1$ on trouve alors au premier ordre

$$v = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i. \quad (2.41)$$

Puisque l'on connaît les distributions de probabilité des ξ_a et de v ainsi que leurs relations avec les y_i , il nous faut seulement déterminer le jacobien de ce changement de variable. Sachant que, pour $a = 1, \dots, n-1$ et $i = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial \xi_a}{\partial y_i} = \xi_a \cdot \frac{1}{x_a - y_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial y_i} = 1,$$

le jacobien en question est donné par

$$\mathcal{J} = \left(\prod_{a=1}^{n-1} \xi_a \right) \cdot \det \left(\begin{array}{c} \frac{1}{x_a - y_i} \\ 1 \quad \dots \quad 1 \end{array} \right). \quad (2.42)$$

Il est possible de calculer ce déterminant en utilisant la *formule du déterminant de Cauchy*,

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left[\frac{1}{a_i - b_j} \right] = \frac{\prod_{i < j} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i, j=1}^n (a_i - b_j)}, \quad (2.43)$$

Bien que la preuve de cette formule ne soit pas très longue, on ne la présentera pas ici, on renvoie le lecteur éventuellement intéressé par cette dernière au chapitre 20 de la référence [24].

En prenant $a_n \gg b_i$ pour $i = 1, \dots, n$ ainsi que $a_n \gg a_i$ pour $i = 1, \dots, n-1$ dans la formule, les coefficients de la dernière ligne de la matrice sont alors donnés par $1/a_n$, que l'on peut sortir du déterminant, et simplifier avec le même facteur issu de la fraction du membre de droite,

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n)}{\prod_{j=1}^n (a_n - b_j)} \underset{a_n \gg a_i, b_j}{\simeq} \pm \frac{1}{a_n}. \quad (2.44)$$

Le signe $\pm$ n'a aucune importance puisque que l'on considère la valeur absolue du Jacobien.

En appliquant la formule de Cauchy au calcul de notre Jacobien, on trouve alors

$$|\mathcal{J}| = \prod_{a=1}^{n-1} \xi_a \cdot \frac{\prod_{1 \leq a \leq a' \leq n-1} (x_a - x_{a'}) \prod_{1 \leq i \leq i' \leq n} (y_i - y_{i'})}{\prod_{a=1}^{n-1} \prod_{i=1}^n (x_a - y_i)} = \frac{\prod_{1 \leq i \leq i' \leq n} (y_i - y_{i'})}{\prod_{1 \leq a \leq a' \leq n-1} (x_a - x_{a'})}. \quad (2.45)$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{Y}^2) = \frac{1}{2} \sum_a x_a^2 + 2|\tilde{u}_a|^2 + v^2 = \sum_a \frac{x_a^2}{2} + \xi_a + \frac{v^2}{2}, \quad (2.46)$$

et par conséquent

$$\sum_a \xi_a + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{a=1}^{n-1} x_a^2 \right), \quad (2.47)$$

on trouve que la distribution de probabilité jointe des y_i est proportionnelle à

$$|\mathcal{J}| \exp \left[\sum_a -\xi_a - \frac{v^2}{2} \right] = \frac{\prod_{1 \leq i \leq i' \leq n} (y_i - y_{i'})}{\prod_{1 \leq a \leq a' \leq n-1} (x_a - x_{a'})} \exp \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{a=1}^{n-1} x_a^2 \right], \quad (2.48)$$

ce à quoi on peut rajouter la fonction indicatrice, suite à la remarque faite précédemment sur l'entrelacement des valeurs propres. On obtient ainsi le résultat attendu (2.33), ce qui conclut la preuve.

2.2.3 Application aux pavages par des losanges

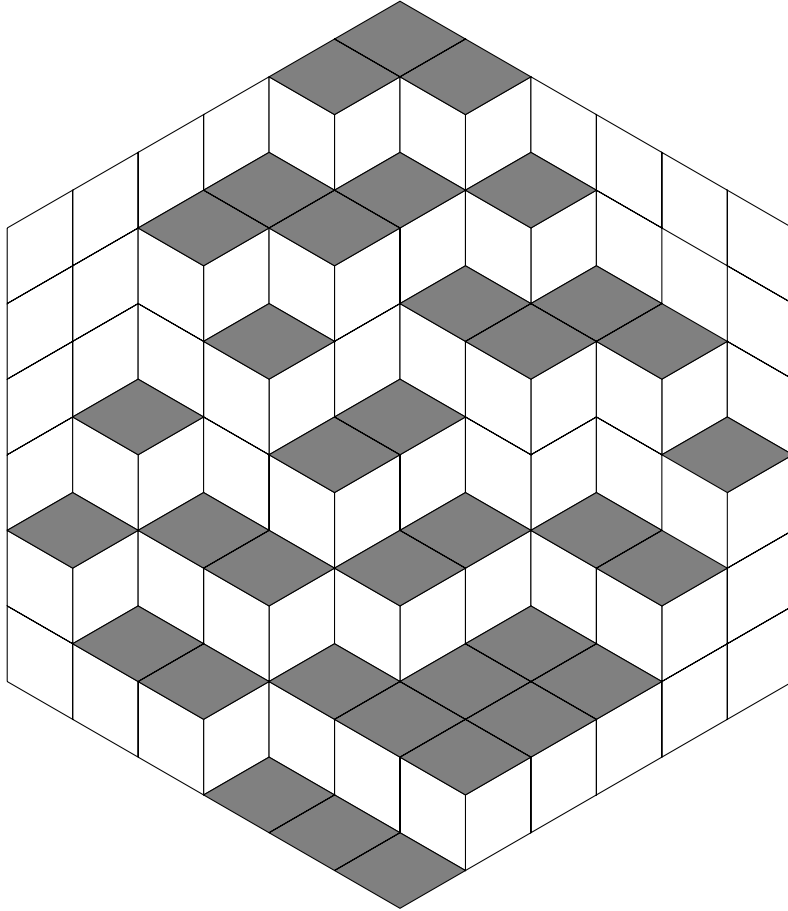


FIGURE 2.2 – Pavage par des losanges d'un hexagone $6 \times 6 \times 6$.

Bien que la démarche de considérer la densité de probabilité des valeurs propres de sous-matrices de GUE puisse paraître assez abstraite, la fonction trouvée dans cette section possède des applications concrètes, notamment aux modèles de pavages aléatoires, comme le pavage

d'un hexagone par des losanges. Ce modèle présente également un phénomène arctique, tout comme le diamant aztèque. Les coins du réseau ont tendance à être ordonnés tandis que la région centrale est désordonnée. Il est possible de décrire ce modèle en termes d'un système de particules entrelacées, ces particules sont représentées par des losanges gris sur la figure 2.2. On remarque en effet qu'il n'y en a qu'un seul sur la première colonne à gauche, deux sur la seconde, etc. Et qu'ils sont bien entrelacés les uns aux autres entre deux lignes consécutives. Il est possible de montrer [24] que, dans une certaine limite, les positions de ces particules le long d'une ligne verticale suivent une loi de distribution identique à celle du processus GUE-corners. Nous n'allons pas rentrer dans les détails pour ce modèle, mais verrons dans la section suivante que ce phénomène se produit également dans le diamant aztèque.

2.3 Représentation bicolore du diamant aztèque et particules entrelacées

2.3.1 Représentation bicolore : introduction et motivation

Tout comme cela a été discuté dans la section précédente, le modèle de pavage en losanges sur réseau hexagonal converge dans une certaine limite d'échelle vers le processus GUE-corners. Il se fait que Kurt Johansson et Eric Nordenstam ont montré en 2006 [26] que c'était également le cas pour le diamant aztèque au niveau des fonctions de corrélation, en donnant ainsi la renormalisation à opérer. Par la suite, en 2011, Fleming et Forrester [12] ont montré que cette relation entre le diamant aztèque et le processus GUE-corners est en fait valide au niveau même de la distribution de probabilité jointe.

Pour mieux comprendre comment mettre en relation le modèle du diamant aztèque avec la distribution trouvée dans la section précédente, il est utile de considérer une représentation en deux couleurs du diamant aztèque (voir figure 2.3), où l'on a pris comme convention de mettre les dimères Nord et Ouest (précédemment en rouge et jaune) en blanc, tandis que les dimères Sud et Est (précédemment en bleu et vert) sont coloriés en noir. Nous appellerons également ces dimères noirs, des « particules », ceci étant le vocabulaire usuel. On a également effectué une rotation d'angle $\pi/4$ dans le sens trigonométrique afin de mettre en évidence les aspects clés de cette représentation.

Sur la figure 2.3, on a également inscrit le système de coordonnées que l'on utilisera pour décrire la position des particules sur le réseau. On prend la partie gauche des dimères comme référence pour leurs coordonnées⁵, celle-ci a été marquée d'un point rouge représentant la position des particules en question. On remarque également facilement qu'en raison de leur définition en termes de cases paires ou impaires sur le réseau (voir section 1), ces particules se trouvent forcément sur les croisements d'axes de notre système de coordonnées (id. lorsque l et k sont entiers).

On peut souligner quelques caractéristiques particulières quant à la position de ces particules.

5. Sur un diamant qui n'a pas subi de rotation, cela revient à prendre la partie gauche des dimères horizontaux comme référence, et leur partie supérieure pour les dimères verticaux.

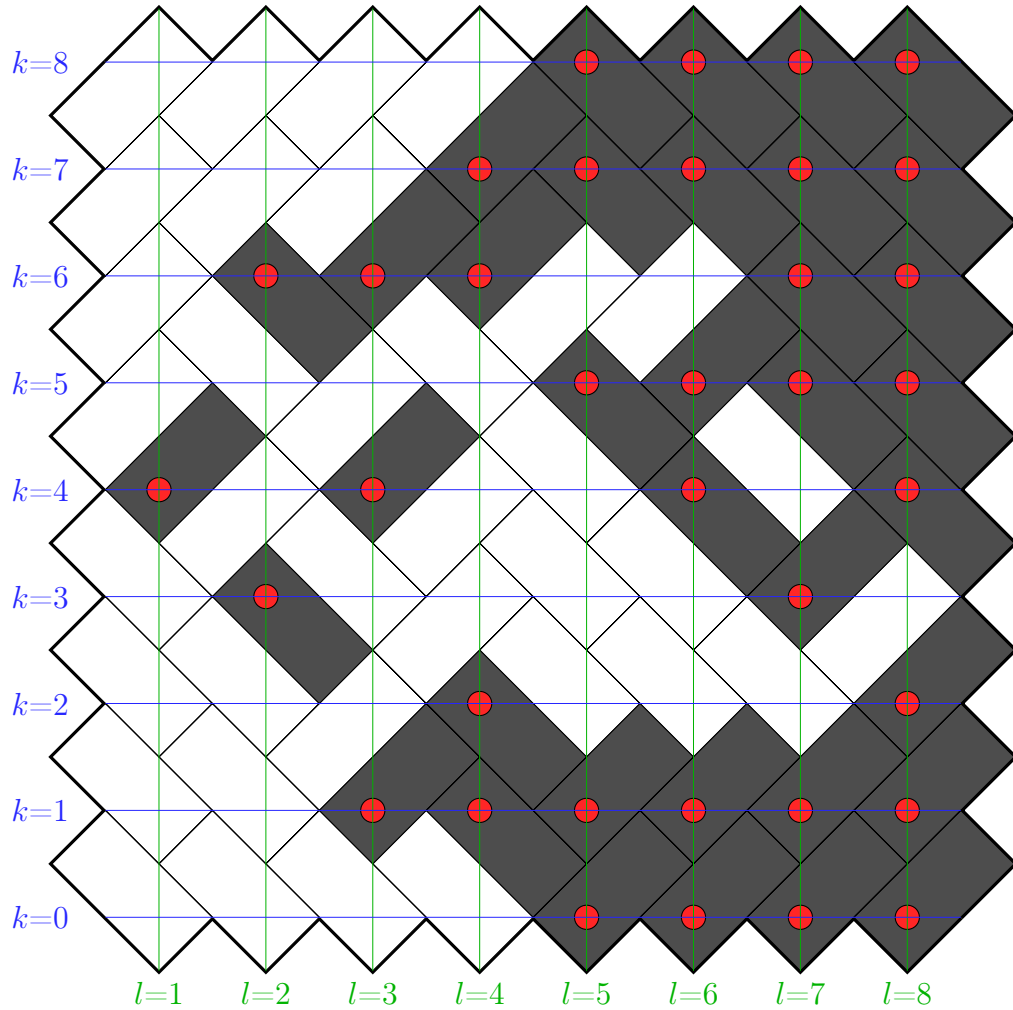


FIGURE 2.3 – Représentation bicolore du diamant aztèque

La première étant le fait qu'on ne retrouve qu'une seule particule sur la première ligne⁶, deux sur la seconde, etc. Il y a en fait toujours exactement l particules sur la ligne l . De plus, ces particules sont entrelacées les unes aux autres entre deux lignes consécutives. Ces deux faits sont une conséquence directe de la structure crénelée du diamant aztèque, et peuvent s'observer assez aisément sur la figure 2.3.

Pour mieux comprendre d'où proviennent ces particularités, il est instructif de considérer la construction d'un pavage ligne par ligne (voir figure 2.4). Sur la première ligne, on voit que les dominos dans le haut sont de type Nord (rouge clair), et ceux dans le bas de type Ouest (jaune clair). Le changement de l'un à l'autre impliquera forcément la présence d'un vide à la position du changement, dans lequel seul un domino noir, et donc une particule, peut prendre place. Même si l'on ne place que des dominos de type Nord, la particule apparaîtra tout de même tout en bas, de même si l'on ne place que des dominos de type Ouest, elle apparaîtra

6. Bien que cela puisse paraître contre-intuitif, j'appelle ici « ligne », dans cette représentation, les traits verts verticaux dénotés par l'indice l , bien que ceux-ci, dans le vocabulaire des matrices, correspondent aux colonnes.

tout en haut. On remarque également qu'un motif, identique au bord d'un diamant aztèque plus petit (surligné en nuance de bleu sur l'image), apparaît une fois au-dessus, et une fois en dessous de la particule de la première ligne. Cela signifie que deux nouvelles particules vont prendre place chacune devant l'un des motifs. Sur l'image de droite de la même figure, on a représenté une façon de disposer ces particules pour la seconde ligne. On voit que le même processus continue de se produire, le motif apparaît désormais trois fois, ce qui implique que les particules continueront de s'entrelacer à chaque nouvelle ligne. Il est également possible de se convaincre que même si des particules sont collées verticalement, cela n'interrompt pas le processus.

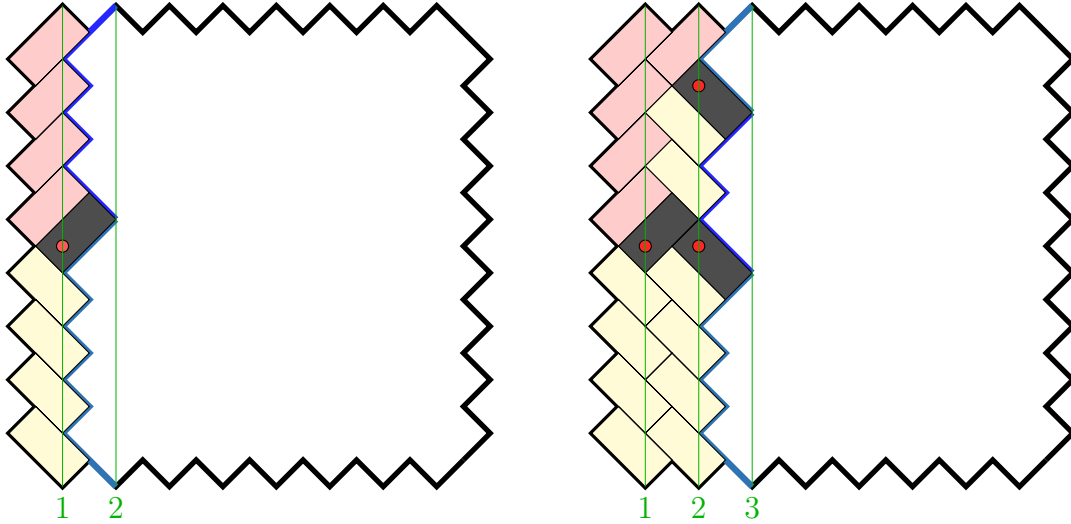


FIGURE 2.4 – Apparition des particules et construction de l'entrelacement ligne par ligne.

Le résultat clé de cette partie est que les positions de ces particules suivent, dans une certaine limite, les mêmes distributions de probabilité que celles des valeurs propres du processus GUE-corners, décrit dans la section précédente. Ceci peut paraître assez intuitif au vu des considérations qui viennent d'être faites et avec la ressemblance relative que peut avoir cette formulation du modèle avec celui des pavages en losanges de l'hexagone. Cependant, un point important à souligner ici, est que l'ensemble des positions des particules dans ce modèle ne suffit pas à retrouver la configuration exacte du diamant aztèque. En d'autres termes, il n'y a pas de bijection entre le système de particules entrelacées et le modèle du diamant aztèque. Ceci peut se comprendre en introduisant la notion *d'adjacence*, initialement définie dans l'article de Fleming et Forrester [12].

Commençons par noter $x_i^{(l)}$, $i = 1, \dots, l$ et $l = 1, \dots, n$ où n est l'ordre du diamant, la position de la i^e particule de la ligne l (cette position peut prendre comme valeur les différentes valeurs possibles pour $k = 0, 1, \dots, n$). On prendra comme convention de commencer à compter les particules à partir du haut, de sorte que $x_1^{(l)}$ soit la plus grande de la ligne l comme indiqué par l'indice k sur la figure 2.3, mais ceci n'a pas de réelle importance en raison de la symétrie du diamant. On dira qu'une particule $x_i^{(l)}$ est *adjacente* si pour un certain j , $x_i^{(l)} = x_j^{(l+1)}$. L'adjacence correspond donc en d'autres termes au cas particulier où il y a une égalité dans

la relation d'entrelacement

$$x_i^{(l+1)} \geq x_i^{(l)} \geq x_{i+1}^{(l+1)}, \quad l = 1, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.49)$$

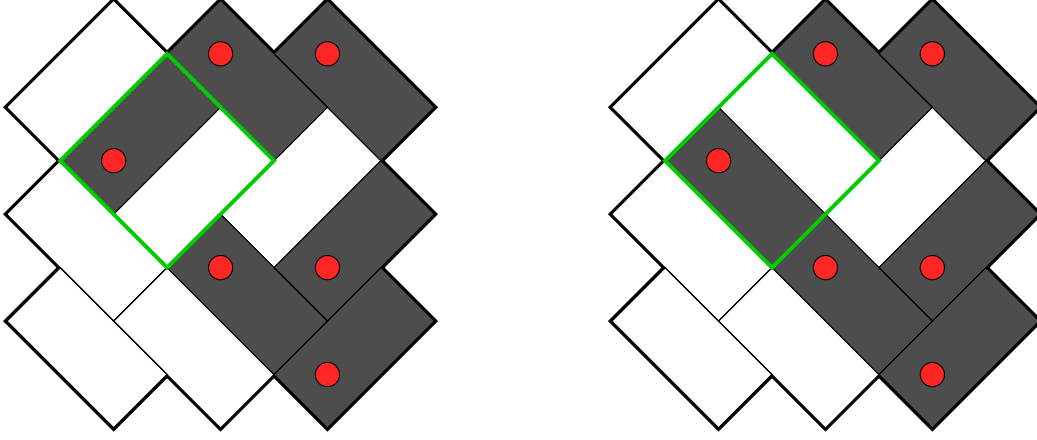


FIGURE 2.5 – Exemple de deux configurations différentes du diamant aztèque qui donnent le même système de particules entrelacées.

Ceci est illustré sur la figure 2.5. On peut y voir que la particule de la première ligne n'est pas adjacente (car elle n'a pas de particule directement à sa droite), ce qui engendre l'apparition d'une plaquette, encadrée en vert sur l'image, qu'il est possible de retourner, obtenant ainsi une configuration équivalente du point de vue des particules. Sur la seconde ligne, les particules sont toutes deux adjacentes à celle de la troisième ligne, ce qui fait que le patronne de plaquette n'apparaît pas. De la même façon, pour chaque particule non-adjacente (sans compter celle de la dernière ligne), il y a deux orientations possibles de la plaquette contenant la particule en question. On comprend donc assez bien maintenant le fait que si l'on suppose nos configurations du diamant aztèque équiprobables, ceci ne sera pas le cas pour les systèmes de particules entrelacées.

Intuitivement, on peut interpréter cette conséquence de l'adjacence comme une répulsion très courte portée entre les particules de lignes consécutives, puisque les configurations où elles sont adjacentes sont statistiquement défavorisées. Mais on reviendra sur cette interprétation plus tard, lors de l'analyse des simulations numériques.

2.3.2 Densité de probabilité des particules dans le diamant aztèque

Dans cette sous-section, on présentera le résultat, ainsi que les grandes lignes de sa démonstration, obtenu par Fleming et Forrester [12] concernant le lien entre le diamant aztèque et le processus GUE-corners. Ce résultat nous donne en particulier la bonne renormalisation à opérer sur les distributions de positions des particules, ce qui nous sera indispensable lors des simulations numériques dans la section suivante.

