

École polytechnique de Louvain

Communications optiques en espace libre : reconstruction de profils de turbulence et simulation de performances

Auteur : **VALÉRIAN DOSIMONT**

Promoteur : **CLAUDE OESTGES**

Lecteurs : **LUDO BISSOT, GILLES ORBAN DE XIVRY, FLORIAN
QUATRESOOZ**

Année académique 2024–2025

Master [120] : ingénieur civil électricien

RÉSUMÉ

Les communications optiques en espace libre représentent une technologie prometteuse pour les liens satellite–sol. Leur déploiement reste cependant fortement limité par la turbulence atmosphérique qui dégrade la qualité de la propagation des faisceaux lumineux.

Ce travail présente une étude statistique de profils de turbulence et propose sur cette base une méthode de reconstruction de profils synthétiques. Cette dernière est intégrée dans une chaîne de simulation de propagation par écrans de phase. Afin d’en évaluer l’intérêt pratique, ces profils reconstruits sont utilisés pour tester la fiabilité de scénarios de communication réalistes. Les performances du lien optique sont ensuite évaluées et comparées entre profils mesurés et profils reconstruits.

L’objectif est d’examiner dans quelle mesure des profils simplifiés mais cohérents peuvent représenter de façon réaliste l’impact de la turbulence sur un lien descendant satellite–sol.

Free-space optical communications represent a promising technology for satellite-to-ground links. Their deployment, however, is strongly limited by atmospheric turbulence, which degrades the quality of optical beam propagation.

This work presents a statistical study of turbulence profiles and, on this basis, proposes a method for reconstructing synthetic profiles. The latter is integrated into a phase-screen propagation simulation chain. To assess their practical relevance, these reconstructed profiles are used to test the reliability of realistic communication scenarios. The performance of the optical link is then evaluated and compared between measured and reconstructed profiles.

The aim is to examine to what extent simplified yet consistent profiles can realistically represent the impact of turbulence on a satellite-to-ground downlink.

SOMMAIRE

Résumé	i
Sommaire	ii
1 Introduction	1
2 Cadre théorique	3
3 Étude statistique des profils de turbulence	28
4 Reconstruction de profils de turbulence	43
5 Simulation	51
6 Validation	64
7 Conclusion	68
Références	69
Annexes	iii
Tables des matières	vii

1. INTRODUCTION

Les **communications optiques en espace libre*** pour les liens satellite-sol suscitent un intérêt croissant en raison de leur très large bande passante, de l'absence de licence et d'un potentiel de sécurisation élevé [1]. Leur déploiement à grande échelle se heurte toutefois à une limite physique majeure : la **turbulence atmosphérique**. Les fluctuations de l'indice de réfraction déforment le front d'onde et l'amplitude des faisceaux, générant élargissement et errance du faisceau, scintillation, et aberrations de phase qui dégradent l'énergie collectée au télescope, le couplage en fibre, et in fine les métriques de télécommunications (SNR, BER).

Dans ce contexte, la compréhension, l'étude et la modélisation des turbulences atmosphériques sont essentielles afin d'en quantifier l'impact sur les liens optiques satellite-sol et leurs performances.

L'objectif général de ce travail est double :

- **Caractériser statistiquement** des profils atmosphériques de $C_n^2(z)$ obtenus expérimentalement,
- **Reconstruire artificiellement** des profils fidèles à ces statistiques et évaluer, par simulation numérique et par analyse statistique, leur cohérence avec des profils mesurés authentiques.

L'intérêt de cette démarche est de disposer d'outils permettant de mieux comprendre la structure verticale de la turbulence et son influence sur les performances d'un lien optique. En effet, l'exploitation directe de profils mesurés reste limitée par la disponibilité et le coût des mesures météorologiques notamment par radiosondage. Pouvoir reconstruire des profils réalistes à partir de caractéristiques statistiques constitue donc un moyen efficace d'explorer un vaste ensemble de scénarios atmosphériques, sans dépendre systématiquement de nouvelles mesures.

Ces profils reconstruits sont ensuite comparés à des profils réels grâce à des simulations de propagation numérique et des analyses statistiques. Ainsi, il devient possible d'évaluer la pertinence des méthodes de reconstruction et donc de vérifier leur capacité à reproduire de vrais événements turbulents atmosphériques.

Pour mener à bien cette démarche, ce travail suit une progression allant du cadre théorique aux résultats de simulations, en passant par l'analyse statistique des profils et leur reconstruction. Plus précisément, il se structure comme suit :

Le Chapitre 2 présente le **cadre théorique** nécessaire à ce travail. On y introduit les bases de la turbulence atmosphérique et des spectres de puissance associés, ainsi que les principes de la propagation en espace libre et des faisceaux gaussiens. Sont également introduits les profils de C_n^2 , leurs paramètres intégraux et quelques notions de fibre optique et de polynômes de Zernike.

Le Chapitre 3 est consacré à l'**analyse statistique** du jeu de données. Il met en évidence les principales caractéristiques des profils mesurés, identifie les couches turbulentes dominantes et étudie leurs liens avec des paramètres intégraux tels que la qualité de visibilité ou l'angle isoplanatique.

*Abréges en FSOC en anglais pour *free space optical communications*

Le Chapitre 4 décrit ensuite la démarche de **reconstruction de profils**, qui exploite les distributions statistiques précédemment obtenues. De plus, certaines contraintes sont aussi introduites pour renforcer la cohérence physique des profils reconstruits.

Le Chapitre 5 présente la chaîne de **simulation**, depuis la définition de la grille d'entrée jusqu'à l'introduction de la propagation par écrans de phase. Il inclut également une présentation analytique de l'injection en fibre monomode.

Enfin, le Chapitre 6 rassemble les éléments de **validation**, en confrontant les profils reconstruits aux profils mesurés à travers différents paramètres intégraux et en évaluant leur impact sur les performances de communication.

Enfin, il convient de mentionner que des outils d'intelligence artificielle générative ont été utilisés dans le cadre de ce travail, notamment GitHub Copilot pour l'assistance à l'écriture de fonctions de code (principalement pour la création de figures) et ChatGPT pour la génération de fragments de code, ainsi que pour l'aide à la rédaction et à la relecture de certaines sections.

2. CADRE THÉORIQUE

Ce chapitre vise à établir un socle théorique nécessaire à la compréhension du présent travail. Il a pour objectif de présenter les notions fondamentales ainsi que les outils conceptuels et mathématiques qui serviront de référence pour la suite.

Après (i) la présentation de la structure de l'atmosphère ainsi que sa composition, nous aborderons la théorie (ii) des processus stochastiques et (iii) de la turbulence atmosphérique. Ensuite, (iv) nous développerons les définitions mathématiques relatives à la propagation en espace libre et aux faisceaux gaussiens. Nous présenterons également plus (v) les modèles de profils de turbulence les plus utilisés de la littérature, tels que le modèle d'Hufnagel-Valley. Enfin, (vi) une partie sera consacrée aux fibres optiques, en mettant en évidence leurs propriétés physiques et les paramètres essentiels.

2.1 L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE NEUTRE ET IONISÉE

L'atmosphère neutre terrestre est une couche gazeuse non ionisée s'étendant de la surface de la Terre à plusieurs centaines de kilomètres d'altitude. Elle se divise en deux parties : l'homosphère et l'hétérosphère. L'homosphère, où le mélange gazeux est considéré parfait, s'étend jusqu'à environ 100 km. À partir de cette altitude se situe l'hétérosphère où la concentration gazeuse décroît avec l'altitude en fonction de la masse du composé chimique. Dans le cadre de ce travail, nous ne considérerons que l'impact de l'homosphère sur les propagations optiques en espace libre. C'est donc à cette dernière que nous nous référerons dans la suite de ce travail en parlant de l'atmosphère.

L'atmosphère est composée majoritairement d'azote et d'oxygène abondant respectivement à 78,08% et 20,95% de sa masse totale. La concentration en eau varie entre 0,1% et 2,8%.