L'idée de la preuve est la suivante : à partir des considérations précédentes, on peut donner une forme à la densité de probabilité pour le système de particules entrelacées $\rho(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$,

avec n l'ordre du diamant, et la pondérer correctement pour qu'elle soit équivalente à celle sur le diamant aztèque (grâce à notre remarque sur l'adjacence). De là, en intégrant sur les variables des premières lignes, on pourra déterminer la densité de probabilité $\rho(x^{(m)}, \dots, x^{(n)})$. Après cela, on introduira un nouvel ensemble de variables, à savoir la position des dominos blancs (ou bien l'absence de particules), afin de profiter de la symétrie du diamant aztèque et du fait que le même processus se passe des deux côtés sous inversion des couleurs des dominos. À l'aide de ces variables, il nous sera possible d'obtenir la densité $\rho(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$. Il restera alors à montrer que cette distribution tend en effet vers la densité de probabilité du processus GUE-corners sous la bonne renormalisation.

On rappelle que les particules dans un diamant d'ordre n sont contraintes de respecter, pour $i = 1, \dots, j$ et $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} x_i^{(j)} &= 0, 1, \dots, n, \\ x_i^{(j)} &> x_{i+1}^{(j)}, \\ x_i^{(j+1)} &\geq x_i^{(j)} \geq x_{i+1}^{(j+1)}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Puisque l'on sait qu'il y a deux configurations possibles du diamant aztèque pour chaque particule non-adjacente dans le système de particules entrelacées, et qu'il y a au total $n(n-1)/2$ particules si l'on ne compte pas la dernière ligne, la densité de probabilité des particules dans le diamant est simplement donnée par

$$\rho(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \frac{2^{n(n-1)/2 - \alpha(x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})}}{A_n} \cdot \chi(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), \tag{2.51}$$

où A_n est le nombre de pavage possible d'un diamant d'ordre n , $\chi(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est une fonction indicatrice veillant à ce que (2.50) soit respectée, et

$$\alpha(x^{(m)}, \dots, x^{(n)}) = \sum_{j=m}^n \alpha(x^{(j)}) = \sum_{j=m}^n \sum_{i=1}^j \delta_{x_i^{(j)}, x_i^{(j+1)}} + \delta_{x_i^{(j)}, x_{i+1}^{(j+1)}} \tag{2.52}$$

est le nombre de particules, de la ligne m à n , qui sont adjacentes.

Prouvons maintenant que

$$\rho(x^{(m)}, \dots, x^{(n)}) = \frac{2^{-\alpha(x^{(m)}, \dots, x^{(n-1)})}}{D_{m,n}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i^{(m)} - x_j^{(m)}) \cdot \chi(x^{(m)}, \dots, x^{(n)}), \tag{2.53}$$

où

$$D_{m,n} = \frac{A_n}{2^{n(n-1)/2}} \prod_{i=1}^{m-1} i!. \tag{2.54}$$

Pour cela, on procédera par induction. Le cas $m = 1$ étant trivialement vérifié, il nous reste à prouver le cas $m + 1$ à partir de la formule (2.53) pour m . Pour cela, on somme sur toutes les variables de la ligne m de cette distribution,

$$\rho(x^{(m+1)}, \dots, x^{(n)}) = \frac{\chi(x^{(m+1)}, \dots, x^{(n)})}{D_{m,n} 2^{\alpha(x^{(m+1)}, \dots, x^{(n-1)})}} \sum_{x_1^{(m)}=x_2^{(m+1)}}^{x_1^{(m+1)}} \dots \sum_{x_m^{(m)}=x_{m+1}^{(m+1)}}^{x_m^{(m+1)}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i^{(m)} - x_j^{(m)})}{2^{\alpha(x^{(m)})}}.$$

On peut en fait ici calculer ces sommes exactement de la même façon que cela a été fait pour les intégrales du déterminant de Vandermonde au début de la section 2.2. On ne refera donc pas ce calcul en détail, mais voici les étapes à effectuer : on commence par réexprimer le produit au numérateur par son expression en termes d'un déterminant et on fait rentrer les sommes à l'intérieur par multi-linéarité du déterminant. On trouvera alors une expression de la forme

$$\det_{1 \leq i, j \leq m} \left[\sum_{x_i^{(m)} = x_{i+1}^{(m+1)}}^{x_i^{(m+1)}} \frac{(x_i^{(m)})^{j-1}}{2^{\delta_{x_i^{(m)}, x_i^{(m+1)}} + \delta_{x_i^{(m)}, x_{i+1}^{(m+1)}}}} \right].$$

On peut ici approximer la somme par une intégrale, à partir de la formule d'Euler-Maclaurin,

$$\sum_{x=a}^b x^{j-1} = \int_a^b dx x^{j-1} + \dots = \frac{b^j - a^j}{j} + \dots, \quad (2.55)$$

où le $+\dots$ fait référence à tous les termes sous-dominants de l'expansion, qui peuvent être négligés, car il est possible de les faire disparaître du déterminant par des opérations sur les colonnes. On peut également se rendre compte que le facteur du dénominateur dans le déterminant, qui vaut 1 ou 2, sera également sans importance, car il n'apporte des corrections qu'à des termes d'ordres sous-dominants. Pour finir, en faisant les mêmes opérations sur les lignes du déterminant que dans la section 2.2 équation (2.32), on retrouve un déterminant de Vandermonde, d'ordre $(m+1)$ cette fois, tandis que le facteur $1/j$ se transforme en $1/m!$ une fois sorti du déterminant. On peut ensuite absorber ce facteur dans notre coefficient $D_{m,n} m! = D_{m+1,n}$, ce qui conclut la preuve.

Il est très intéressant de souligner qu'il est possible, à partir de ce résultat, d'obtenir la quantité A_n , nombre de pavages possibles du diamant aztèque, dont on avait déjà parlé dans la section 1. Pour cela, notons que l'on peut rajouter une ligne virtuelle $(n+1)$ au diamant aztèque, cette ligne contient alors une particule à chaque emplacement possible $\{0, 1, \dots, n\}$. La position de ces $n+1$ nouvelles particules étant complètement fixées, cela n'ajoute aucune nouvelle information, la densité de probabilité est donc la même que pour les lignes allant de m à n ,

$$\rho(x^{(m)}, \dots, x^{(n)}) = \rho(x^{(m)}, \dots, x^{(n+1)}) = \frac{2^{n(n+1)/2 - \alpha(x^{(m)}, \dots, x^{(n)})}}{A_n \prod_{i=1}^{m-1} i!} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i^{(m)} - x_j^{(m)}) \cdot \chi(x^{(m)}, \dots, x^{(n+1)})$$

(le facteur $2^{\alpha(x^{(n)})} = 2^n$ compense exactement le changement $2^{n(n-1)/2} 2^n = 2^{n(n+1)}$). En prenant maintenant $m = n+1$ dans cette formule, le résultat doit être égal à 1, puisque toutes les variables ont été intégrées. Et puisque

$$\Delta(x^{(n+1)}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (j - i) = \prod_{i=1}^n i!, \quad (2.56)$$

on trouve

$$\rho(x^{(n+1)}) = \frac{2^{n(n+1)/2} \Delta(x^{(n+1)})}{A_n \prod_{i=1}^n i!} = 1,$$

et par conséquent $A_n = 2^{n(n+1)/2}$.

On introduit le nouvel ensemble de variables $\{y_i^{(m)} | i = 1, \dots, m \text{ et } m = 1, \dots, n\}$ donnant la position du i^e domino blanc présent sur la m^e ligne, comptées cette fois-ci de droite à gauche. Ces variables sont reliées aux $x_i^{(m)}$ par les relations, pour $m = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \{x_i^{(m)}\}_i \cup \{y_i^{(n+1-m)}\}_i &= \{0, 1, \dots, n\} && \text{toutes les positions sont occupées par un domino,} \\ \{x_i^{(m)}\}_i \cap \{y_i^{(n+1-m)}\}_i &= \emptyset && \text{pas de superposition entre les dominos.} \end{aligned}$$

De là, il est possible de montrer [12] que l'on peut réexprimer les quantités suivantes en termes des $y_i^{(m)}$ au moyen des relations

$$\Delta(x_i^{(m)}) = \frac{\Delta(y_i^{(n+1-m)}) \prod_{i=1}^n i!}{\prod_{i=1}^{n+1-m} y_i^{(n+1-m)}! (n - y_i^{(n+1-m)})!}, \quad (2.57)$$

et

$$\alpha(x^{(m)}, \dots, x^{(n-1)}) = \alpha(y^{(1)}, \dots, y^{(n-m)}) + (n-m)(m-1). \quad (2.58)$$

En injectant ces deux relations dans l'expression (2.53) pour $m \mapsto n+1-m$, on trouve alors

$$\rho(y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) = \frac{\Delta(y^{(m)}) \chi(y^{(1)}, \dots, y^{(m)})}{2^{n+(n-m)(m-1)+\alpha(y^{(1)}, \dots, y^{(m-1)})}} \frac{\prod_{i=n-m+1}^n i!}{\prod_{i=1}^m y_i^{(m)}! (n - y_i^{(m)})!}. \quad (2.59)$$

En utilisant la symétrie du diamant aztèque (sous inversion des deux couleurs et rotation de 180°), on trouve finalement la densité de probabilité $\rho(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ qui est donnée par la même fonction que (2.59).

La dernière chose qu'il nous reste à montrer est donc que cette fonction converge bien vers le processus GUE-corners, sous la renormalisation $x_i^{(j)} \mapsto z_i^{(j)} = \frac{2x_i^{(j)} - n}{\sqrt{n}}$ et dans la limite où $n \rightarrow \infty$. La densité de probabilité pour les $z_i^{(j)}$ étant donnée par

$$\rho(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \rho(x^{(1)}(z^{(1)}), \dots, x^{(m)}(z^{(m)})) \cdot \mathcal{J},$$

on peut analyser ce que devient chaque facteur séparément. En utilisant la relation (2.16), on trouve pour le déterminant de Vandermonde, puisque $x_i^{(j)} = \frac{z_i^{(j)} \sqrt{n} + n}{2}$,

$$\Delta(x^{(m)}) = \Delta(z^{(m)}) \prod_{i=0}^{m-1} \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right)^i = \Delta(z^{(m)}) \left(\frac{n}{4} \right)^{m(m-1)/4}. \quad (2.60)$$

Le Jacobien du changement de variable est quant à lui donné par

$$\mathcal{J} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right) = \left(\frac{n}{4} \right)^{m(m+1)/4}.$$

Pour ce qui est du terme contenant des factorielles, on utilise l'approximation de Stirling, pour $n \gg 1$,

$$(an + b\sqrt{n} + c)! \sim \sqrt{2\pi an} (an)^{an+b\sqrt{n}+c} e^{\frac{b^2}{2a}-an}, \quad (2.61)$$

afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=n-m+1}^n i!}{\prod_{i=1}^m y_i^{(m)}! (n - y_i^{(m)})!} &= \prod_{i=1}^m \frac{(n+1-i)!}{(n + \frac{\sqrt{n}}{2} z_i^{(m)})! (n - \frac{\sqrt{n}}{2} z_i^{(m)})!} \\
&\sim \prod_{i=1}^m \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} n^{\frac{1}{2}-i} e^{-(z_i^{(m)})^2/2} \right) \\
&= \frac{2^{m(n+1)}}{(2\pi)^{m/2}} n^{-m^2/2} \prod_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} (z_i^{(m)})^2 \right].
\end{aligned}$$

Pour finir, on suppose également que l'on reste dans un certain voisinage du bord, de sorte que le nombre de particules adjacentes soit négligeables lorsque n devient grand,

$$\alpha(x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) \rightarrow 0. \quad (2.62)$$

Tout cela mis ensemble nous donne finalement

$$\rho(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \sim \frac{\mathcal{A}_{n,m}}{(2\pi)^{m/2}} \Delta(z^{(m)}) \prod_{i=1}^m \exp \left[-\frac{1}{2} (z_i^{(m)})^2 \right] \prod_{j=1}^{n-1} \chi(z^{(j)} \prec z^{(j+1)}), \quad (2.63)$$

ce qui est bien équivalent à (2.26).

Cette relation entre le diamant aztèque et le processus GUE-corners est à la base des développements qui seront fait dans la prochaine section, dans laquelle nous vérifierons, en utilisant une grande collection de diamants aztèques, la correspondance démontrée plus haut avec le processus GUE corners.

2.4 Vérification numérique des propriétés induites par GUE sur le diamant aztèque

L'une des contributions majeures de ce travail est l'étude du lien entre le diamant aztèque et le processus GUE-corners au travers de simulations numériques. L'objectif principal sera de vérifier certaines propriétés induites par la relation avec GUE, de comprendre comment celles-ci se réalisent concrètement dans des diamants de tailles finies, et pour finir, d'analyser les limites qu'il peut y avoir dans cette relation.

Concrètement, pour les différentes analyses que nous présenterons ici, nous utiliserons toujours la même banque de 200 000 diamants aztèques, d'ordre 500. Ces diamants ont été générés à partir de l'algorithme de shuffling, et j'en profite pour remercier ici, à nouveau, Bryan Debin qui m'a fourni cette collection de diamants aztèques.

Nous ne détaillerons pas le fonctionnement ou la validité de l'algorithme de shuffling ici, ceci mériterait une section entière, mais ce n'est pas l'objectif de ce travail. Nous renvoyons donc les lecteurs intéressés vers les références [7, 2]. Nous mentionnerons simplement que

cet algorithme, une fois efficacement implémenté, permet de générer rapidement un grand nombre de configurations pour des diamants aztèques d'ordres élevés. De plus, il garantit une répartition uniforme des configurations ainsi obtenues, ce qui est essentiel pour notre analyse.

2.4.1 Densité de particules

Le premier résultat que l'on vérifiera, et probablement l'un des plus intuitifs par lequel commencer, est de vérifier la densité de particules sur une ligne donnée. Pour le diamant aztèque, cette distribution est obtenue en intégrant la jpdf sur toutes les lignes, sauf une, puis en intégrant cette dernière expression sur toutes les variables, sauf une, et sans imposer d'ordre sur les particules de la ligne. Dans le vocabulaire de GUE, ceci correspond donc à intégrer la distribution du processus GUE-corners (2.26) sur toutes les valeurs propres des sous-matrices et de ne garder que celles de la matrice entière, on obtient alors la distribution (2.13), tandis que l'intégration sur toutes ces valeurs propres restantes, sauf une, nous donne alors la fonction de corrélation à un point. On a déjà explicitement calculé ce résultat pour les valeurs propres de GUE à la fin de la section 2.1, on avait alors obtenu pour une matrice d'ordre m ,

$$\rho_m(x) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{H_k^2(x/\sqrt{2})}{2^k k!}, \quad (2.64)$$

où les H_k sont les polynômes de Hermite. On peut voir que pour $m = 1$, la distribution est gaussienne. Pour les valeurs suivantes, le facteur gaussien est multiplié par un certain polynôme de degrés $2(m - 1)$.

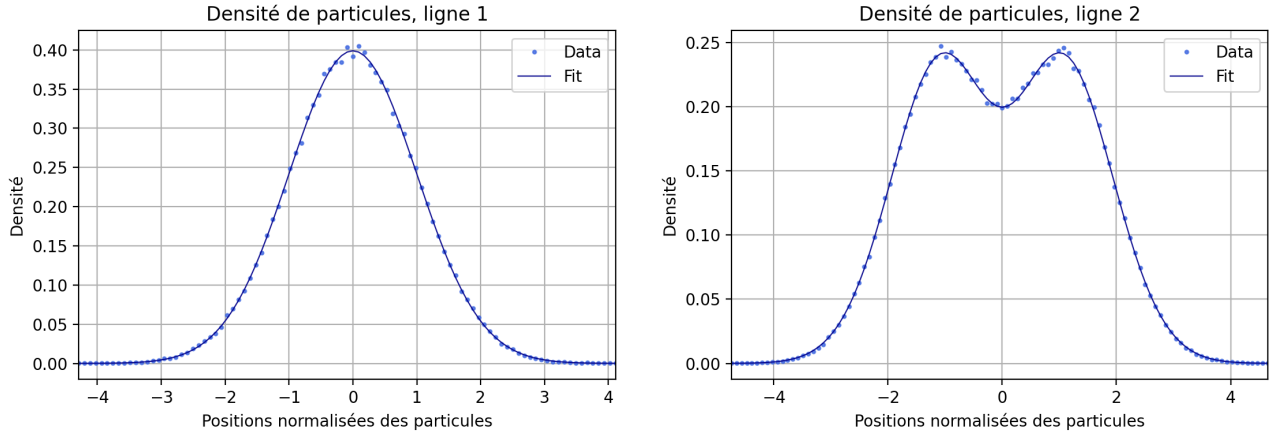


FIGURE 2.6 – Densité des particules pour les deux premières lignes. Comparaison entre les données issues de simulations numériques et la courbe théorique attendue.

Pour les données issues des simulations numériques, on obtient la densité en faisant un histogramme de la position des particules de la ligne concernée, et l'on renormalise ensuite la position par $x \mapsto \frac{2x-n}{\sqrt{n}}$, comme cela a été vu à la section précédente. Pour l'axe vertical, on le met à l'échelle de sorte que l'intégrale de la distribution donne un. On peut voir les graphiques pour les deux premières lignes sur la figure 2.6.

Il est également possible d'obtenir la distribution d'une particule en particulier sur une ligne donnée. Du point de vue numérique, cela n'est pas particulièrement plus compliqué, il suffit de retenir à quelle particule appartient quelle position avant de faire l'histogramme. Du point de vue théorique, il s'agit, au moment de l'intégration de la jpdf, de fixer la particule que l'on garde comme étant la première, la seconde, etc. Les bornes d'intégration sont alors modifiées par rapport au cas où l'on intégrait les particules sans les ordonner. À ma connaissance, il n'existe pas de formule générale pour une telle intégration, mais pour les premières lignes, il est possible de faire le calcul explicitement. Pour la 3^e ligne par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty dy \int_y^\infty dz \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} (x-y)^2 (x-z)^2 (y-z)^2 \\ &= \frac{e^{-\frac{3x^2}{2}}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left(2(x^2 - 4) - 2e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi} (x^3 - 2x) \left(1 - \operatorname{erf}[x/\sqrt{2}] \right) + e^{x^2} \pi (3 + x^4) \left(1 - \operatorname{erf}[x/\sqrt{2}] \right)^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^y dx \int_y^\infty dz \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} (x-y)^2 (x-z)^2 (y-z)^2 \\ &= \frac{e^{-\frac{3y^2}{2}}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left(-4(y^2 - 4) - 4e^{\frac{y^2}{2}} \sqrt{2\pi} (y^3 - 2y) \operatorname{erf}[y/\sqrt{2}] - 2e^{y^2} \pi (3 + y^4) \left(\operatorname{erf}[y/\sqrt{2}]^2 - 1 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^z dy \int_{-\infty}^y dx \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} (x-y)^2 (x-z)^2 (y-z)^2 \\ &= \frac{e^{-\frac{3z^2}{2}}}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left(2(z^2 - 4) + 2e^{\frac{z^2}{2}} \sqrt{2\pi} (z^3 - 2z) \left(1 + \operatorname{erf}[z/\sqrt{2}] \right) + e^{z^2} \pi (3 + z^4) \left(1 + \operatorname{erf}[z/\sqrt{2}] \right)^2 \right), \end{aligned}$$

où la fonction $\operatorname{erf}(x)$ est la fonction d'erreur,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (2.65)$$

On peut vérifier que ces fonctions décrivent correctement la densité individuelle de chaque particule sur la ligne 3, ceci est reporté sur la figure 2.7 (pour cette figure, on a normalisé les distributions de sorte que l'intégrale de chacune des trois distributions individuelles vaille un, tandis que l'intégrale de la distribution totale vaut trois, ceci afin de pouvoir les afficher sur la même image de façon cohérente). On voit sur cette image que l'accord entre théorie et simulation numérique est assez bon, il reste quelques fluctuations dans les données dues à la taille finie de l'échantillon, mais celles-ci sont assez faibles.

On peut regarder également ce que deviennent ces graphiques lorsque l'on commence à aller plus à l'intérieur du diamant. On reprend sur la figure 2.8 les graphiques pour les lignes 10, 15, 20 et 30. On constate sur ces images que les données commencent à lentement s'éloigner de la courbe théorique, comme si elle était légèrement décalée. Pour mieux comprendre ceci, on

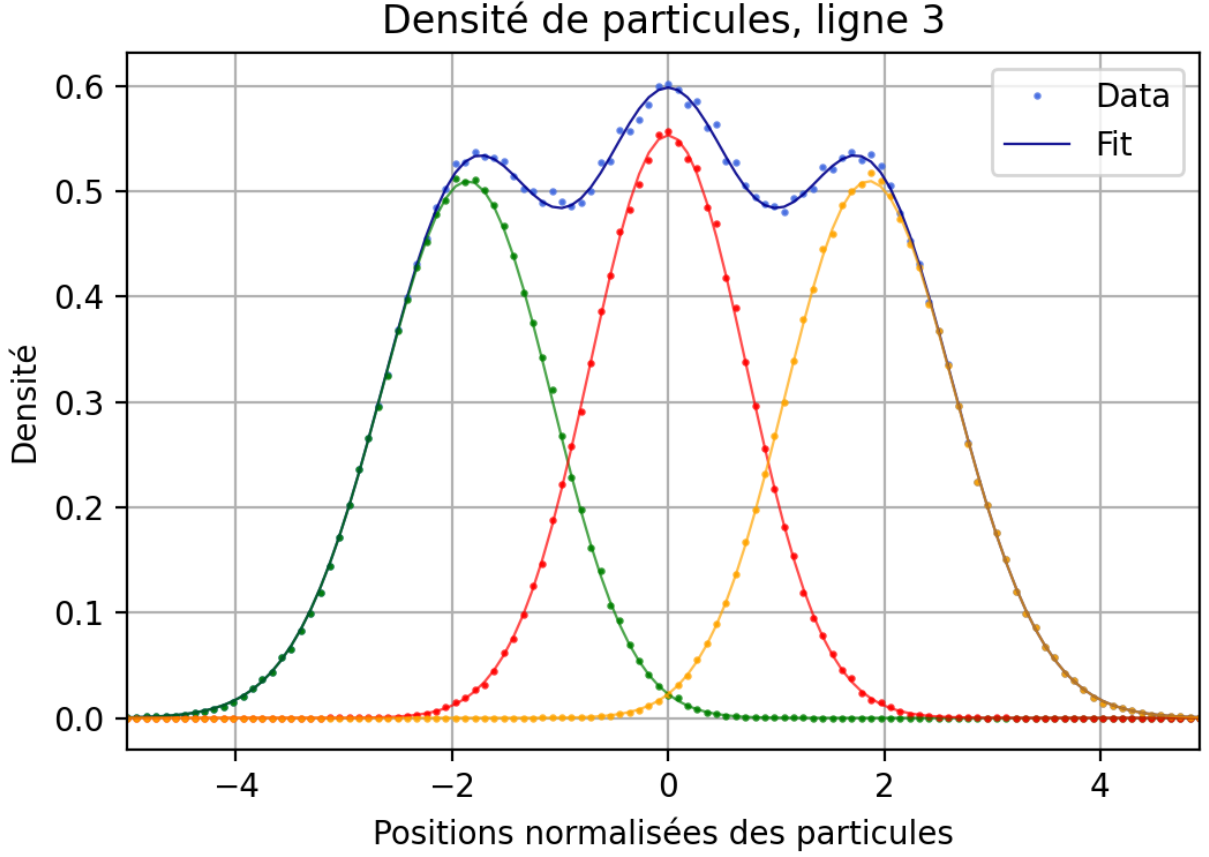


FIGURE 2.7 – Densités individuelles des particules pour la troisième ligne.

aimerait pouvoir aller plus loin vers le centre du diamant, cependant, compte tenu du degré du facteur polynomial qui croît assez vite dans l'expression (2.64), pour les lignes 30 déjà, on s'approche des limites numériques pour l'évaluation de cette fonction. Ceci nous amène donc à approximer la distribution (2.64) par ce que l'on appelle *le demi-cercle de Wigner*, qui constitue le sujet de la prochaine sous-section.

2.4.2 Loi du demi-cercle de Wigner

La loi du demi-cercle de Wigner est une propriété des ensembles de matrices aléatoires gaussiens, disant que sous une certaine renormalisation, et dans la limite où l'ordre des matrices devient grand, la distribution totale de ces valeurs propres tend vers un demi-cercle. En particulier pour GUE, on a le résultat [16]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{2m} \rho_m(x\sqrt{2m}) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2}, \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}. \quad (2.66)$$

Afin de vérifier que cette relation nous permet d'obtenir une bonne approximation de la densité théorique déjà pour des valeurs de m modérément grandes, on reprend sur la figure 2.9

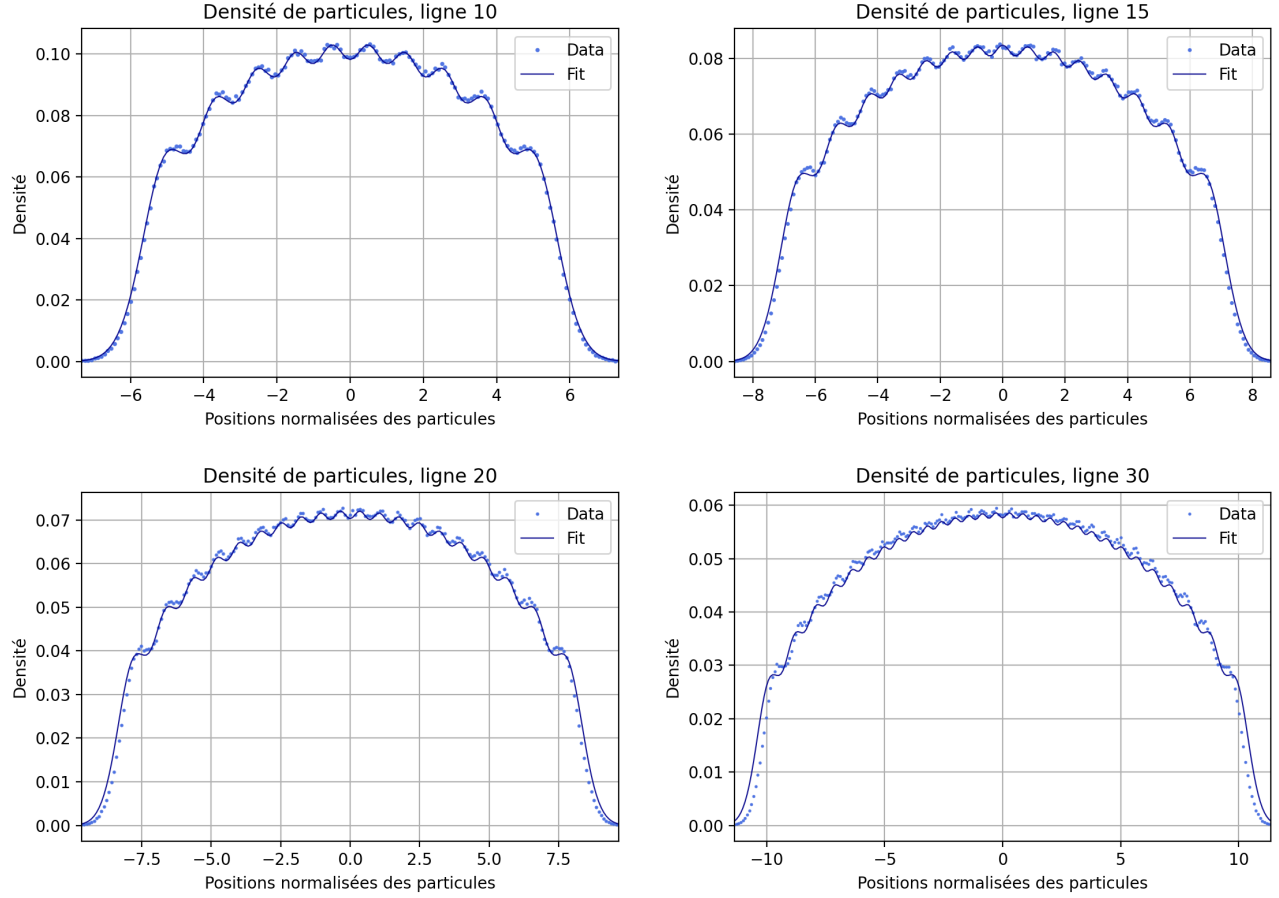


FIGURE 2.8 – Densité des particules pour les lignes 10, 15, 20 et 30. Comparaison entre les données issues de simulations numériques et la courbe théorique attendue.

une comparaison entre les deux fonctions. On constate sur ces graphiques que la convergence est, en effet, assez rapide, par cette approximation, on pourra donc légitimement analyser ce qui se passe dans le diamant aztèque lorsqu'on augmente l'indice de ligne jusqu'à atteindre son centre.

Les graphiques pour les lignes 75, 100, 200 et 250 sont repris sur la figure 2.10. La renormalisation à appliquer sur les données pour cette figure correspond à la composition des deux renormalisations

$$x \mapsto \frac{2x - n}{\sqrt{n}} \mapsto \frac{2x - n}{\sqrt{2nm}}. \quad (2.67)$$

Cette figure nous confirme que les données s'écartent bel et bien de la courbe théorique, comme cela semblait apparaître précédemment, cependant cela se fait d'une façon assez lisse et organisée, essayons donc de comprendre ce qui se passe sur cette figure.

Tout d'abord, si l'on prend comme cas extrême de considérer la dernière ligne, on sait que la relation avec GUE ne tient pas indéfiniment, puisque cette ligne est entièrement remplie par des particules sauf en un unique emplacement, on a en fait le processus GUE-corners, mais pour les dominos blancs, la distribution de cette ligne sera donc une gaussienne renversée.

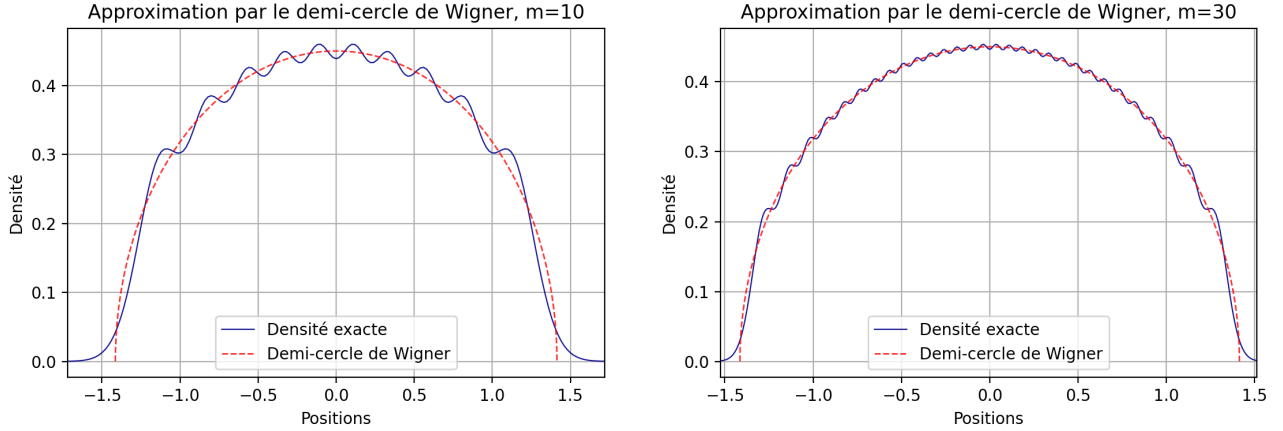


FIGURE 2.9 – Comparaison entre la densité théorique normalisée et le demi-cercle de Wigner.

Pour la ligne du milieu, il est possible d'obtenir la densité à partir de (1.3), on peut alors se rendre compte que celle-ci tend vers une constante le long de la ligne centrale, ce qui semble assez logique aux vues des symétries du diamant, bien que ce ne soit pas le résultat attendu pour les valeurs propres de GUE. On comprend donc assez bien que la relation avec GUE n'est valable que dans un certain voisinage du bord, le but de notre analyse ici est plutôt d'essayer de mieux comprendre le domaine de validité de cette relation, la façon dont on s'écarte du résultat de GUE, et d'émettre quelques hypothèses sur les causes sous-jacentes à ce phénomène.

La première chose qui apparaît assez clairement sur la figure 2.10, est le décalage au niveau des extrémités entre la distribution de données et le demi-cercle. Cela commençait déjà à se voir sur la figure 2.8 pour la ligne 30, mais le phénomène continue de s'amplifier pour des lignes plus élevées. Il semblerait qu'en fait, les particules soient davantage confinées dans le diamant aztèque par rapport aux valeurs propres de GUE, qui ne sont pas bornées. En particulier, pour les lignes 200 et 250, on voit que même les particules se trouvant sur le bord du diamant ne peuvent atteindre les valeurs extrêmes $\pm\sqrt{2}$ du demi-cercle. On peut donc imaginer que ceci est dû à un *effet de bords* du diamant aztèque, qui confine les particules à l'intérieur du diamant lui-même. Au niveau des distributions de la figure 2.10, on peut comprendre que ceci a pour effet « d'écraser » légèrement la distribution de données, par rapport au demi-cercle.

La deuxième chose que l'on peut observer sur la figure est que le sommet de la distribution s'aplatit. Puisque cela se passe au centre de la distribution, il est moins probable que cela soit lié à un effet de bord directement. Afin d'essayer de comprendre d'où ce phénomène peut provenir, il est intéressant de retourner voir les hypothèses de la preuve de la section 2.3. L'une de celle-ci concerne le nombre de particules adjacentes que l'on suppose tendre vers zéro pour de grands diamants et des lignes d'indice pas trop grand. On peut se rendre compte qu'ici cette hypothèse n'est plus respectée puisque pour des lignes supérieures à 100, plus de 20% des emplacements de la ligne sont occupés. La probabilité que des dimères soient adjacents devient donc doucement non-négligeable. Comme on l'a discuté dans la section précédente, les configurations où les dimères sont adjacents sont légèrement défavorisées statistiquement.

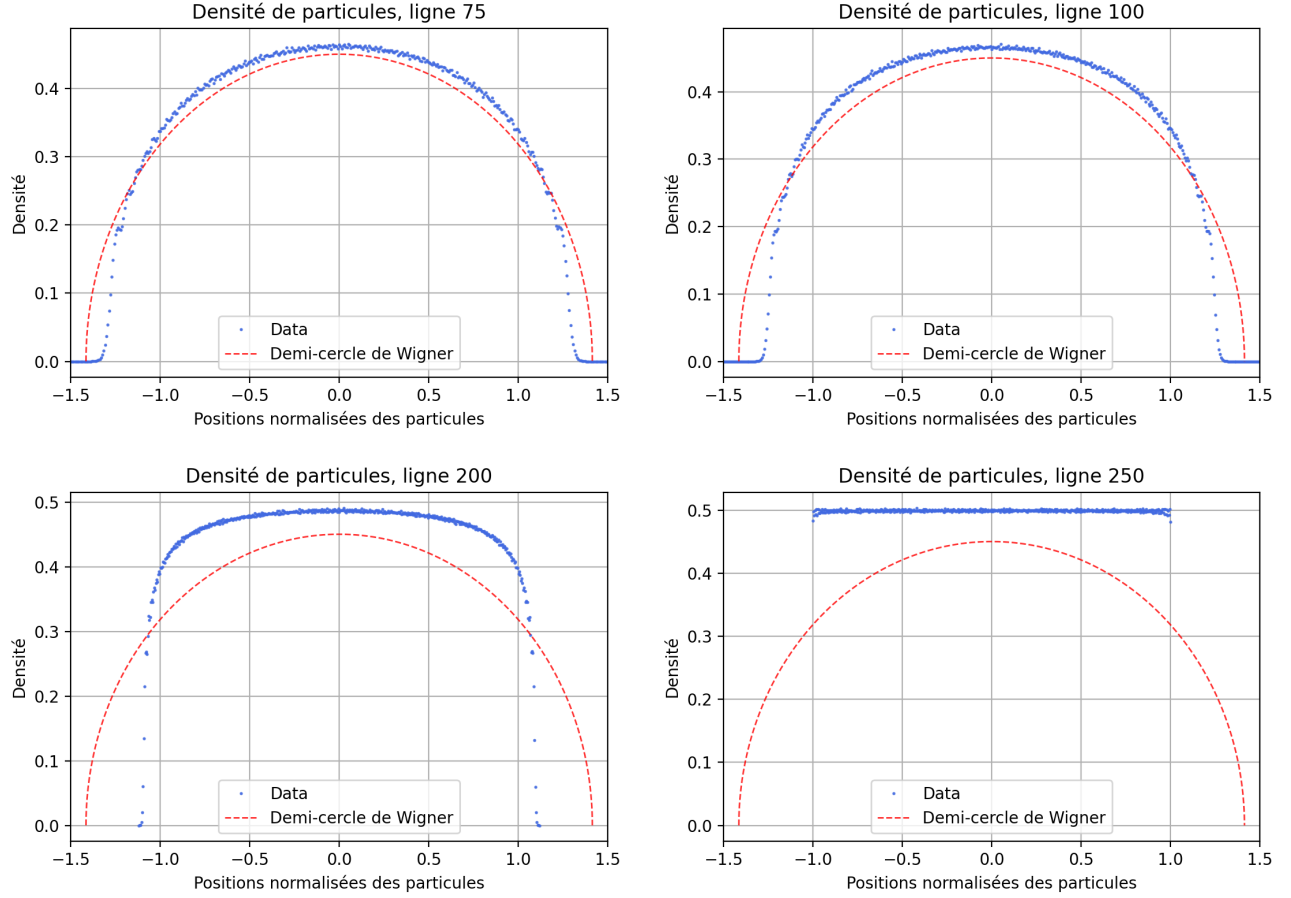


FIGURE 2.10 – Densité des particules pour les lignes 75, 100, 200 et 250. Comparaison entre les données issues de simulations numériques et le demi-cercle de Wigner.

Les particules vont donc avoir tendance à s'écartier d'une position les unes des autres lorsque c'est possible. On peut donc voir cela comme une répulsion à très courte portée qui mènera à un étalement de la distribution aux endroits où celle-ci est particulièrement dense. Néanmoins, bien que cette explication semble cohérente avec le phénomène observé, nous n'avons pas trouvé de moyen simple de quantifier l'impact de la propriété d'adjacence. Notre explication reste donc plutôt une hypothèse. L'adjacence apporte probablement une contribution au phénomène, mais celle-ci reste difficile à déterminer. Une méthode numérique possible permettant de vérifier l'importance de l'adjacence serait de générer une nouvelle collection de diamant aztèque, cette fois-ci uniformément distribuer, généré de façon équiprobable, au niveau du système de particules entrelacées, plutôt qu'au niveau des configurations du diamant aztèque. On aurait ainsi un échantillon de diamant « sans propriété d'adjacence » dont on pourrait comparer les résultats avec nos données actuelles. Cependant, ceci signifierait qu'il faille écrire un nouvel algorithme, en plus de générer ces configurations, ce qui représenterait un travail assez important.

Afin de constater la présence de cette notion d'adjacence sur le diamant aztèque, nous avons également fait un graphique (voir figure 2.11) reprenant en abscisse la position de la première

particule d'une certaine ligne (sans renormalisation), en ordonnée la position de la première particule de la ligne suivante, et sur l'axe z , ici représenté par des couleurs, le nombre de configurations de l'échantillon ayant les particules concernées aux coordonnées indiquées. L'axe z est ensuite divisé par la taille de l'échantillon afin de décrire une densité. La moitié inférieure droite du graphique est uniformément égale à zéro en conséquence de l'entrelacement, tandis que la moitié supérieure gauche contient les configurations autorisées. On voit très clairement sur cette image que toutes les premières positions autorisées pour les particules, sur l'anti-diagonale du graphique, sont environ deux fois moins probables que la position juste à côté, ce qui est exactement la conséquence de l'adjacence discutée dans la section 2.3.

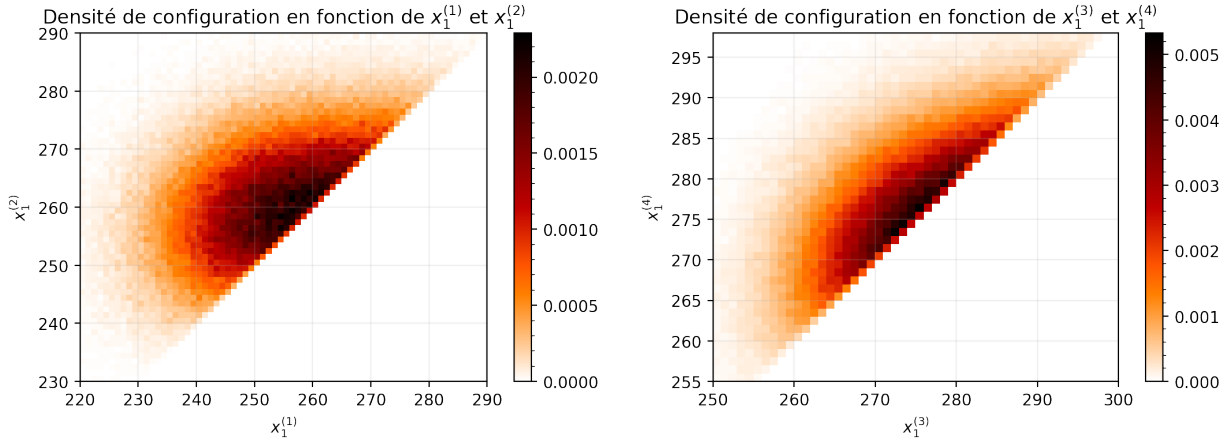


FIGURE 2.11 – Observation de l'entrelacement et de l'adjacence entre deux lignes consécutives. À gauche pour les lignes 1 et 2, à droite pour les lignes 3 et 4.

2.4.3 Corrélations entre les particules

Après avoir passé un certain temps à discuter la densité des particules, correspondant à la fonction de corrélation à un point, il est intéressant de regarder comment ces dernières interagissent entre elles. Pour cela, on considérera les corrélations à deux points entre les particules d'une même ligne, mais aussi entre des lignes différentes pour tenter de mieux comprendre l'impact de la position d'une particule sur son entourage.

Tout comme cela a été fait dans la précédente sous-section, on considérera les positions des particules renormalisées par $x \mapsto X = \frac{2x-n}{\sqrt{n}}$, afin de pouvoir comparer les valeurs obtenues avec celles des valeurs propres de GUE.

Commençons par regarder les corrélations au sein d'une même ligne, pour des indices de lignes pas trop élevés. La figure 2.12 reprend les corrélations pour les lignes 3, 4 et 5. Les entrées de cette matrice⁷ sont données par

$$\mathcal{C}(X_i, X_j) = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle, \quad (2.68)$$

7. Cette matrice porte le nom de *matrice de covariance* en statistique, cependant, on utilisera souvent le nom *corrélations*, celui-ci étant l'appellation standard en physique.

où X_i désigne les différentes positions des particules considérées, et $\langle \cdot \rangle$ désigne la valeur moyenne/l'espérance.