L'atmosphère neutre (homosphère et hétérosphère) est aussi caractérisée par une division en une succession de couches. Ces couches sont définies en fonction de l'évolution de la température avec l'altitude. Selon [2], sa structure est la suivante :

- **La troposphère** : Cette couche est celle dans laquelle nous évoluons, s'étendant de la surface du globe à environ 8 km aux pôles et à 18 km à l'équateur. À cause de sa proximité avec la Terre, elle concentre environ 85% de la masse totale de l'atmosphère. C'est dans cette couche que se concentre l'essentiel des turbulences dues aux masses d'air. Sa température diminue avec l'altitude d'environ 6 K par kilomètre.
- **La stratosphère** : Cette couche s'étend de la tropopause — la limite supérieure de la troposphère — à environ 50 km d'altitude. Elle est caractérisée par une température augmentant avec l'altitude à cause de l'absorption des rayons ultraviolets par la couche d'ozone. En effet, c'est dans la stratosphère que se situe environ 90% de la couche d'ozone (O_3) qui nous protège des rayonnements solaires.
- **La mésosphère** : La mésosphère s'étend de la stratopause jusqu'à environ 90km, altitude de la mésopause. Comme dans la troposphère, la température y est décroissante avec des

minima atteignant localement parfois 100 K dans les régions polaires. À cause de la faible densité gazeuse, la température subit de manière accrue l'impact du cycle jour-nuit et de l'activité solaire. Dans la partie haute de la mésosphère, certains atomes commencent à être ionisés, marquant le début de l'ionosphère.

- **La thermosphère** : À partir de la mésopause s'étend la thermosphère jusqu'à une altitude d'environ 600 km. Selon [3], la température y augmente significativement à cause du rayonnement solaire. Cette limite dépend fortement du cycle jour-nuit, variant ainsi de plusieurs centaines de kilomètres.
- **L'exosphère** : Cette couche s'étend indéfiniment à partir de la thermopause (aussi appelée exobase), c'est-à-dire environ 600 km. Le densité y est si faible que l'on considère les collisions entre atomes négligeables. C'est ici qu'évoluent les satellites artificiels.

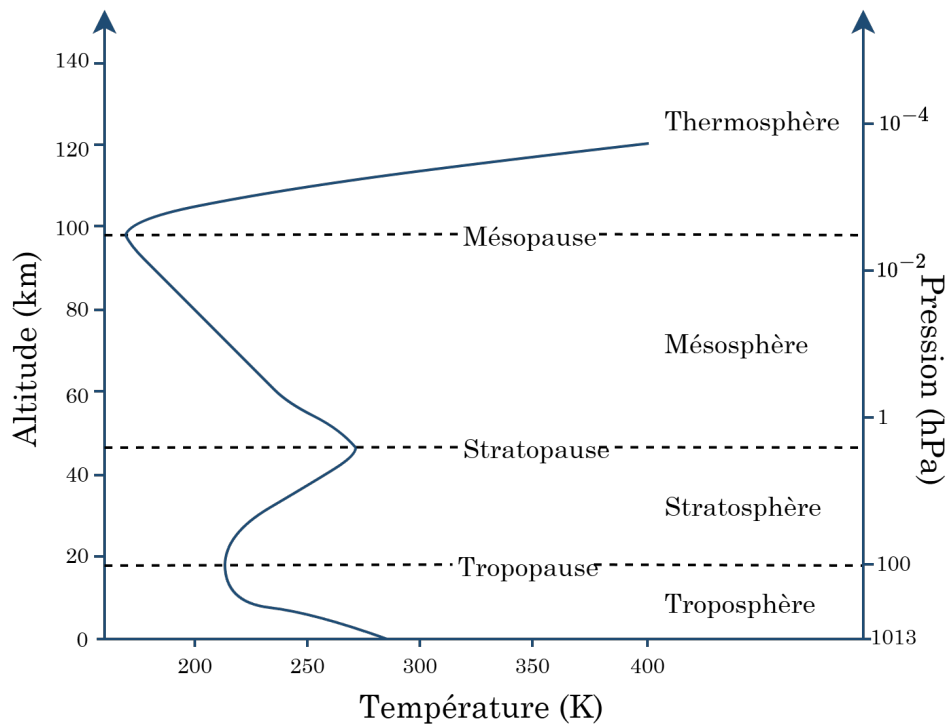


Fig. 1. – Profil moyen de la température au sein de l'atmosphère en fonction de la température (adapté de [2])

- **Autres couches** : Définissons aussi trois autres couches telles qu'expliqué dans [4]. La couche superficielle est la couche se situant en-dessous de 0.5 km d'altitude. Elle contient le plus d'échange d'énergie à cause de sa proximité avec le sol. Au-dessus, de 0.5 km à 2 km se trouvent la couche limite qui correspond à la région de l'atmosphère directement influencée par le sol. Enfin, au-dessus de la couche limite se situe de l'atmosphère libre, où l'influence du sol est négligeable.
- **L'ionosphère** : Comme l'atmosphère terrestre est soumise aux rayonnements solaires, une partie des atomes la composant sont ionisés ; ils forment donc un plasma. L'ionosphère est la partie de l'atmosphère neutre étant ionisée. Cependant, la concentration en particules ionisées augmentant avec l'altitude, l'on considère que l'ionosphère s'étend à partir d'environ 60 km d'altitude, là où la concentration en ions n'est plus négligeable. Au-delà de cette limite basse, l'ionosphère se découpe en différentes couches en fonction de la concentration en ions et donc en fonction du degré de pénétration des rayonnements solaires et cosmiques :

les concentrations ioniques ainsi que les limites en altitudes sont donc fortement sujettes à l'activité solaire ainsi qu'au cycle jour-nuit. De part sa nature chargée, l'ionosphère pose notamment des problèmes d'atténuation, de réfraction et de réflexion sur les ondes radio-électriques [2].

2.2 LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Cette sous-section se fonde sur [3] et [4].

Avant d'aller plus loin, il convient de rappeler quelques points de théorie concernant les processus stochastiques. En effet, les turbulences atmosphériques sont décrites comme des processus aléatoires en temps et en position.

Une fonction $x(t)$ est un processus stochastique si elle prend une valeur aléatoire pour chaque valeur t . Pour un processus stochastique $x(t)$:

- **La moyenne** (ou espérance) est définie par :

$$\langle x(t) \rangle = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x, t) dx \quad (1)$$

où $p_x(x, t)$ est la fonction de densité de probabilité du processus à un instant t .

- **La variance** est définie par :

$$\sigma_x^2(t) = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \langle x^2(t) \rangle - m_x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 p_x(x, t) dx \quad (2)$$

- **L'autocovariance** (ou simplement covariance) est définie par :

$$C_x(t_1, t_2) = \langle [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]^* \rangle \quad (3)$$

avec t_1 et t_2 , deux instants distincts. Notons aussi que $C_x(t, t) = \sigma_x^2(t)$.

- **L'autocorrélation** (ou simplement corrélation) est définie par :

$$R_x(t_1, t_2) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle \quad (4)$$

Un processus stochastique est dit **stationnaire au sens faible** si :

- sa moyenne est indépendante du temps : $m_x(t) = m_x$
- sa covariance ne dépend que de la différence $\tau = t_1 - t_2$ telle que :

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(t_1 - t_2, 0) = C_x(\tau) = \langle [x(t + \tau) - m_x][x(t) - m_x]^* \rangle \quad (5)$$

Un processus stochastique peut être séparé en deux parties, une stationnaire (la moyenne $m_x(t)$) et une variable ($x'(t)$) :

$$x(t) = m_x(t) + x'(t) \quad (6)$$

Dans le cas d'un processus stationnaire au sens faible, son expression se réduit donc à

$$x(t) = m_x + x'(t) \quad (7)$$

Cependant, les événements atmosphériques ne peuvent pas être décrits parfaitement avec un processus stochastique au sens faible. En effet, certains d'entre eux ont une moyenne constante

seulement sur un court instant. Pour de tels processus, avec $\langle x'(t) \rangle = 0$, nous définissons la **fonction de structure** :

$$\begin{aligned} D_x(t_1, t_2) &= \langle [x(t_1) - x(t_2)]^2 \rangle \\ &= \langle [m_x(t_1) - x'(t_1) - m_x(t_2) + x'(t_2)]^2 \rangle \\ &= [m_x(t_1) - m_x(t_2)]^2 + \langle [x'(t_2) - x'(t_1)]^2 \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

Si la moyenne de $x(t)$ varie lentement, la différence entre deux moyennes proches est nulle telle que :

$$D_x(t_1, t_2) \approx \langle [x'(t_2) - x'(t_1)]^2 \rangle \quad (9)$$

Un tel processus stochastique où $\langle x(t + \tau) - x(t) \rangle$ est indépendant de t est dit **stationnaire par incréments**. En effet, $m_x(t)$ varie lentement et linéairement avec le temps.