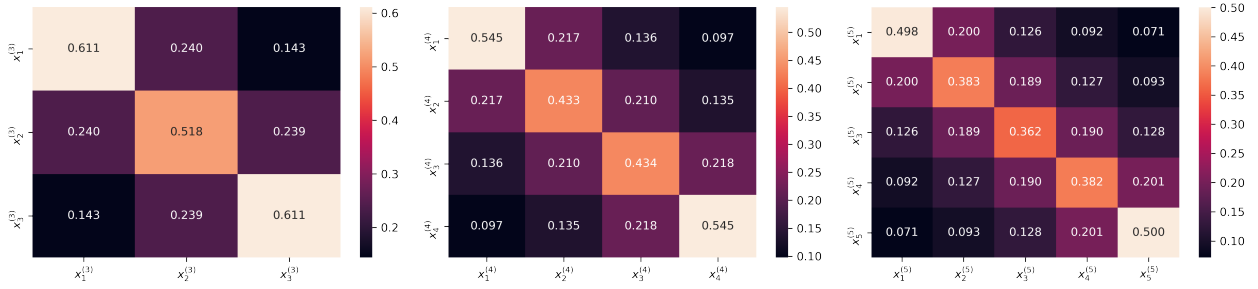


FIGURE 2.12 – Corrélations entre les particules d'une même ligne. Matrices pour les lignes 3,4 et 5.

On peut commencer par mentionner que cette matrice est symétrique sous transposition, ceci est dû à sa définition (2.68), mais également symétrique par rapport à son anti-diagonale. Cette seconde symétrie vient du diamant aztèque, qui sous renversement autour de l'axe horizontale (voir figure 2.3), inverse les positions des particules $x_i^{(j)}$ et $x_{j+1-i}^{(j)}$.

On remarque déjà ici quelques caractéristiques particulières de ces corrélations. En premier lieu, celles-ci sont toutes positives, ce qui signifie que lorsqu'une particule est déplacée dans une direction, les autres particules de la ligne vont avoir tendance à se déplacer dans la même direction. Ceci peut s'interpréter concrètement comme une répulsion entre les particules, ce qui est cohérent avec l'interprétation du terme $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2$ de l'équation (2.13), obtenue dans la section 2.1.

En second lieu, on remarque que la variance (entrées diagonale de la matrice) des particules au milieu de la ligne semble moins élevée, ce qui indique que leurs positions a tendance à moins varier autour de la moyenne.

En dernier lieu, on voit très clairement une décroissance avec la distance, ce qui indique une interaction de courte portée. Ceci est également un comportement qui peut être compris au travers le terme $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2$ de la jpdf.

Comme mentionné plus tôt, on peut également regarder ce qu'il en est pour les corrélations entre particules de deux lignes successives. La figure 2.13a reprend les valeurs ainsi obtenues par les simulations numériques pour les lignes 2 et 3. Ces valeurs peuvent également être obtenues de façon analytique, sur base de la distribution jointe du processus GUE-corners. On a déjà discuté comment obtenir les densités de particules individuelles, par le même type d'intégration, on peut également obtenir les distributions conjointes pour chaque paire de variables et ainsi calculer la quantité (2.68). Pour des variables d'une même ligne, l'intégration ne diffère pas des cas précédents, pour les variables de lignes différentes cependant, celle-ci peut s'avérer un peu plus compliquée étant donné que l'expression (2.26) ne se simplifie pas aussi bien. Pour des indices de lignes pas trop grand, il est néanmoins possible de faire ce calcul de façon analytique en utilisant un logiciel de calcul symbolique. Ces valeurs théoriques sont reprises dans la matrice (2.69), l'ordre des lignes et des colonnes est identique à celui de la figure 2.13a, afin de faciliter la comparaison. Pour ces deux matrices, les blocs diagonaux

(séparés par des lignes dans la matrice (2.69)) contiennent les corrélations au sein d'une même ligne, tandis que le reste des éléments sont les corrélations entre les deux lignes. Pour la figure 2.13b, on a plutôt disposé les éléments de sorte à remettre la symétrie du diamant aztèque en évidence, comme c'était le cas sur les figures donnant les corrélations sur une ligne unique.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 - \frac{4}{\pi} & -1 + \frac{4}{\pi} & 2 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{27}{4\pi} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{27}{4\pi} \\ -1 + \frac{4}{\pi} & 2 - \frac{4}{\pi} & -\frac{4}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{27}{4\pi} & \frac{1}{3} & 2 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{27}{4\pi} \\ \hline 2 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{27}{4\pi} & -\frac{4}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{27}{4\pi} & 3 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{729}{64\pi} & \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} - 1 & -1 - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{729}{64\pi} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} - 1 & 3 - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} & \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} - 1 \\ -\frac{4}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{27}{4\pi} & 2 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} - \frac{27}{4\pi} & -1 - \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} + \frac{729}{64\pi} & \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} - 1 & 3 + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \end{array} \right). \quad (2.69)$$

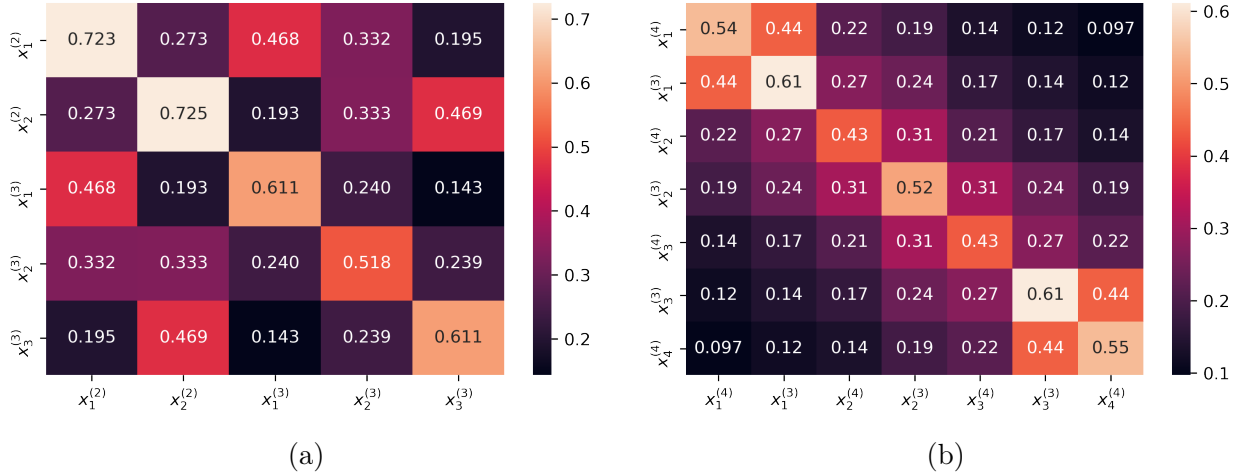


FIGURE 2.13 – Corrélations entre particules de deux lignes consécutives. À gauche, la matrice pour les lignes 2 et 3, qui peut être comparée avec les valeurs théorique (2.68). À droite pour les lignes 3 et 4.

En comparant ces valeurs théoriques et celles issues du diamant aztèque, on peut se rendre compte qu'elles sont identiques avec une tolérance de ± 0.003 , ce qui nous indique une assez bonne correspondance entre théorie et simulation. On remarque également que les corrélations entre deux lignes sont à nouveau toutes positives, traduisant une répulsion entre particules qui est cette fois due à la fonction indicatrice de la jpdf (2.26), et donc au phénomène d'entrelacement des particules. Il est difficile ici d'évaluer l'impact de l'adjacence, bien que cela puisse également jouer un rôle dans le cas du diamant aztèque, comme on l'a discuté précédemment.

Sur la figure 2.13b, on voit à nouveau que la décroissance des corrélations dépend de la proximité entre les particules (des deux lignes cette fois-ci). On remarque également que les particules extrémales des deux lignes (e.g. $x_1^{(3)}$ et $x_1^{(4)}$) sont beaucoup plus corrélées entre elles que les autres.

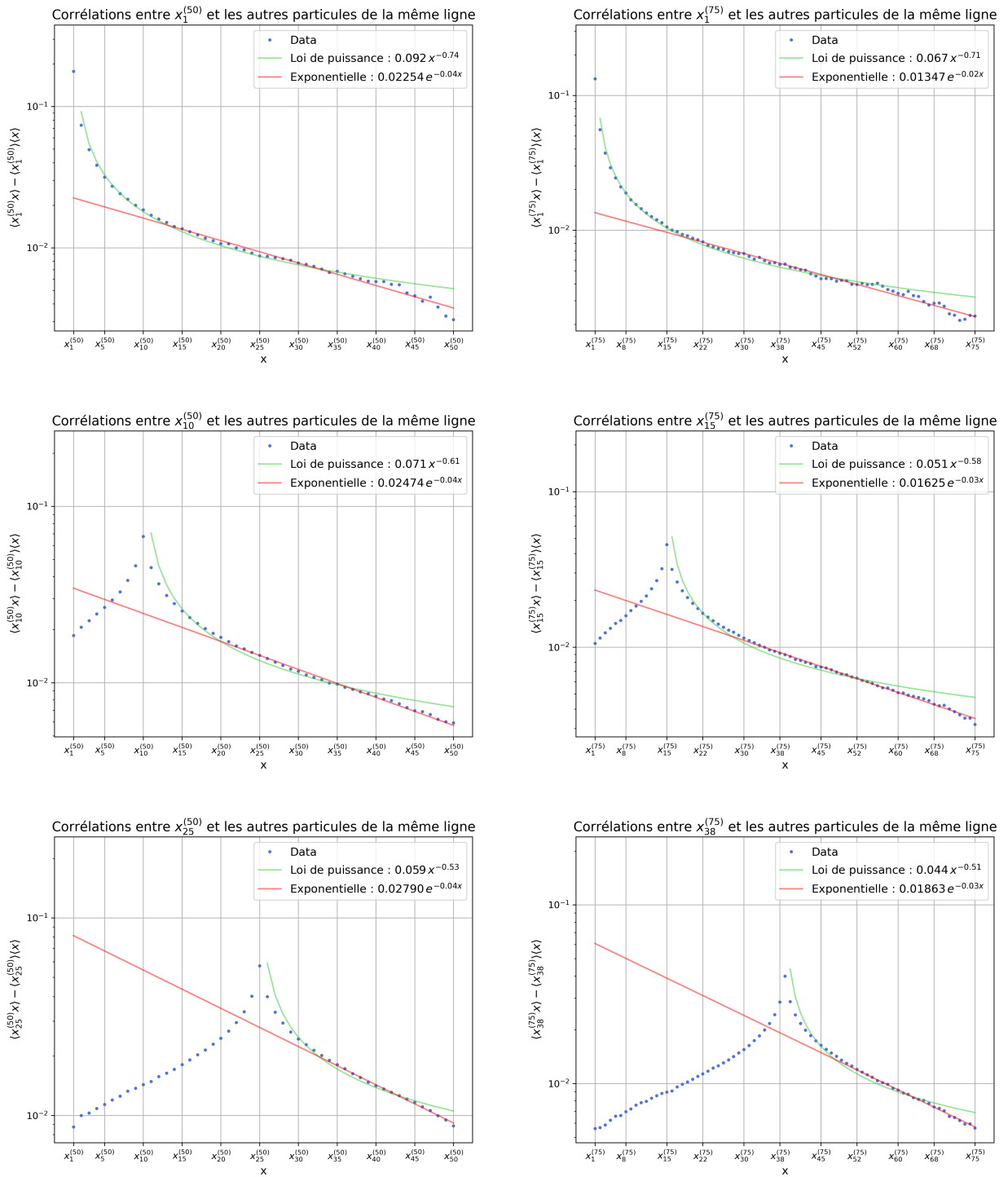


FIGURE 2.14 – Analyse des décroissances des corrélations avec la distance au sein d’une même lignes. Les graphiques à gauche concernent la ligne 50, ceux à droite la ligne 75. Pour les fonctions de la légende, le point $x = 0$ en abscisse se situe sur l’emplacement de la particule de référence.

Nous voudrions maintenant voir s'il est possible de caractériser les décroissances de ces corrélations en fonctions de la « distance »⁸. Une analyse complète prendrait beaucoup de temps, nous simplifierons donc notre étude en nous concentrant sur la situation d'une ligne unique et en regardant l'ensemble des corrélations entre une particule de référence et le reste des particules de la ligne. Ceci correspond, en d'autres termes, à regarder des lignes fixées dans les matrices de covariances. On peut voir sur la figure 2.14 ces décroissances pour différentes particules de références des lignes 50 et 75. On remarque que pour les particules en bout de lignes, le début de la décroissance semble assez bien décrite par une loi de puissance, ici d'exposant proche de -0.7, tandis que la décroissance à longue portée semble plutôt suivre une courbe exponentielle. Pour les particules plus au milieu de la ligne, le comportement change un peu, la décroissance à courte portée n'est plus aussi bien approximée par une loi de puissance « simple », néanmoins la décroissance à longue portée semble toujours correctement décrite par une exponentielle.

On aurait également pu étudier comment ces corrélations décroissent au travers les lignes, cependant une telle analyse prendrait davantage de temps à discuter.

2.4.4 Distribution de Tracy-Widom

Il est bien connu que dans la limite $n \rightarrow \infty$ et sous la bonne renormalisation, la distribution de la plus grande valeur propre de $\mathbf{GUE}(n)$ tend vers la célèbre distribution de Tracy-Widom. Par ailleurs, il est également bien établi qu'il est possible de retrouver cette même distribution dans le diamant aztèque décrit en termes de chemins non-intersectants, lorsqu'on regarde les fluctuations au milieu du chemin le plus externe [7].

Il est par conséquent assez légitime de se poser la question : serait-il possible d'également retrouver cette distribution dans notre description en termes de particules entrelacées, celle-ci étant liée à GUE ? C'est à cela qu'on essaiera de répondre dans la suite de cette sous-section.

Pour cette analyse, nous partons d'un résultat de l'article [27], qui nous donne la normalisation à utiliser lorsqu'on se trouve sur le cercle arctique (et donc aux niveaux des particules extrémales d'une ligne) pour converger vers un processus d'Airy, et donc permettre éventuellement de retrouver la distribution de Tracy-Widom dans la bonne limite. Pour un diamant d'ordre n , cette normalisation est donnée par ([27] thm 2.7)

$$x_1^{(m)} \mapsto \frac{un - x_1^{(m)}}{\lambda n^{1/3}}, \quad (2.70)$$

où dans nos notations, si m indique la ligne du diamant,

$$u = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)},$$

$$k = -\sqrt{\frac{m/n}{u}},$$

8. La distance ici correspondra plutôt à un nombre de particules, et non à une distance au niveau des coordonnées du diamant aztèque.

et

$$\lambda = - \left| \frac{1}{4} \frac{(1 + \sqrt{2}k)^2}{(k^2 + \sqrt{2}k)(k^2 + \sqrt{2}k + 1)} \right|^{1/3}.$$

Pour le détail de ce théorème ainsi que sa démonstration, on renvoie les lecteurs intéressés à la référence indiquée plus haut.

Regardons maintenant ce qu'il advient de la distribution des $x_1^{(m)}$, les plus grandes particules de chaque ligne, sous cette renormalisation, du point de vue numérique. La figure 2.15 reprend l'évolution de ces distributions lorsque l'on augmente m , l'indice de ligne. Comme attendu, les distributions pour les lignes 4 et 10, l'indice m n'est pas encore assez élevé et la correspondance avec Tracy-Widom n'est pas si bonne. Pour les lignes entre 20 et 75, on stagne autour de la bonne distribution, mais sans que la correspondance soit parfaite. Tandis que pour les lignes supérieures à 100 la correspondance redevient moins bonne, de plus, on commence à manquer de points d'évaluation pour les données. En plus de la renormalisation, ceci est en partie dû au fait que pour des lignes très avancées, la position des particules extrémales varie de moins en moins (les particules sont écrasées contre le bord du diamant), les distributions sont alors plus fines, plus piquées autour de la moyenne, ce qui nous laisse moins de positions après la renormalisation.

Malheureusement, la convergence vers la distribution de Tracy-Widom semble trop lente que pour être atteinte ici, mais il y a de bonnes chances pour que cela soit le cas dans la limite où n et m deviennent grands tout en gardant constant le ratio m/n (proche de $1/10$ si l'on se fie à la figure 2.15). Ainsi, avec une collection de diamants d'ordres plus grand, on devrait pouvoir approcher assez bien la distribution.

Il pourrait également être intéressant d'analyser pour quel ratio m/n , en fonction de n , on est le plus proche de la distribution de Tracy-Widom. Cependant, ceci dépasse le cadre de notre étude.

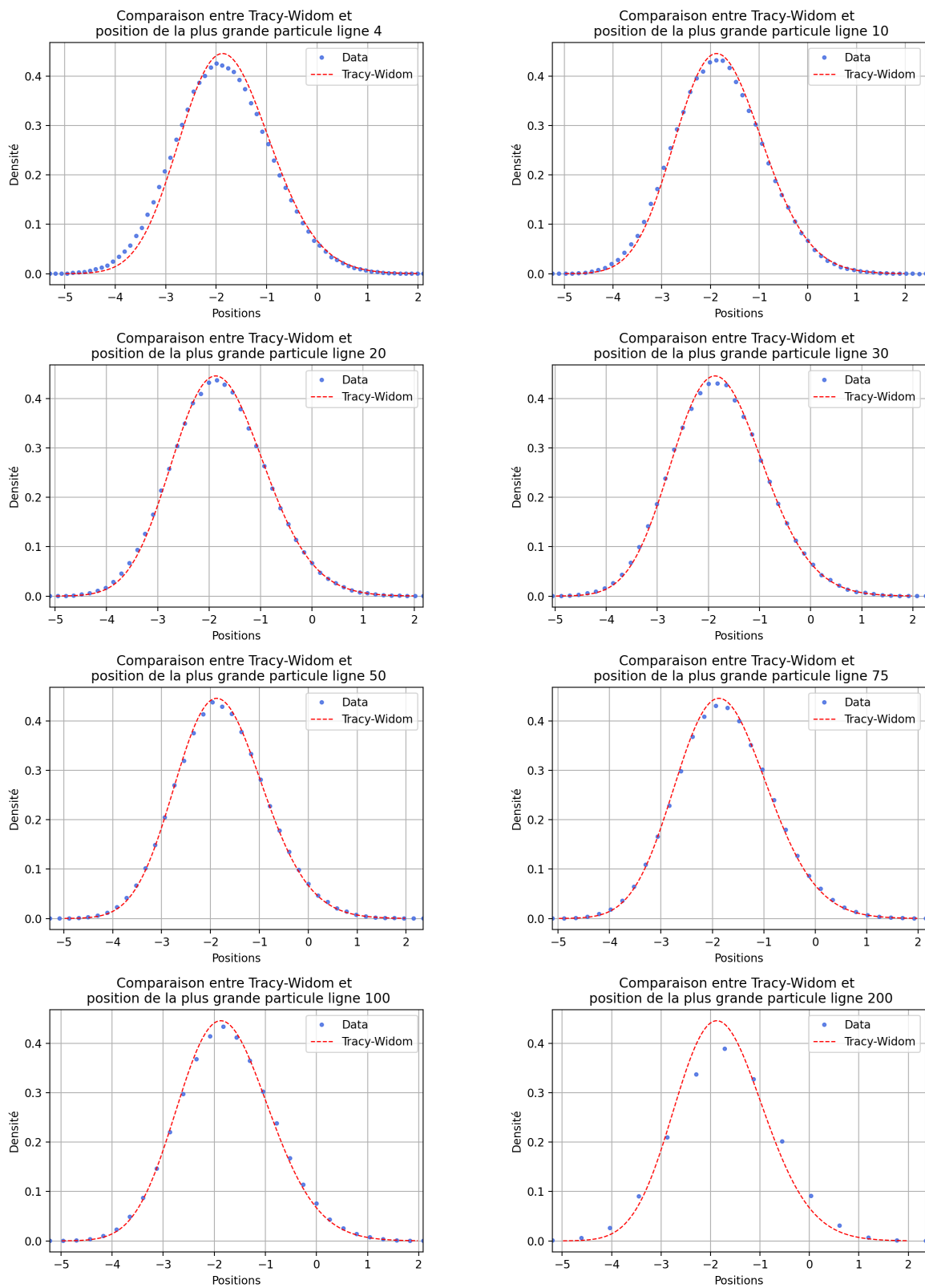


FIGURE 2.15 – Comparaison entre la plus grande particule d’une ligne donnée et la distribution de Tracy-Widom.

Chapitre 3

Fonctions de corrélation à deux points dans le diamant aztèque

Les fonctions de corrélation sont des quantités particulièrement intéressantes dans l'étude d'un modèle statistique, elles permettent de déterminer comment s'influencent les différentes composantes du modèle et ainsi de mieux comprendre les interactions qu'il peut y avoir entre elles.

Les fonctions de corrélation peuvent néanmoins s'avérer parfois délicates à calculer. Tout comme on l'a discuté dans le chapitre 1, nous connaissons la densité, qui correspond à la fonction de corrélation à un point, des quatre types de dimères dans la limite thermodynamique. En revanche, les fonctions à deux points, quant à elles, n'ont pas encore été tellement explorées dans la littérature. Un article récent de Allegra, Dubail, Stéphan et Viti [5] s'est intéressé au calcul de ces fonctions de corrélation en passant par la théorie de champs associée au diamant aztèque. Le résultat ainsi obtenu est alors formulé en termes d'opérateurs de créations/annihilations.

Dans ce chapitre, on étudiera les fonctions de corrélation, dans un premier temps sur le réseau carré, qui est un cas plus simple que le diamant aztèque, ce qui nous permettra de faire le calcul détaillé de ces fonctions et d'avoir un résultat théorique sur lequel nous appuyer. Ensuite, nous analyserons les résultats obtenus par simulations numériques dans le diamant aztèque, et nous tenterons d'en extraire quelques comportements généraux.

3.1 Réseau carré et matrice de Kasteleyn

Dans cette section, on travaillera essentiellement sur le réseau dual, dans la limite thermodynamique, $\mathbb{Z}^2$. Les dominos sont donc symbolisés par des liens entre les sites de ce réseau, comme cela avait été discuté dans le chapitre 1. Il nous sera utile de séparer l'ensemble des points de ce réseau en deux sous-réseaux, en fonction de la parité des sites. On désignera par B l'ensemble des sites de coordonnées (x, y) tels que $x + y$ est pair, et par R l'ensemble des sites tels que $x + y$ est impair, comme illustré sur la figure 3.1. Un lien dans ces notations est

donné par une pair de points voisins $(b, r) \in B \times R$.

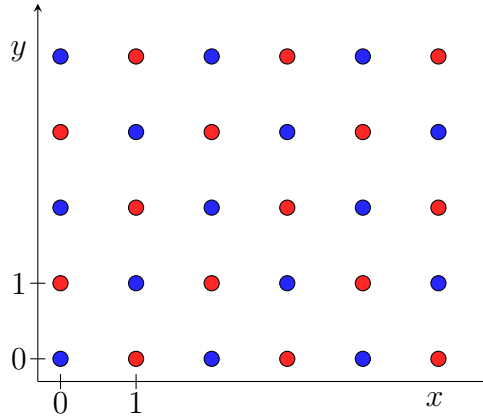


FIGURE 3.1 – Réseau dual $\mathbb{Z}^2$. Les sous-réseaux B et R sont représentés en bleu et rouge respectivement.

Pour déterminer les corrélations sur le réseau carré, on utilisera un résultat que l'on doit à Richard Kenyon [28]. Soit $\{(b_1, r_1), (b_2, r_2), \dots, (b_k, r_k)\}$ un certain ensemble de liens sur le réseau dual, alors la probabilité que ces liens soient tous présents dans une configuration est donnée par

$$\left(\prod_{i=1}^k K(b_i, r_i) \right) \det_{1 \leq i, j \leq k} (K^{-1}(r_i, b_j)), \quad (3.1)$$

où K est une matrice de Kasteleyn. En utilisant ce résultat, il est à priori assez simple d'extraire la probabilité jointe d'avoir deux dimères dans une configuration pour ensuite calculer leurs corrélations, la seule chose intervenant dans la formule étant une matrice de Kasteleyn et son inverse. Cependant, le calcul de cet inverse peut s'avérer particulièrement difficile dans certains cas. Nous verrons que pour le réseau carré certaines propriétés vont grandement simplifier ce calcul, nous permettant d'obtenir une expression analytique.

Une matrice de Kasteleyn est un outil très puissant dans l'étude des modèles de pavage. Elle permet, par exemple, de calculer le nombre de configurations possibles dans des graphes bipartis. Cette matrice peut être définie comme étant une matrice d'adjacence dirigée d'un graphe et pondérée par des poids devant respecter certaines propriétés [28]. Notamment, chaque ensemble de quatre liens formant un carré de la maille du réseau doit contenir un nombre impair de signes négatif.

Pour ce calcul, nous choisissons la matrice de Kasteleyn suivante. Pour $b = (b_x, b_y) \in B$ et $r = (r_x, r_y) \in R$, nous posons pour b_x pair,

$$K(b, r) = -K(r, b) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } r - b = \pm e_x \equiv \pm(1, 0), \\ \pm 1 & \text{si } r - b = \pm e_y \equiv \pm(0, 1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.2)$$

tandis que pour b_x impair,

$$K(b, r) = -K(r, b) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } r - b = \pm e_x, \\ \pm 1 & \text{si } r - b = \mp e_y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Cette matrice correspond graphiquement à la matrice d'adjacence dirigée du graphe de la figure 3.2. Ainsi, $K(b, r) = +1$ si le lien (b, r) est orienté de b vers r et $K(b, r) = -1$ si le lien (b, r) est orienté de r vers b . Cette matrice est donc antisymétrique, comme cela a déjà pu être remarqué dans les expressions précédentes. Ceci étant un choix de matrice de Kasteleyn assez standard, nous ne discuterons pas la validité de cette matrice, mais mentionnons néanmoins que des choix différents de matrice de Kasteleyn sont possibles, notamment en utilisant des entrées complexes [29]. Le résultat final de la formule (3.1) est quant à lui indépendant de ce choix.

Sur la figure 3.2, on a également séparé chacun des sous-réseaux B et R en deux nouveaux sous-réseaux B_0 et R_0 pour x pair, et B_1 et R_1 pour x impair.

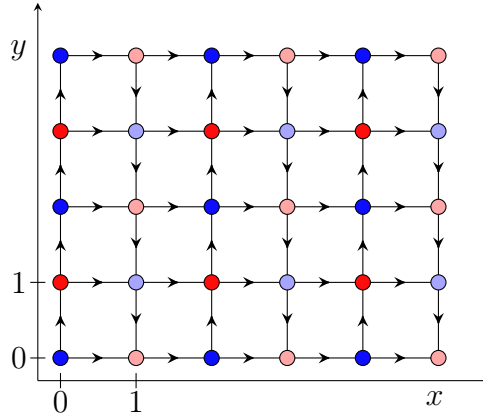


FIGURE 3.2 – Orientation des liens du réseau correspondant à la matrice de Kasteleyn. Les sous-réseaux B_0 et R_0 sont constitués des points bleus foncés et rouges foncés respectivement, tandis que les sous-réseaux B_1 et R_1 sont constitués des points bleus clairs et rouges clairs respectivement.

Pour le calcul de l'inverse de cette matrice, on suivra la démarche de [29], bien qu'on ait fait un choix différent de matrice de Kasteleyn. Commençons par calculer le carré de cette matrice. Pour $b_1 \in B_0$, $b_2 \in B$, on trouve

$$\begin{aligned} K^2(b_1, b_2) &= \sum_{r \in R} K(b_1, r)K(r, b_2) = K(b_1 + e_x, b_2) + K(b_1 + e_y, b_2) - K(b_1 - e_x, b_2) - K(b_1 - e_y, b_2) \\ &= \begin{cases} +1 & \text{si } b_2 - b_1 = \pm 2e_x, \\ +1 & \text{si } b_2 - b_1 = \pm 2e_y, \\ -4 & \text{si } b_2 - b_1 = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le carré de cette matrice a donc la forme d'un Laplacien discret¹ restreint au sous-réseau B_0 . On peut en fait calculer de la même façon le carré de la matrice sur les trois autres sous-réseaux, on trouvera alors le même résultat. Le carré de la matrice de Kasteleyn est ainsi une somme directe de quatre Laplaciens discrets sur chacun des sous-réseaux,

$$K^2 = [\Delta^{B_0} \oplus \Delta^{B_1} \oplus \Delta^{R_0} \oplus \Delta^{R_1}]. \quad (3.5)$$

Il est aussi possible de représenter graphiquement le calcul que l'on vient de faire, comme indiqué sur la figure 3.3.

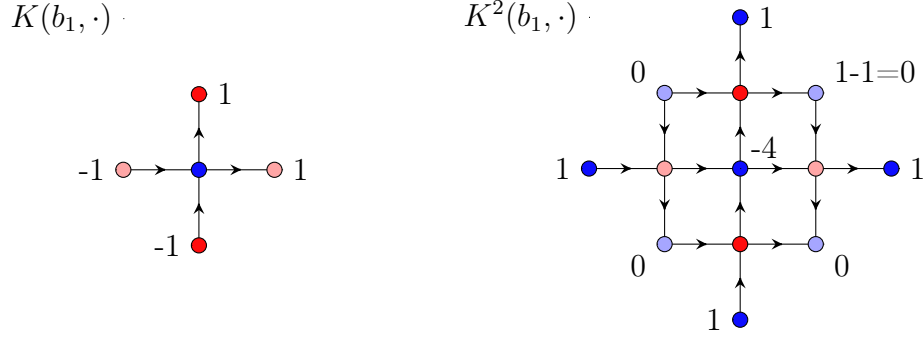


FIGURE 3.3 – Représentation graphique de la matrice de Kasteleyn et de son carré pour $b_1 \in B_0$.

De l'équation (3.5), on obtient directement

$$K^{-1} = [G^{B_0} \oplus G^{B_1} \oplus G^{R_0} \oplus G^{R_1}]K, \quad (3.6)$$

où G^{B_0} est la fonction/matrice de Green de l'opérateur Δ^{B_0} , défini tel que $[\Delta^{B_0} G^{B_0}](b, b') = \delta_{b, b'}$. Cette équation nous donne en particulier

$$K^{-1}(r, b) = ([G^{R_0} \oplus G^{R_1}]K)(r, b) = \begin{cases} \sum_{r' \in R_0} G^{R_0}(r, r')K(r', b) & \text{si } r \in R_0, \\ \sum_{r' \in R_1} G^{R_1}(r, r')K(r', b) & \text{si } r \in R_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

On trouve ainsi, selon le sous-réseau de b ,

$$K^{-1}(r, b) = \begin{cases} G^{R_0}(r, b - e_y) - G^{R_0}(r, b + e_y) & \text{si } r \in R_0 \text{ et } b \in B_0, \\ G^{R_0}(r, b - e_x) - G^{R_0}(r, b + e_x) & \text{si } r \in R_0 \text{ et } b \in B_1, \\ G^{R_1}(r, b - e_x) - G^{R_1}(r, b + e_x) & \text{si } r \in R_1 \text{ et } b \in B_0, \\ -G^{R_1}(r, b - e_y) + G^{R_1}(r, b + e_y) & \text{si } r \in R_1 \text{ et } b \in B_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

La fonction de Green G du Laplacien sur $\mathbb{Z}^2$ étant un résultat bien connu, nous ne la dériverons pas ici, et partirons directement de l'expression, pour $v, w \in \mathbb{Z}^2$,

$$G(v, w) \equiv G(w - v) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\phi}{4\pi^2} \frac{e^{i\theta x + i\phi y}}{4 - 2\cos\theta - 2\cos\phi} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\phi}{16\pi^2} \frac{\cos\theta x \cos\phi y}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2}}, \quad (3.9)$$

1. La convention standard du Laplacien discret est telle que les éléments diagonaux valent 4 tandis que les éléments non-diagonaux valent -1. On prendra néanmoins ici la convention de signe opposée, ceci étant sans influence pour les calculs.

où on a posé $(x, y) = w - v$. Notons que cette intégrale est divergente, mais que les différences $G(v_0, w_0) - G(v_1, w_1)$ restent finies. En prenant en compte que, dans le cas qui nous intéresse, les quatre sous-réseaux sont dilatés par un facteur 2, on a les relations

$$G^{B_0}(b, b') = G^{B_1}(b, b') = G\left(\frac{b' - b}{2}\right), \quad G^{R_0}(r, r') = G^{R_1}(r, r') = G\left(\frac{r' - r}{2}\right). \quad (3.10)$$

On peut également légèrement simplifier l'expression

$$G\left(\frac{w - v}{2}\right) = - \iint_0^{2\pi} \frac{d\theta d\phi}{16\pi^2} \frac{\cos \frac{\theta}{2} x \cos \frac{\phi}{2} y}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2}} = - \iint_0^\pi \frac{d\theta d\phi}{4\pi^2} \frac{\cos \theta x \cos \phi y}{\sin^2 \theta + \sin^2 \phi}. \quad (3.11)$$

En définissant maintenant

$$I(x, y) = - \iint_0^\pi \frac{d\theta d\phi}{2\pi^2} \frac{\sin \theta x \cos \phi y \sin \theta + \cos \theta x \sin \phi y \sin \phi}{\sin^2 \theta + \sin^2 \phi}, \quad (3.12)$$

et en utilisant (3.8) et (3.11), on peut alors exprimer le résultat final en termes des sous-réseaux,²

$$K^{-1}(r, b) = \begin{cases} -I(b - r) & \text{si } b \in B_1 \text{ et } r \in R_1 \\ I(b - r) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Afin de donner un ordre d'idée, voici les premières valeurs non-nulles de la fonction I ,

$$\begin{aligned} I(1, 0) &= -\frac{1}{4} \\ I(3, 0) &= \frac{2}{\pi} - \frac{3}{4} \\ I(2, 1) &= I(1, 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ayant désormais une expression analytique pour l'inverse de la matrice de Kasteleyn, nous sommes en mesure de calculer les corrélations du réseau carré à partir de la formule (3.1). Mais commençons d'abord par regarder les résultats de cette formule pour quelques situations simples, afin de mieux comprendre son fonctionnement. Dans la suite, on notera $\langle h(x, y) \rangle$ la probabilité qu'un lien horizontal ait sa partie gauche située en (x, y) .

Exemple 1 : Prenons le cas d'un domino horizontal unique, représenté par le lien $(b, w) = ([x, y], [x + 1, y])$. L'équation (3.1) nous donne alors,

$$\langle h(x, y) \rangle = K(b, w)K^{-1}(w, b) = I(-1, 0) = \frac{1}{4},$$

ce qui est bien le résultat attendu puisque tous les dominos sont équiprobables, par isotropie du réseau.

2. Il est possible d'exprimer K^{-1} sous cette forme car les deux termes de I ne sont jamais non-nuls en même temps. Ceci permet alors de synthétiser (3.8) en regroupant les expressions pour différents sous-réseaux au sein de la même fonction.

Exemple 2 : Prenons maintenant les deux dominos horizontaux $(b, w) = ([x, y], [x + 1, y])$ et $(b', w') = ([x + 2, y], [x + 1, y])$. Ces deux dominos étant superposés, on s'attend à ce que la probabilité d'obtenir cette configuration soit nulle, ce qu'on peut vérifier comme étant effectivement le cas,

$$\langle h(x, y)h(x + 1, y) \rangle = K(b, w)K(b', w') \begin{vmatrix} K^{-1}(w, b) & K^{-1}(w, b') \\ K^{-1}(w', b) & K^{-1}(w', b') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I(-1, 0) & I(1, 0) \\ I(-1, 0) & I(1, 0) \end{vmatrix} = 0.$$

En fait, pour être tout à fait général, on peut remarquer dans la formule (3.1) que si deux des r_i ou des b_j prennent la même valeur, le résultat sera automatiquement égal à zéro en raison du déterminant.

Exemple 3 : Considérons les deux dominos horizontaux positionnés en $(b, w) = ([x, y], [x + 1, y])$ et $(b', w') = ([x + 1, y + 1], [x, y + 1])$, on trouve cette fois

$$\langle h(x, y)h(x, y + 1) \rangle = - \begin{vmatrix} I(-1, 0) & \pm I(0, 1) \\ \mp I(0, -1) & I(1, 0) \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}.$$

3.2 Corrélations exactes sur le réseau carré

On définira ici la fonction de corrélation entre dimères horizontaux comme la quantité

$$\mathcal{C}_{hh}(x, y, x', y') = \langle h(x, y)h(x', y') \rangle - \langle h(x, y) \rangle \langle h(x', y') \rangle \quad (3.15)$$

Puisque cette fonction ne dépend que de la différence des positions (conséquence de l'invariance sous translation du système), on peut sans perte de généralité fixer la position du premier lien en $(0, 0)$,

$$\mathcal{C}_{hh}(x_0, y_0, x_0 + x, y_0 + y) = \mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y) = \langle h(0, 0)h(x, y) \rangle - \langle h(0, 0) \rangle \langle h(x, y) \rangle. \quad (3.16)$$

En restreignant $(x, y) \in B$, on trouve alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y) \Big|_R &= K([x, y], [x + 1, y]) \begin{vmatrix} I(-1, 0) & I(x - 1, y) \\ (-1)^y I(-x - 1, -y) & I(-1, 0) \end{vmatrix} - \frac{1}{16} \\ &= -(-1)^y I(x - 1, y) I(-x - 1, -y) \\ &= -I(x - 1, y) I(-x - 1, y), \end{aligned} \quad (3.17)$$

tandis que pour $(x, y) \in R$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y) \Big|_B &= K([x + 1, y], [x, y]) \begin{vmatrix} I(-1, 0) & I(x, y) \\ (-1)^y I(-x, -y) & I(1, 0) \end{vmatrix} - \frac{1}{16} \\ &= I(x, y) I(-x, y). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Bien que jusqu'à présent, le résultat puisse encore sembler un peu abstrait, on peut facilement calculer numériquement le résultat de l'intégrale (3.12) pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, et ainsi obtenir des valeurs explicites pour ces corrélations. Sur la figure 3.4, on représente la fonction $\mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y)$ sur l'ensemble du réseau à proximité du dimère de référence en $(0, 0)$. Les symétries sous $x \mapsto -x$ et $y \mapsto -y$ sont assez bien comprises, celles-ci correspondant à des situations équivalentes du point de vue des dimères et en raison de l'isotropie du réseau. On remarque également une forte dépendance par rapport aux sous-réseaux, comme on pouvait s'y attendre au vu des développements de ce chapitre.

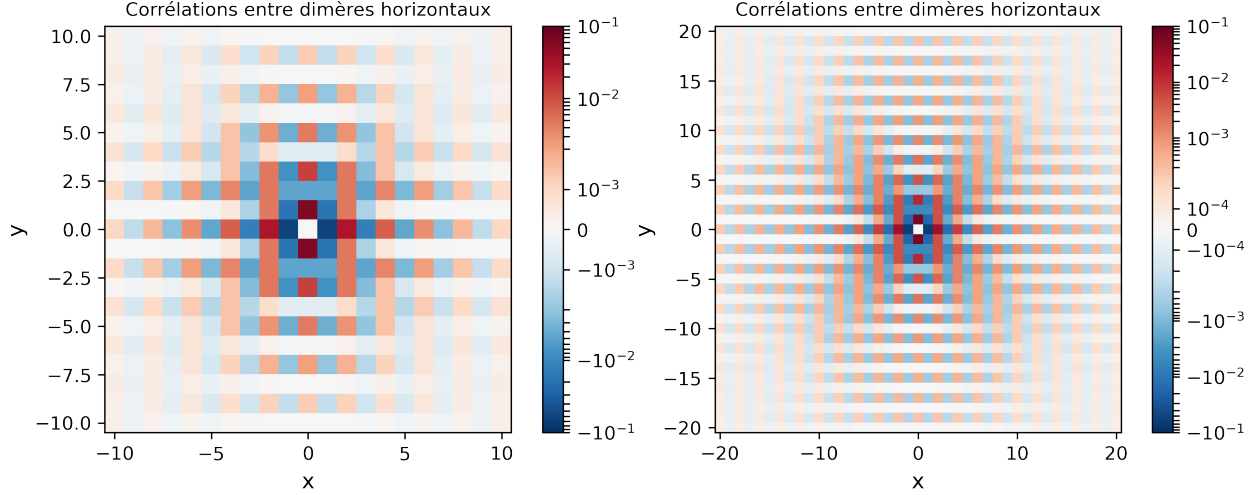


FIGURE 3.4 – Fonction de corrélation $\mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y)$ sur le réseau carré dual.

Sur la figure 3.5, on représente toujours la même fonction, mais cette fois-ci restreinte à chacun des quatre sous-réseaux, les symétries de ces corrélations apparaissent ainsi plus clairement. Notamment, on y perçoit mieux la décroissance avec la distance, ainsi que le fait que les sous-réseaux possèdent chacun des directions privilégiées dans lesquelles les fonctions de corrélation décroissent moins vite. On remarque également qu'il semble y avoir une symétrie non-triviale entre les sous-réseaux R_0 et R_1 . On peut obtenir les corrélations de ces sous-réseaux l'une de l'autre en inversant les coordonnées x et y et en changeant le signe de la fonction. Ce résultat n'est pas forcément intuitif étant donné que ces corrélations correspondent à des situations concrètes différentes (dans le premier cas, on empile les dominos horizontaux verticalement, tandis que dans le second, les dominos sont placés suivant une ligne horizontale avec un nombre impair de sites vides les séparant).

On peut également analyser davantage dans le détail ces corrélations en regardant leurs décroissances le long de certaines lignes en particulier. On voit notamment sur la figure 3.6 que ces décroissances sont asymptotiquement très bien décrites par des lois de puissance en $1/x^2$ ou en $1/x^4$. Cette première loi, en $1/x^2$, est bien celle attendue, les résultats de théorie conforme des champs dans la limite d'échelle pour ce types de modèles étant connus [30]. Les résultats en puissance de $1/x^4$ sont quant à eux plus intéressants, ils proviennent de termes sous-dominants et se manifestent lorsque le coefficient du terme en $1/x^2$ s'annule. On peut également remarquer que les coefficients numériques à longue portée sont assez proches de $0.101 \simeq 1/\pi^2$, facteur qui revient également dans la théorie des champs.

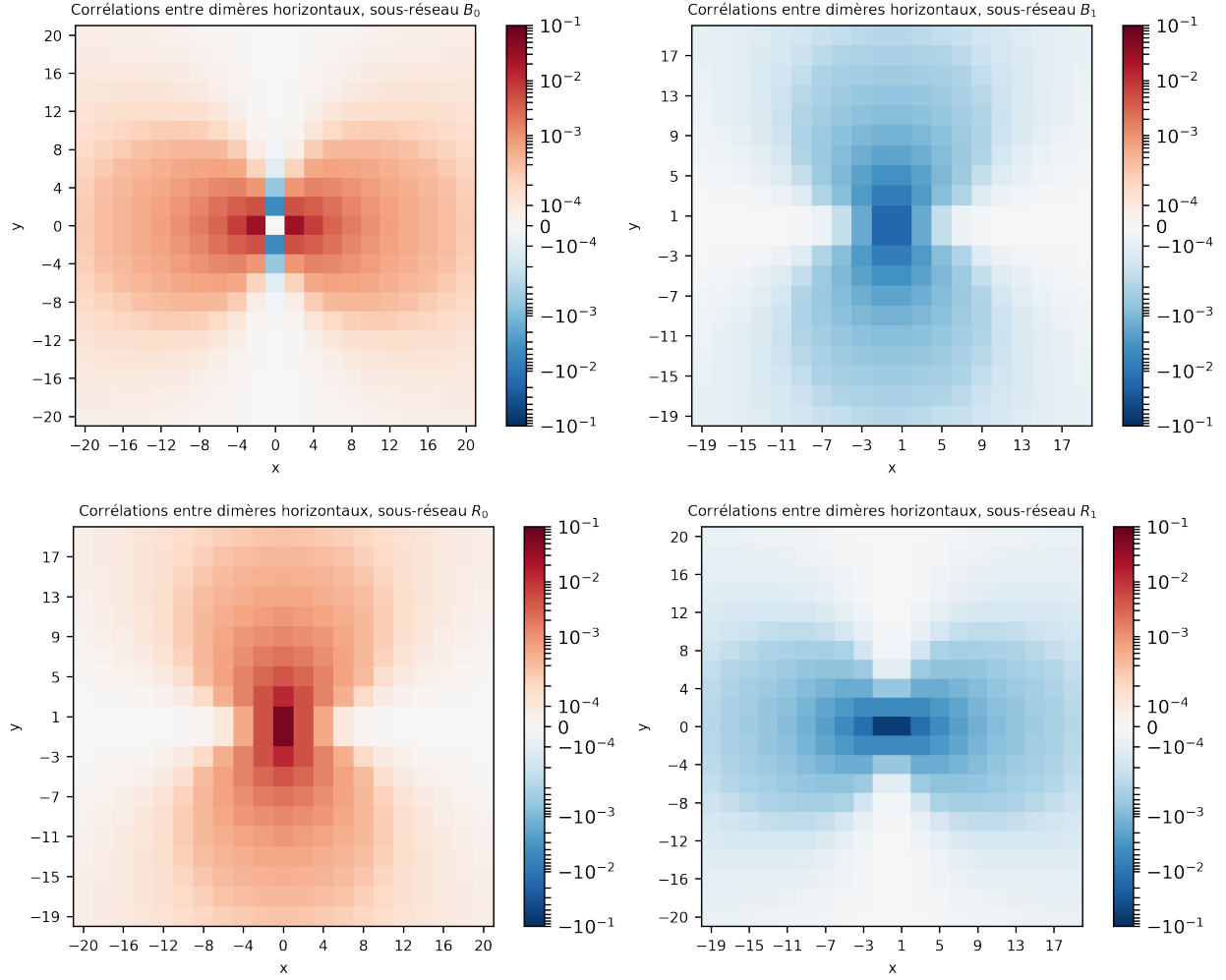


FIGURE 3.5 – Fonction de corrélation $\mathcal{C}_{hh}(0, 0, x, y)$ restreint à chacun des quatre sous-réseaux.

Analysons maintenant le cas des corrélations « mixtes », entre un dimère horizontal et un dimère vertical. On prendra ici comme convention de fixer le dimère horizontal en $(0, 0)$, et de faire varier la position du dimère vertical en (x, y) . On prendra cette fois-ci le point supérieur du lien vertical comme référence pour ses coordonnées. On considère de cette façon la quantité

$$\mathcal{C}_{hv}(x_0, y_0, x_0 + x, y_0 + y) = \mathcal{C}_{hv}(0, 0, x, y) = \langle h(0, 0)v(x, y) \rangle - \langle h(0, 0) \rangle \langle v(x, y) \rangle,$$

où $v(x, y)$ indique la présence d'un lien vertical en (x, y) . De la même façon que pour les dominos horizontaux, on peut trouver une forme explicite pour cette fonction sur les sous-réseaux B et R ,

$$\mathcal{C}_{hv}(0, 0, x, y) = \begin{cases} I(x-1, y)I(-x, -y+1) & \text{si } (x, y) \in B, \\ -I(x-1, y-1)I(-x, -y) & \text{si } (x, y) \in R. \end{cases} \quad (3.19)$$

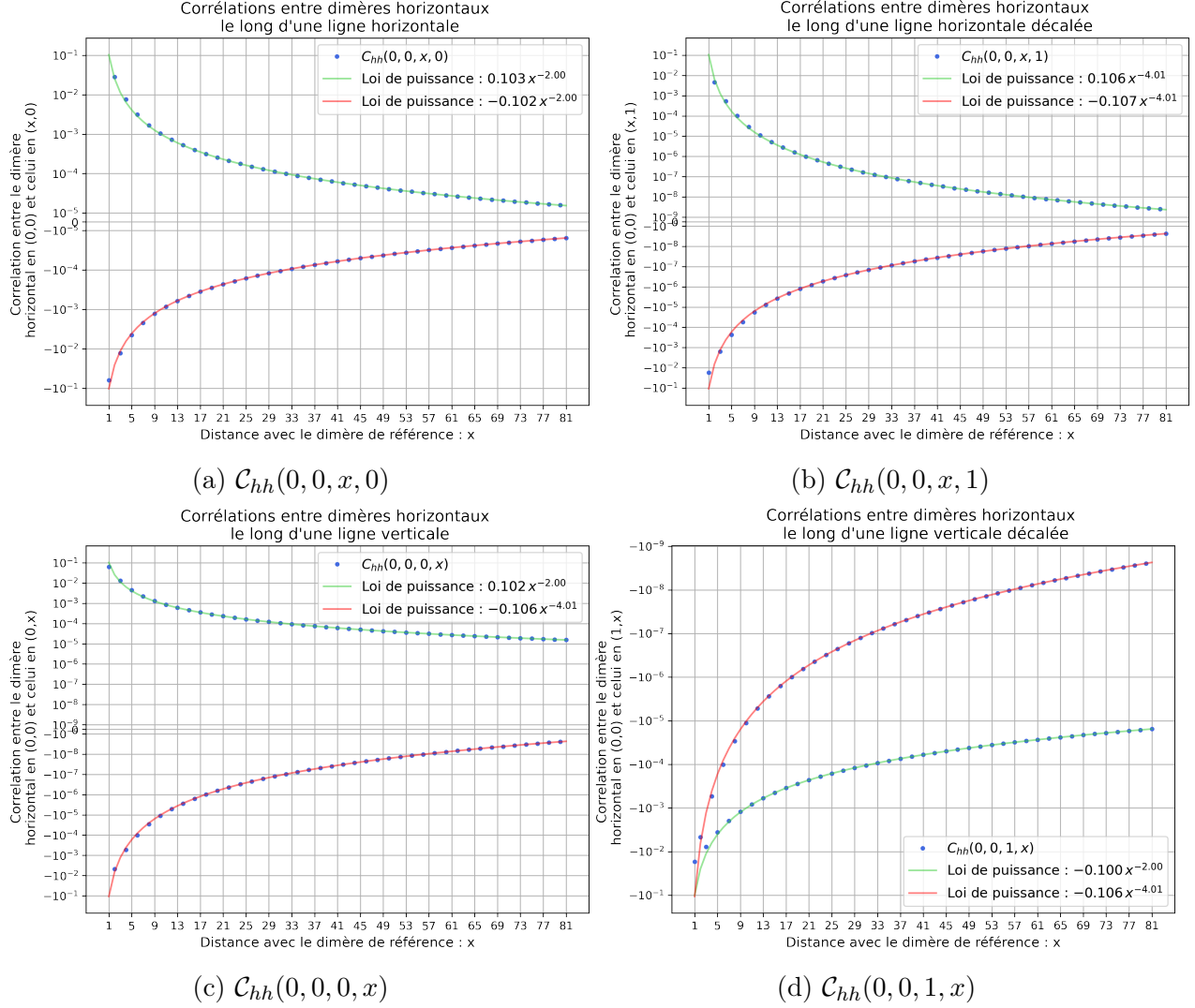


FIGURE 3.6 – Fonction de corrélation $C_{hh}(0,0,x,y)$ évaluée le long de différentes lignes. Les lois de puissance sont des fits des valeurs théoriques basées sur la méthode des moindres carrés. Ces fits sont réalisés sur les points allant de $x = 30$ à $x = 80$, ceci afin d'extraire le comportement asymptotique des fonctions de corrélation, généralement plus stable. Pour le comportement à courte portée, les exposants varient un peu dû à la présence de termes sous-dominants devenant non-négligeables dans la fonction.

On peut également représenter cette fonction sur le réseau complet (figure 3.7a) ainsi que sur les sous-réseaux (figure 3.7b). On remarquera que ces corrélations possèdent des symétries similaires au cas précédent. Cependant la symétrie entre les sous-réseaux R_0 et R_1 (pour laquelle il ne faut plus changer le signe de la fonction par rapport au cas précédent, mais seulement inverser les coordonnées x et y) est bien plus claire maintenant, celle-ci pouvant se comprendre au niveau des dimères eux-mêmes. Il est en effet possible, à partir d'une configuration à deux dimères, $[h(0,0), v(x,y)]$, de retrouver la configuration $[h(0,0), v(y,x)]$,

uniquement en employant des symétries (renversements et rotations) du réseau.

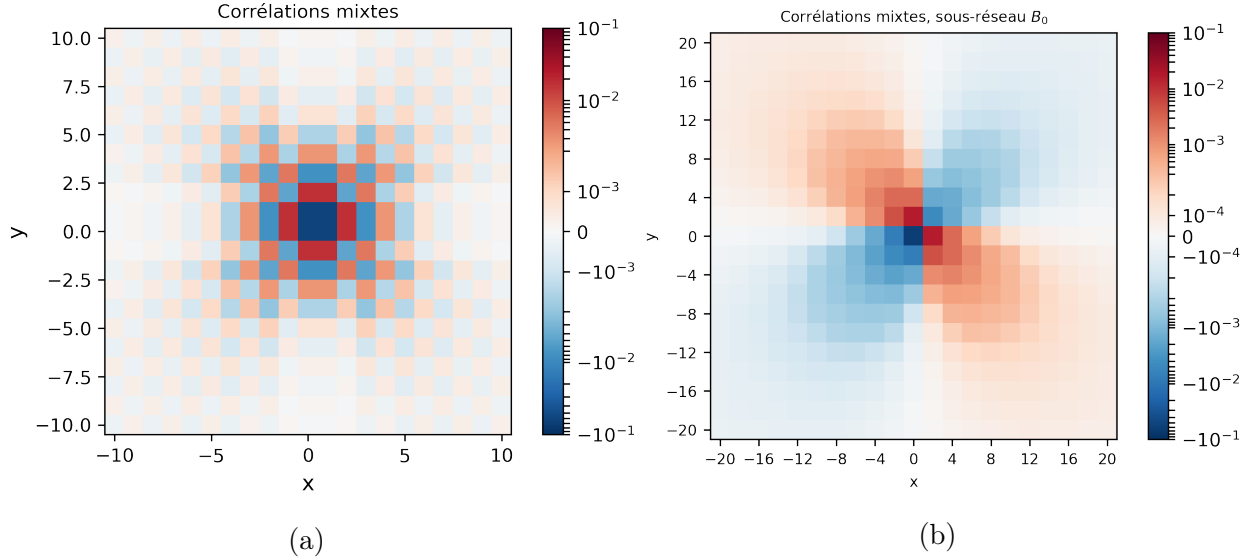


FIGURE 3.7 – À gauche, fonction de corrélation $\mathcal{C}_{hv}(0,0,x,y)$ sur l'ensemble réseau carré dual. À droite, $\mathcal{C}_{hv}(0,0,x,y)$ cette fois-ci restreinte au sous-réseau B_0 . Les restrictions de la fonction aux trois autres sous-réseaux sont des rotations d'angle $\pi/4$ de cette figure.

Sur la figure 3.8, on analyse les décroissances dans des directions particulières. On peut voir que suivant des lignes horizontales, on a des lois de puissance en $1/x^3$ tandis que suivant les diagonales la loi est en $1/x^2$. Ce dernier comportement dominants est également celui prédits par la théorie conforme [30]. Un autre résultat qui est prédit par cette théorie est le changement de signe de la fonction sur les axes principaux de coordonnées, un fait que l'on peut constater sur la figure 3.7b. Pour finir, on obtient également le coefficient $0.025 \simeq 1/4\pi^2$ pour les fits figures 3.8c et 3.8d, à nouveau cohérent vis-à-vis de la théorie de champs.

Nous n'analyserons pas le cas des corrélations entre dimères purement verticaux, celui-ci étant identique au cas des dimères purement horizontaux par symétrie du réseau. De même pour la situation où c'est le dimère vertical qui est fixé pour les corrélations mixtes. Cependant, un autre cas intéressant à étudier est celui des corrélations sans spécifier l'orientation des dimères, c'est-à-dire de regarder la probabilité qu'un dimère horizontal se trouve sur un certain site (x,y) sans spécifier si c'est sa partie gauche ou droite qui occupe le site. Ce résultat est également connu dans la théorie des champs cependant les décroissances prédites sont plus élevées [30]. On verra dans la suite qu'en raison des limites sur notre précision numérique, l'étude de décroissances aussi rapides ne sera possible. On ne discutera donc pas ce cas ici, bien que cela aurait pu être intéressant d'également confronter nos résultats sur le réseau carré à ceux de la théorie des champs.

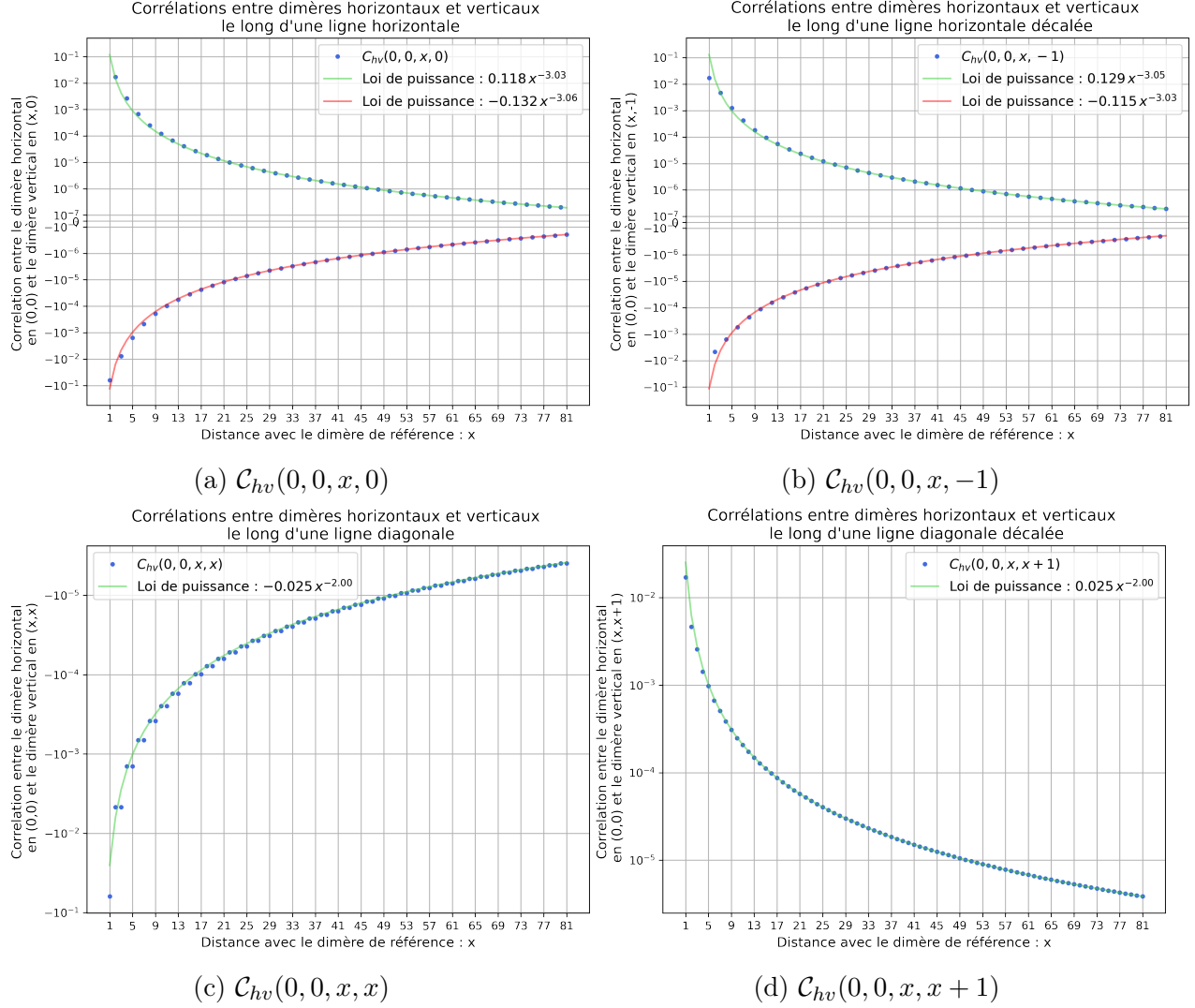


FIGURE 3.8 – Fonction de corrélation $C_{hv}(0, 0, x, y)$ évaluée le long de différentes lignes. Les lois de puissance sont des fits des valeurs théoriques. Ces fits sont réalisés sur les points allant de $x = 30$ à $x = 80$, ceci afin d’extraire le comportement asymptotique des fonctions de corrélation, généralement plus stable.

3.3 Corrélations numériques sur le diamant aztèque

3.3.1 Corrélations dans le centre du diamant

Notre étude sur le réseau carré nous a permis d’identifier certains comportements clés des fonctions de corrélation. Ceci nous sera très utile dans la suite, sachant que pour l’évaluation numérique sur le diamant aztèque, nous sommes limités dans notre précision par la taille de l’échantillon (200 000 diamants). Les comportements les plus facilement identifiables nous

servirons ainsi de points de repère pour notre étude, et nous permettrons de rapidement nous faire une idée de la qualité de notre échantillon de diamants aztèques ainsi que de la précision numérique que l'on a à notre disposition.

Nous travaillerons ici dans les coordonnées standards du diamant aztèque (non-renormalisées, d'ordre 500) visible sur la figure 1.1 de du chapitre 1. Les points du réseau dual correspondent ainsi aux valeurs demi-entières des coordonnées. Contrairement au réseau carré dans la limite thermodynamique, le diamant aztèque de taille finie n'est pas invariant sous translations, il nous faudra donc spécifier les deux points des fonctions de corrélation. On gardera la notation $\mathcal{C}_{hh}(x_0, y_0, x, y)$, où (x_0, y_0) seront les coordonnées du dimère de référence.

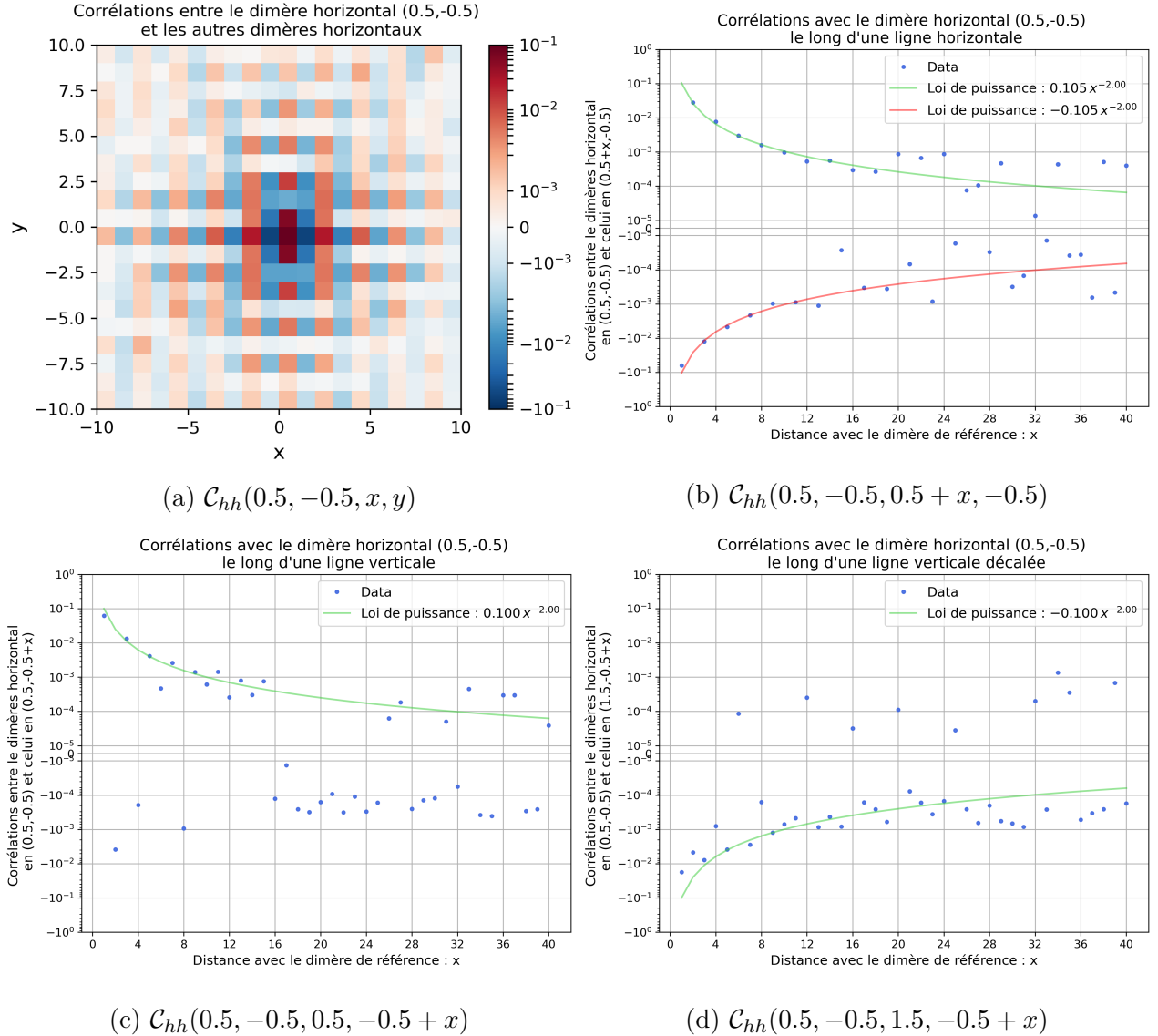


FIGURE 3.9 – Fonction de corrélation $\mathcal{C}_{hh}(0.5, -0.5, x, y)$ évaluée le long de différentes lignes. Sont également affichées les lois de puissance obtenues sur le réseau carré.

Les données numériques sont obtenues en comptant les configurations ayant des dimères aux emplacements désirés et en divisant par le nombre total de configurations dans l'échantillon. De cette façon, on obtient les différentes probabilités de la formule (3.15), desquelles on calcule sans problème les corrélations. Les données étant issues d'un « comptage », elles ne sont pas entachées d'incertitudes quantifiables directement, cependant la précision de ces données dépend fortement de la taille de l'échantillon utilisé.

Commençons par identifier les comportements les plus simples, ceux en $1/x^2$, dans le cas des corrélations purement horizontales. Sur la figure 3.9a, on peut déjà s'apercevoir que le motif obtenu est qualitativement le même que pour le réseau carré. Ceci indique que le centre du diamant, où chaque type de dominos est essentiellement équiprobable, est convenablement approximé par le réseau carré, comme on pouvait s'y attendre. Sur le reste des graphiques de la figure 3.9, on regarde la décroissance des corrélations suivant plusieurs lignes.

Sur les images 3.9c et 3.9d, on comprend que les décroissances supérieures à $1/x^2$ seront malheureusement hors de notre portée d'étude. En effet, ces fonctions atteignent presque immédiatement notre précision limite, qui semble se situer aux alentours de 10^{-3} , ce qui ne nous laisse pas suffisamment de points d'évaluations fiables pour l'analyse de la fonction. On se limitera donc dans la suite à identifier les décroissances moins rapides.

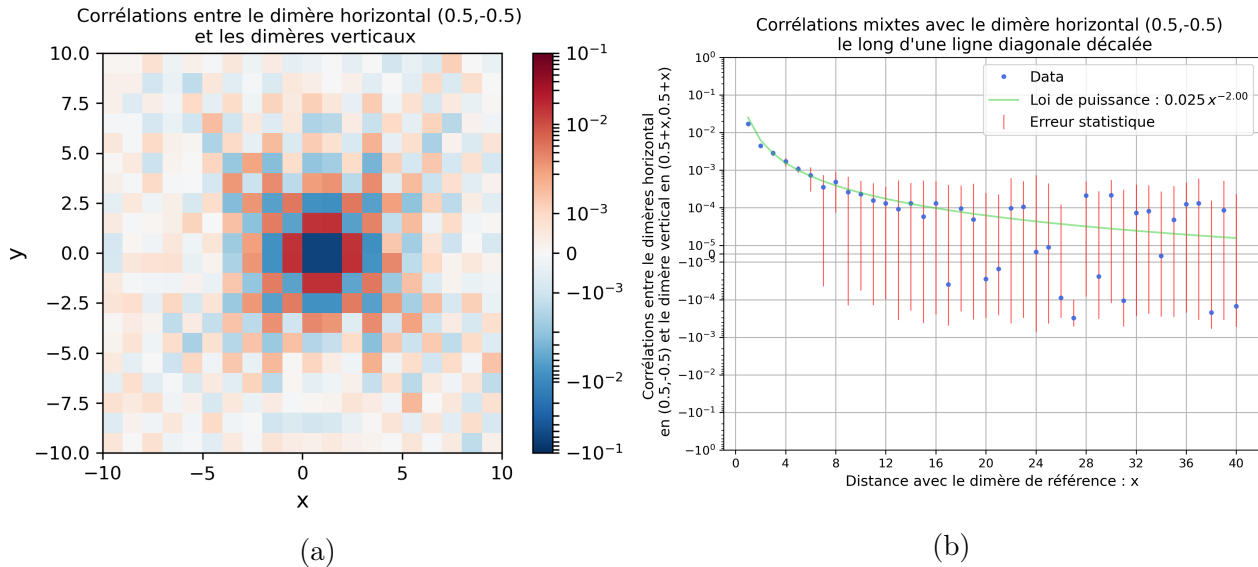


FIGURE 3.10 – Fonction de corrélation $\mathcal{C}_{hv}(0.5, -0.5, x, y)$. Pour la figure de droite, afin d'augmenter la précision sur les données, nous avons moyenné les valeurs des 8 lignes diagonales décalées ($\mathcal{C}_{hv}(x_0, y_0, x_0 + x + 1, y_0 + x), \dots$) et ces moyennes sont accompagnées de leurs écart-types (ici représentés par des barres rouges). Cette opération a permis de réduire approximativement d'un ordre de grandeur les fluctuations numériques dues à la taille finie de l'échantillon.

On peut regarder ce qu'il en est pour les corrélations mixtes au même point de référence (voir figure 3.10). À nouveau le motif de la figure 3.10a semble identique à ce qui a été obtenu sur le réseau carré. Pour les corrélations mixtes, on a pu voir sur le réseau carré que, soit les décroissances étaient plus rapides, soit les coefficients étaient plus petits. Afin de compenser

cela, nous avons utilisé sur la figure 3.10b les symétries remarquées sur le réseau carré pour effectuer une moyenne sur plusieurs lignes. Ceci nous permet de gagner un peu en précision et d'observer, grâce à cela, la décroissance en $1/x^2$ qui est attendue. Cependant, les symétries que nous avons utilisées sont des symétries du réseau carré, mais pas nécessairement du diamant aztèque qui possède une structure plus compliquée (en particulier, les densités de chaque type dépendent fortement de la position dès qu'on s'éloigne du centre). Il faut donc être vigilant en utilisant de telles méthodes car elles pourraient éventuellement détruire certains comportements plus fins (e.g. des oscillations de faibles amplitudes ou bien des particularités à longue portée) propres au diamant aztèque.

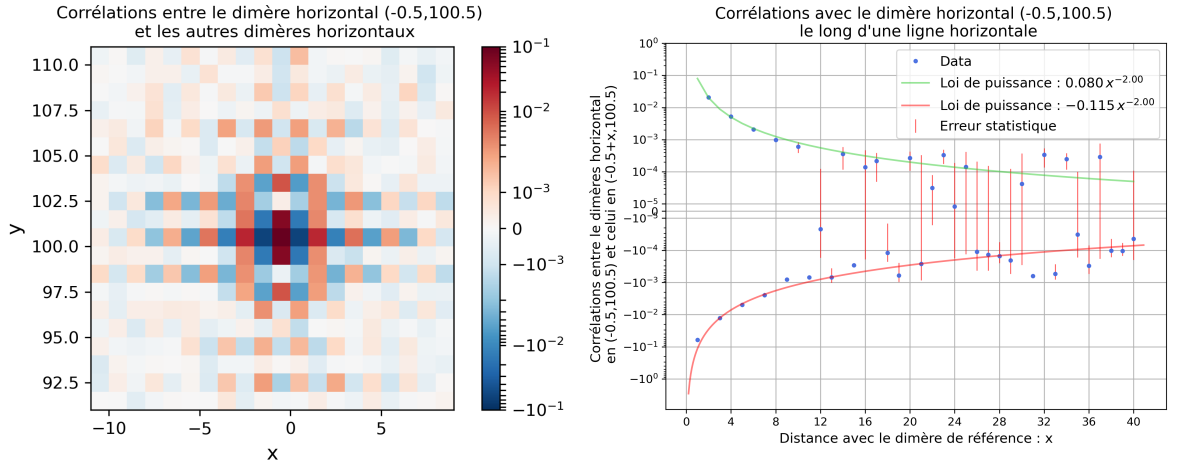
3.3.2 Corrélations hors du centre et sur le cercle arctique

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce qui se passe lorsqu'on s'éloigne du centre du diamant. Étant donné que la densité des quatre types de dimères varie avec la position, il est assez clair que l'on sortira rapidement du régime approximable par le réseau carré.

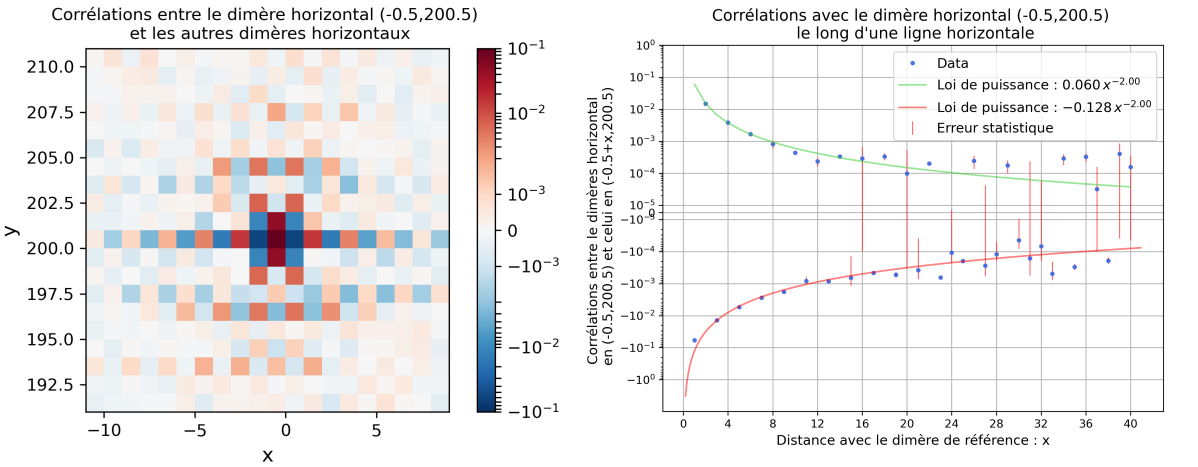
Une analyse complète de la situation (pour des points de référence à différents endroits du diamant, en séparant les quatre sous-réseaux et en regardant les différentes directions possibles) représenterait un travail beaucoup trop important que pour être discuté ici. De plus, nous verrons que, hors du centre, le comportement des fonctions de corrélation sera généralement assez compliqué, rendant difficile la caractérisation de ces corrélations au vu de notre précision numérique. Nous limiterons donc notre étude à seulement quelques cas, assez restreints, où nous sommes parvenus à approximer les fonctions par des lois de puissance ou des exponentielles, permettant la compréhension de comportements stables et récurrents de ces fonctions.

Commençons par regarder l'évolution des corrélations lorsqu'on remonte vers le sommet nord du diamant, voir figure 3.11. Pour les graphiques à droite de cette figure, on a moyenné sur les directions gauches et droites de la ligne horizontale afin de gagner en précision. Étant donné que ces corrélations sont égales en raison d'une symétrie du diamant aztèque cette fois-ci, cette manipulation est légitime même hors du centre. On affiche sur les graphiques les barres d'erreurs provenant de cette moyenne bien que celles-ci soient assez peu représentatives de la précision réelle des valeurs, ne tenant pas compte du manque de précision dû à la taille finie de l'échantillon.

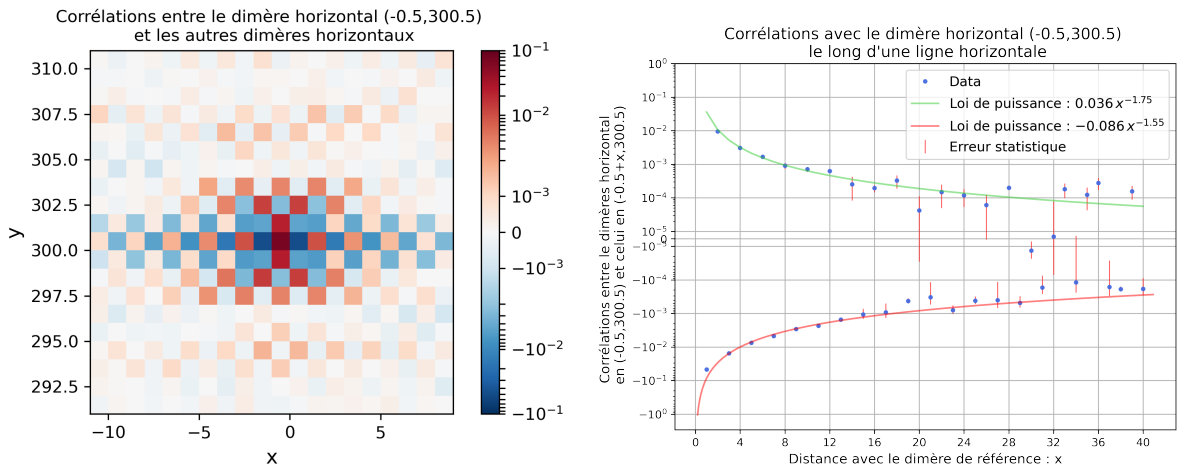
Sur la figure 3.11a, on remarque que le graphique de gauche a déjà légèrement changé par rapport au centre, tandis que sur le graphique de droite, les décroissances horizontales restent assez bien approximées par une loi en $1/x^2$, bien qu'une asymétrie soit apparue dans les coefficients des lois de puissance. Pour la figure 3.11b, le motif central continue d'évoluer, et le comportement purement horizontal reste stable au niveau de l'exposant bien que les écarts entre les coefficients continuent de grandir. Sur la figure 3.11c, on voit que le motif du graphique de gauche est maintenant radicalement différent de celui au centre du diamant. On peut remarquer sur cette image que les corrélations suivant la verticale semblent se complexifier, on distingue dans cette direction un comportement assez irrégulier où la fonction décroît



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.11 – Fonctions de corrélation entre dimères horizontaux lorsqu'on déplace le dimère de référence vers le nord du diamant.

rapidement, mais regagne ensuite en amplitude³. On voit également que les corrélations le long d'une ligne horizontale décroissent moins vite que précédemment. Plutôt que d'afficher une loi en $1/x^2$, on a ici effectué un fit.

Sur la figure 3.12, on a continué à déplacer le dimère de référence jusqu'à atteindre la courbe arctique en $(0, n/\sqrt{2})$. On aperçoit alors différents phénomènes assez intéressants. Le premier étant le fait que la portée des corrélations est nettement plus grande qu'auparavant dans la direction horizontale (voir figure 3.12a). Ceci semble être lié au fait que les fonctions décroissent moins vite dans cette direction. Pour être plus précis, la pente minimale de cette décroissance semble suivre le cercle arctique.

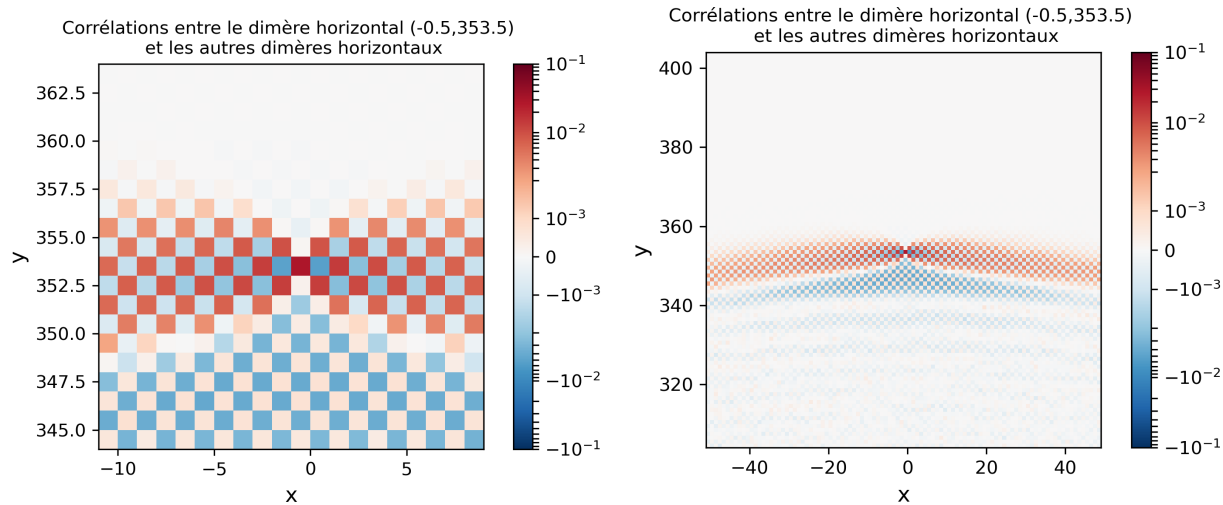
Sur la figure 3.12b à gauche, on a fitté la décroissance selon une ligne droite horizontale. On voit que lorsqu'on s'éloigne trop, la décroissance augmente. Ceci semble lié au fait que l'on quitte le cercle arctique. Sur le graphique de droite, plutôt que d'aller en ligne droite, on suit la courbe du cercle arctique, on voit alors que la décroissance suit assez fidèlement une loi de puissance d'exposant proche de -0.75. Les légers sauts dans les points de ce graphique sont liés à la discrétisation du cercle, et au moment où on descend d'une unité verticalement. Cet effet devrait en pratique être « lissé » lorsque l'ordre du diamant augmente. Cette faible décroissance dans la direction horizontale peut trouver une explication dans la description du diamant aztèque en termes de chemins non-intersectants, que nous n'avons pas introduite ici. En effet, dans cette description, il est assez clair que si l'on fixe un dimère au niveau du sommet de la courbe arctique, ceci influencera fortement le chemin le plus externe à proximité, et donc ce dimère sera fortement corrélé le long de la courbe arctique.

Sur le graphique de gauche pour la figure 3.12c, on regarde cette fois les décroissances dans une direction verticale, orientée vers l'extérieur du cercle, lorsqu'on se dirige vers la région gelée. On voit alors une décroissance exponentielle, cohérente avec le fait que les dimères de cette région sont peu influencés par les dimères du centre. À cette décroissance exponentielle, $e^{-x/\xi}$, correspond une longueur de corrélation approximativement égale à $\xi \simeq \frac{1}{0.55} \simeq 1.8$. On verra dans la suite que cette longueur de corrélation est assez stable lorsqu'on sort de la région liquide à d'autres endroits du cercle arctique.

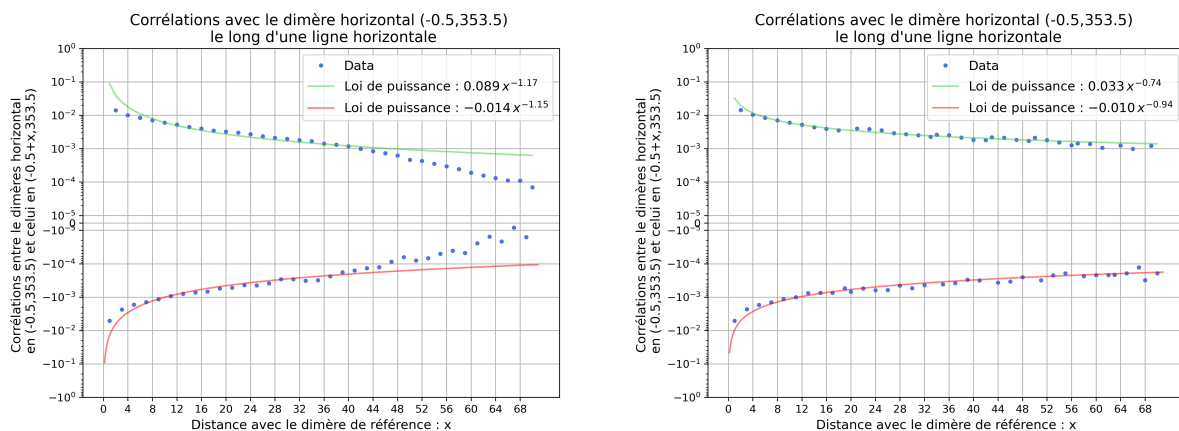
Finalement, sur la figure de droite, on constate un comportement plus compliqué qui pourrait s'apparenter à une décroissance en loi de puissance modulée par une fonction oscillante. Nous n'avons pas ici la précision suffisante pour analyser en détail un tel comportement. Néanmoins, les oscillations semblent suffisamment discernables pour que cela ne soit pas dû à des fluctuations provenant du manque de précision. On peut également constater sur la figure 3.12a à droite, la présence « d'ondulations » dans la direction du centre, confirmant ce qui vient d'être dit.

Ici, on a regardé les corrélations lorsqu'on fixait un dimère nord proche de la région nord (ceci permet de maximiser les probabilités et d'obtenir des données numériques plus stables). Mais on peut également se demander ce qu'il en est si l'on prend comme dimère de référence celui juste à côté, qui est un dimère sud. Le motif de la figure en deux dimensions sera essentiellement identique, mais avec une inversion des intensités entre les corrélations positives

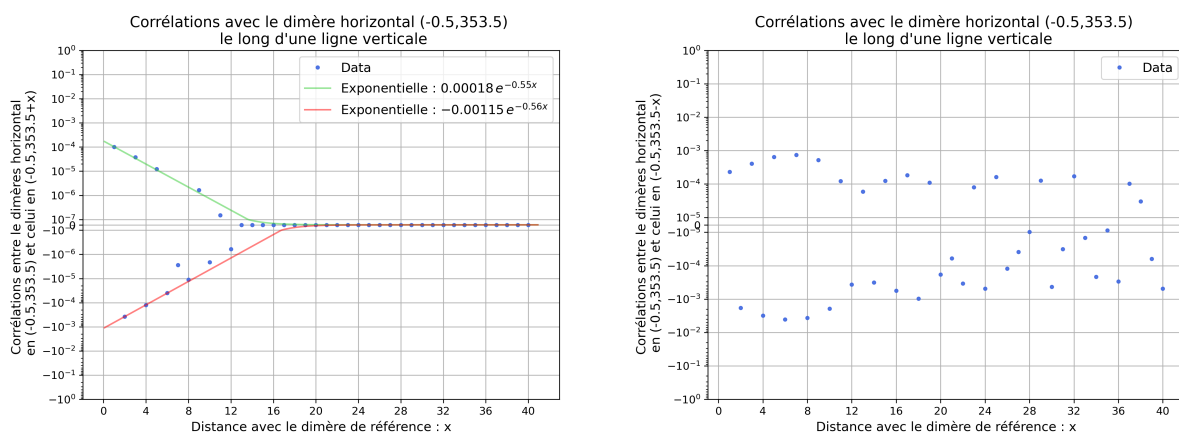
3. Ici, le phénomène est assez faible, on pourrait croire qu'il s'agit de fluctuations, mais on verra dans la suite que ce n'est pas le cas.



(a)



(b)



(c)

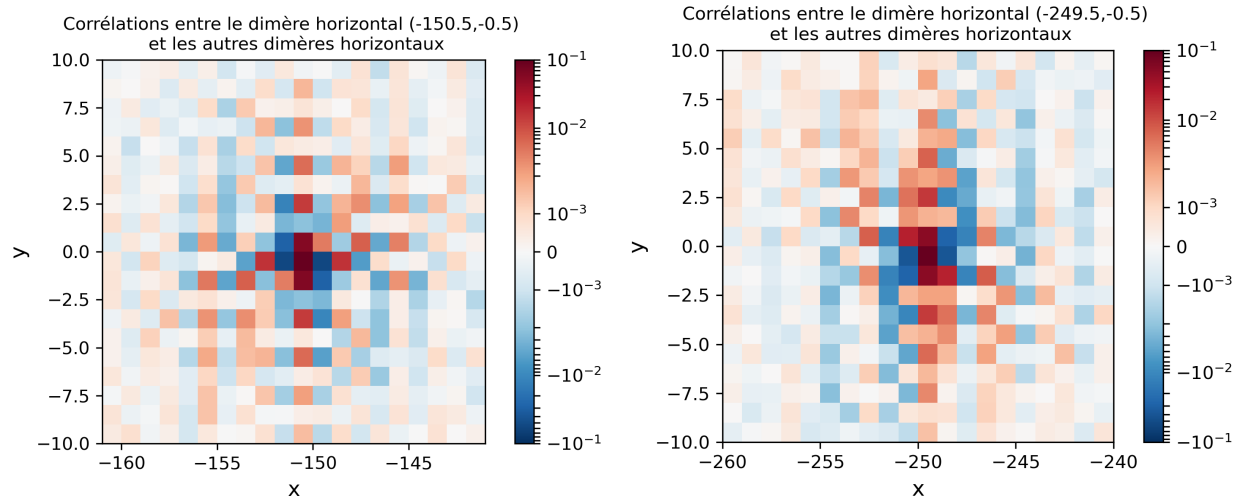
FIGURE 3.12 – Fonctions de corrélation lorsque le dimère de référence se trouve au sommet nord de la courbe arctique.

et négatives, et on perdra également un facteur 5 dans l'amplitude des corrélations. Cependant, les comportements que l'on a identifiés, en lois de puissance et exponentiels, resteront pratiquement intacts, avec des exposants similaires.

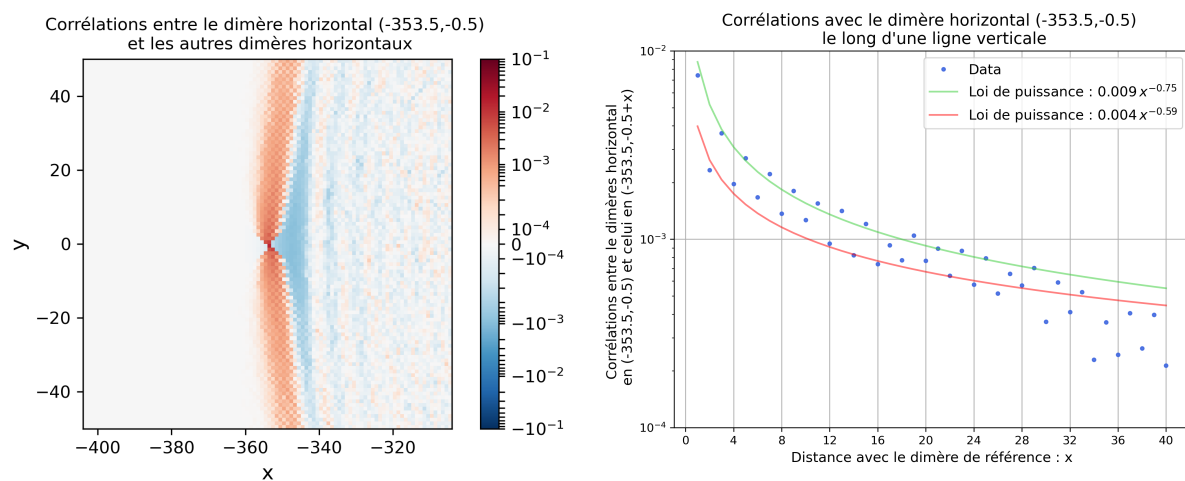
Il aurait pu être pertinent de regarder plus en détails l'évolution des fonctions corrélations lorsqu'on place notre dimère de référence dans la zone gelée, cependant, la présence de dimères d'autres types dans une des quatre régions gelées est quelque chose d'extrêmement rare. Notre échantillon de diamant aztèque n'est donc pas d'une taille suffisante que pour être représentatif dans une telle analyse.

Il est également instructif de regarder ce qui se passe lorsqu'on se dirige cette fois-ci vers le segment Ouest du cercle arctique. Sur la figure 3.13a, on voit que le comportement global de la fonction de corrélation change d'une manière moins évidente que lorsqu'on se dirigeait vers le segment Nord de la courbe arctique, bien qu'il est tout de même possible de remarquer que la décroissance dans la direction verticale diminue lorsqu'on se rapproche du cercle arctique. Sur la figure 3.13b à gauche, on constate de nouveau que les corrélations sur la courbe arctique sont de plus longues portées, particulièrement dans la direction suivant le cercle lui-même. Cependant, bien que les corrélations dépendent toujours des sous-réseaux, les points positifs et négatifs ne sont pas distribués de la même façon qu'auparavant. Pour le fit des fonctions dans les différentes directions, on retrouve néanmoins des comportements semblables à la situation sur la partie nord de la courbe, comme s'il y avait uniquement eu un changement de signe sur deux des quatre sous-réseaux.

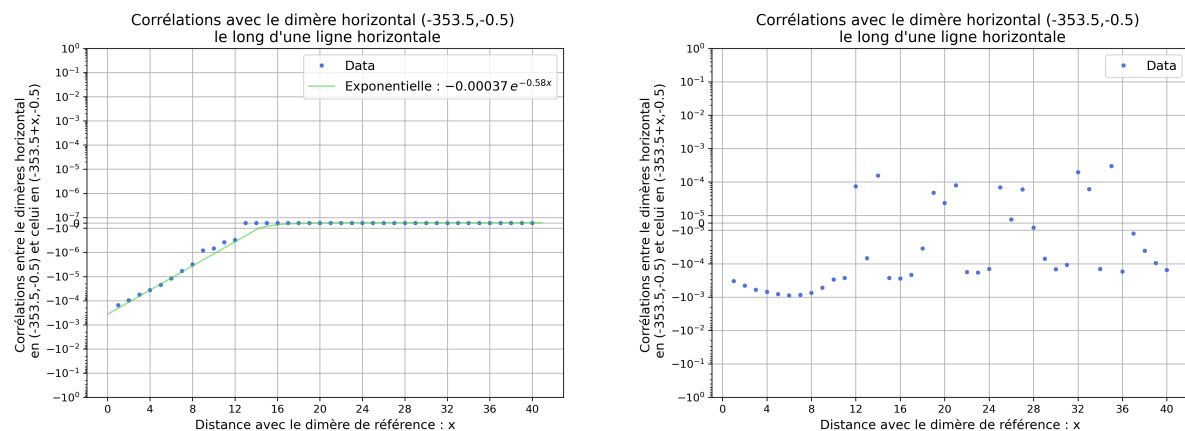
Nous terminerons notre étude de ces fonctions de corrélation en regardant ce qu'il en est pour les corrélations mixtes au niveau des deux régions du cercle arctique précédemment étudiées. La figure 3.14 nous indique que les différents comportements observés jusqu'à présent restent assez semblables pour les corrélations mixtes. On retrouve des exposants similaires pour les lois de puissance ainsi que pour les décroissances exponentielles. Nous n'analyserons pas plus en détail le cas des corrélations mixtes, bien que ceci aurait pu être intéressant, le manque de précision rend assez peu pertinente une étude approfondie de ce cas. Il aurait également pu être intéressant de décomposer les corrélations sur les quatre sous-réseaux, comme cela a été fait dans la section 3.2. Ceci permettrait d'y voir plus clair à propos de certaines situations, cependant cela représente beaucoup de travail et également davantage de graphiques à analyser. Nous avons donc ici préféré essayer de donner une idée globale de la situation plutôt que d'aller trop loin dans le détail.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.13 – Fonctions de corrélation lorsqu'on déplace le dimère de référence vers le coin Ouest du diamant.

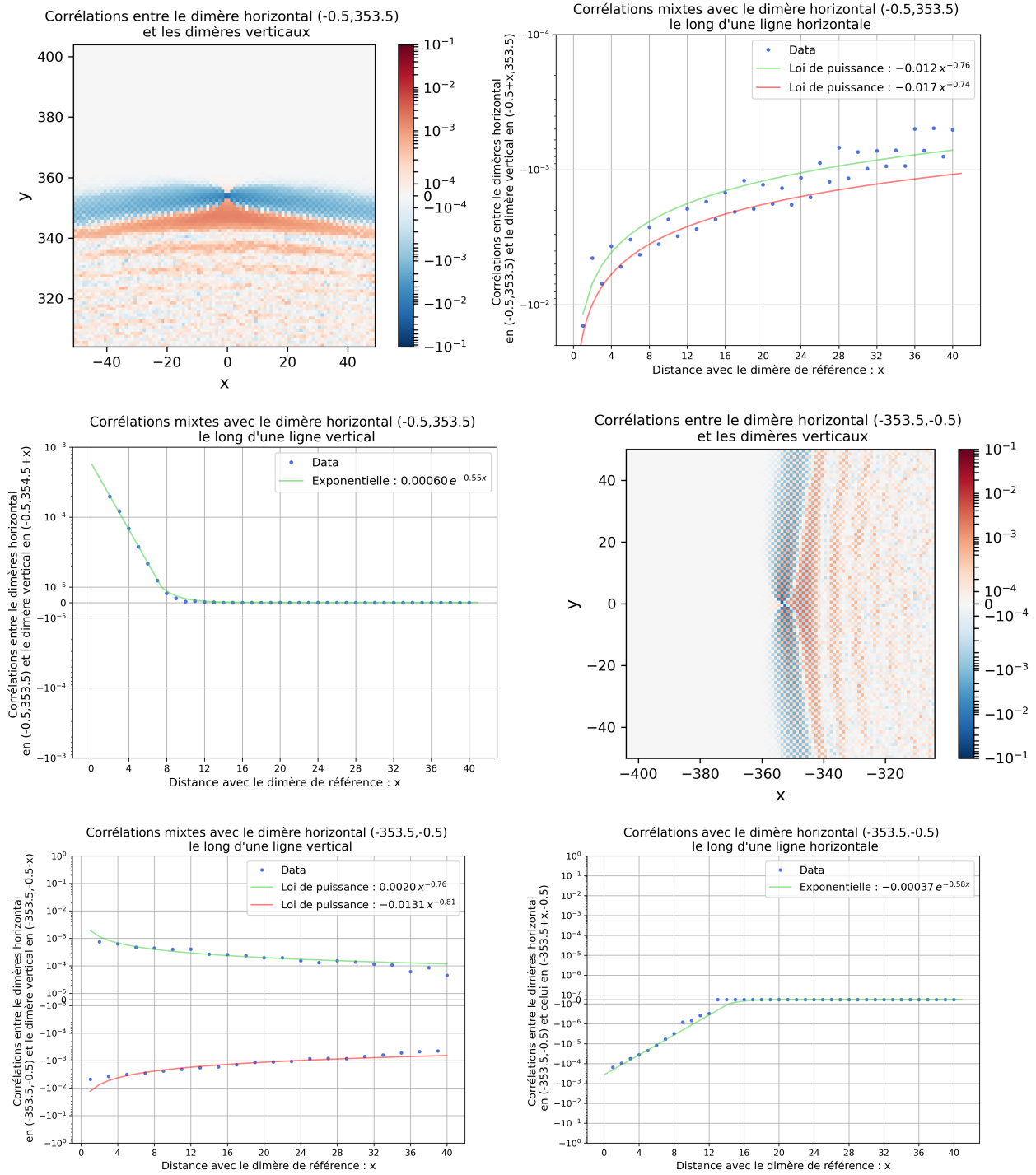


FIGURE 3.14 – Fonctions de corrélation mixtes. Au nord du cercle arctique pour les trois premiers graphiques, à l'ouest pour les trois derniers.

Conclusion

Dans ce document, nous avons étudié différents aspects du diamant aztèque, le cœur de ce modèle étant le phénomène arctique qu'il présente. L'objectif principal de ce travail étant d'une part, de synthétiser certains résultats théoriques majeurs concernant ce modèle, d'autre part, de confronter ces résultats théoriques à des simulations numériques, afin de les vérifier, mais également de tenter d'en comprendre plus en détail leurs réalisations dans des diamants de taille finie.

Dans la seconde partie de ce mémoire, nous avons commencé par introduire quelques notions fondamentales de la théorie des matrices aléatoires, en mettant l'accent sur la compréhension et l'établissement de certaines propriétés majeures de GUE. Nous avons ensuite étudié le lien entre le diamant aztèque, décrit par des particules entrelacées, et le processus GUE-corners du point de vue théorique, avant de passer à une analyse numérique de cette relation.

Nous avons pu constater que le processus GUE-corners donne une très bonne approximation de ce qui se passe à proximité du point de contact entre la courbe arctique et le bord du domaine, et ceci même pour des diamants de taille finie. Cela complète la description en termes de chemins non-intersectants qui, quant à lui, donne une bonne description au milieu de la courbe arctique, entre deux points de contact. Lors de nos analyses numériques, nous avons en particulier regardé les fonctions de corrélation des particules à un et deux points, misent en lien avec les valeurs propres des matrices de GUE. D'abord dans un voisinage du bord, en allant par la suite vers le milieu de la région désordonnée.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons étudié les fonctions de corrélation à deux points entre les dimères horizontaux et verticaux. D'abord du point de vue théorique, dans le plan, les résultats ainsi obtenus nous ont servis de références pour la suite. Et ensuite sur le diamant aztèque, du point de vue numérique. Nous avons constaté lors de notre étude que le réseau carré, dans la limite thermodynamique, était une bonne approximation pour le centre du diamant, et les fonctions de corrélation à cet endroit sont assez bien comprises. Cependant, dès que l'on s'écarte du centre, les fonctions dans le diamant aztèque adoptent des comportements plus compliqués, parfois difficiles à analyser. Dans cette étude, nous avons été limités par notre précision numérique, les corrélations étant un objet sensible, qui peut décroître rapidement, mais avons néanmoins pu extraire certains comportements généraux, en lois de puissance ou exponentielle, suivis par ces fonctions. En particulier dans la région du cercle arctique, où les fonctions adoptent des décroissances moins rapides, différentes analyses ont pu confirmer des comportements assez stables.

Bibliographie

- [1] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (part i). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(2) :111–132, 1992.
- [2] William Jockusch, James Propp, and Peter Shor. Random domino tilings and the arctic circle theorem. *arXiv preprint math/9801068*, 1998.
- [3] Andrei Okounkov. Limit shapes, real and imagined. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 53(2), 2016.
- [4] Jean-Marie Stéphan. Extreme boundary conditions and random tilings. *arXiv preprint arXiv :2003.06339*, 2020.
- [5] Nicolas Allegra, Jérôme Dubail, Jean-Marie Stéphan, and Jacopo Viti. Inhomogeneous field theory inside the arctic circle. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2016(5) :053108, 2016.
- [6] Rodney J Baxter. *Exactly solved models in statistical mechanics*. ACADEMIC PRESS, 1982.
- [7] Jean-François de Kemmeter. Fluctuations et courbes arctiques dans le modèle à 6 vertex. Master’s thesis, Université catholique de Louvain, Juin 2020.
- [8] Kazumasa A Takeuchi and Masaki Sano. Universal fluctuations of growing interfaces : evidence in turbulent liquid crystals. *Physical review letters*, 104(23) :230601, 2010.
- [9] Kazumasa A Takeuchi and Masaki Sano. Evidence for geometry-dependent universal fluctuations of the kardar-parisi-zhang interfaces in liquid-crystal turbulence. *Journal of Statistical Physics*, 147(5) :853–890, 2012.
- [10] Satya Majumdar. Introduction to random matrices theory. <https://www.youtube.com/watch?v=JxLOzjXad-Y&list=PLg--0sBHbqtNjEuaz3DzqjBK0loyjkTws&index=1>.
- [11] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (part ii). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(3) :219–234, 1992.
- [12] Benjamin J. Fleming et Peter J. Forrester. Interlaced particle systems and tilings of the aztec diamond. *Journal of Statistical Physics*, 142(3) :441–459, 2011.
- [13] Filippo Colomo and Andrei G Pronko. The arctic curve of the domain-wall six-vertex model. *Journal of Statistical Physics*, 138(4) :662–700, 2010.
- [14] Henry Cohn, Noam Elkies, and James Propp. Local statistics for random domino tilings of the aztec diamond. *arXiv preprint math/0008243*, 2000.

- [15] Nicolas Orantin. *Du développement topologique des modèles de matrices à la théorie des cordes topologiques : combinatoire de surfaces par la géométrie algébrique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2007.
- [16] Giacomo Livani, Marcel Novaes, and Pierpaolo Vivo. *Introduction to random matrices : theory and practice*, volume 26. Springer, 2018.
- [17] Gernot Akemann, Jinho Baik, and Philippe Di Francesco. *The Oxford handbook of random matrix theory*. Oxford University Press, 2011.
- [18] Teodoro Fields Collin. Random matrix theory. p.10-22.
- [19] G Mahoux and ML Mehta. A method of integration over matrix variables : Iv. *Journal de Physique I*, 1(8) :1093–1108, 1991.
- [20] Percy Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach*, volume 3. American Mathematical Soc., 1999. p103-105.
- [21] Yan V Fyodorov. Introduction to the random matrix theory : Gaussian unitary ensemble and beyond. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 322 :31, 2005.
- [22] Steve Fisk. A very short proof of cauchy’s interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *arXiv preprint math/0502408*, 2005.
- [23] Suk-Geun Hwang. Cauchy’s interlace theorem for eigenvalues of hermitian matrices. *The American Mathematical Monthly*, 111(2) :157–159, 2004.
- [24] Vadim Gorin. Lectures on random tilings. Novembre 2019.
- [25] Eric Nordenstam. *Interlaced particles in tilings and random matrices*. PhD thesis, KTH, 2009.
- [26] Kurt Johansson, Eric Nordenstam, et al. Eigenvalues of gue minors. *Electronic Journal of Probability*, 11 :1342–1371, 2006.
- [27] Sunil Chhita, Kurt Johansson, Benjamin Young, et al. Asymptotic domino statistics in the aztec diamond. *Annals of Applied Probability*, 25(3) :1232–1278, 2015.
- [28] Richard Kenyon. Lectures on dimers. *arXiv preprint arXiv :0910.3129*, 2009.
- [29] Richard Kenyon. An introduction to the dimer model. *arXiv preprint math/0310326*, 2003.
- [30] Philippe Ruelle. Sandpile models in the large. *arXiv preprint arXiv :2102.12508*, 2021.
- [31] Nicolas Allegra. *Critical Properties of Dimers, Spin Chains and Interface Models*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2015.
- [32] Manuela Girotti. Determinantal point processes and random matrix theory in a nutshell—part ii—.
- [33] N Sh Izmailian, VB Priezzhev, Philippe Ruelle, and Chin-Kun Hu. Logarithmic conformal field theory and boundary effects in the dimer model. *Physical review letters*, 95(26) :260602, 2005.
- [34] Pavel Belov and Nicolai Reshetikhin. The two-point correlation function in the six-vertex model. *arXiv preprint arXiv :2012.05182*, 2020.
- [35] Etienne Granet, Louise Budzynski, Jérôme Dubail, and Jesper Lykke Jacobsen. Inhomogeneous gaussian free field inside the interacting arctic curve. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2019(1) :013102, 2019.

- [36] Jacopo Viti, Jean-Marie Stéphan, Jérôme Dubail, and Masudul Haque. Inhomogeneous quenches in a free fermionic chain : Exact results. *EPL (Europhysics Letters)*, 115(4) :40011, 2016.
- [37] Filippo Colomo, Paul Fendley, Andrei Pronko, Nicolai Reshetikhin, Paul Wiegmann, and Paul Zinn-Justin. Statistical mechanics, integrability and combinatorics. *Il Colle di Galileo*, 5(1) :77–81, 2016.