Si le processus est stationnaire*, alors la fonction de structure se réduit à :

$$\begin{aligned} D_x(\tau) &= \langle [x(t + \tau) - x(t)]^2 \rangle \\ &= 2[C_x(0) - C_x(\tau)] \end{aligned} \quad (10)$$

Pour un processus stochastique stationnaire, la **densité spectrale de puissance** (DSP) est définie comme :

$$\Gamma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (11)$$

avec ω , la fréquence angulaire. Similairement, nous avons :

$$C_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\tau) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (12)$$

Un **champ stochastique** est un processus stochastique pour un vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$ et un instant t . En outre, grâce à l'hypothèse des turbulences gelées, nous partons du principe que la variation temporelle du champ est causée par la translation de la dépendance spatiale [3]. Nous pouvons ainsi négliger la dépendance temporelle pour ne considérer que la spatiale.

Un champ stochastique $x(\vec{r})$ est dit **homogène statistiquement** si sa moyenne est constante, peu importe la position† :

$$\langle x(\vec{r}) \rangle = \langle x \rangle = m_x \quad (13)$$

Alors, l'autocovariance s'écrit :

$$C_x(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle [x(\vec{r}_1) - m_x(\vec{r}_2)][x(\vec{r}_2) - m_x(\vec{r}_2)]^* \rangle \quad (14)$$

se réduisant à :

$$C_x(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, 0) = C_x(\vec{\rho}) = \langle [x(\vec{r} + \vec{\rho}) - m_x][x(\vec{r}) - m_x]^* \rangle \quad (15)$$

avec la différence de position $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

*Cela peut être vu comme un cas particulier de stationnarité par incréments.

†Il s'agit du pendant spatial de la stationnarité temporelle.

Grâce à un raisonnement analogue à l'Eq. 9, nous pouvons aussi montrer qu'un champ est **homogène statistiquement et localement***. Lorsqu'il l'est, la fonction de structure se réduit à :

$$\begin{aligned} D_x(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &\approx \langle (x'(\vec{r}_2) - x'(\vec{r}_1))^2 \rangle \\ &= D_x(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, 0) = D_x(\vec{\rho}) = \langle (x(\vec{r} + \vec{\rho}) - x(\vec{r}))^2 \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

Si le champ est statistiquement homogène, la fonction de structure peut s'exprimer comme :

$$D_x(\vec{\rho}) = 2(C_x(0) - C_x(\vec{\rho})) \quad (17)$$

Un champ est dit **isotrope** si la dépendance $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ se réduit uniquement à une dépendance à la distance absolue $\rho = |\vec{\rho}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

La **densité spectrale de puissance** en trois dimensions est définie par :

$$\Gamma_x(\vec{\kappa}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} C_x(\vec{\rho}) e^{-j\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}} d^3\vec{\rho} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} C_x(\vec{\rho}) \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}) d^3\vec{\rho} \quad (18)$$

avec $\vec{\kappa} = (k_x, k_y, k_z)$, le vecteur nombre d'onde (en rad/s). Similairement, nous avons :

$$C_x(\vec{\rho}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\vec{\kappa}) e^{j\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}} d^3\vec{\kappa} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\vec{\kappa}) \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho}) d^3\vec{\kappa} \quad (19)$$

Dans le cas d'un champ stochastique réel statistiquement et localement homogène, la constante de structure peut être liée à la densité spectrale de puissance :

$$D_x(\vec{\rho}) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\vec{\kappa}) (1 - \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho})) d^3\vec{\kappa} \quad (20)$$

Pour un même champ, mais en outre isotrope :

$$D_x(\rho) = 8\pi \int_0^{\infty} \kappa^2 \Gamma_x(\kappa) \left(1 - \frac{\sin(\kappa\rho)}{\kappa\rho}\right) d\kappa \quad (21)$$

Similairement, nous avons, pour le même champ :

$$\Gamma_x(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2 \kappa^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\kappa\rho)}{\kappa\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} D_x(\rho) \right) d\rho \quad (22)$$

2.3 LES TURBULENCES ATMOSPHÉRIQUES

Cette section introduit les différents concepts liés à la turbulence atmosphérique tels que la cascade d'énergie, les constantes de structures et les densités spectrales de puissance de turbulence. Dans ce travail, nous ne considérons pas l'impact de l'absorption, de la diffusion par des molécules ou des aérosols.

Cette sous-section se fonde sur [3] et [4].

*Il s'agit de l'équivalent pour les champs stochastiques de la stationnarité par incréments.

2.3.1 LA THÉORIE DE LA CASCADE D'ÉNERGIE

L'atmosphère peut être considérée comme un fluide visqueux se décomposant en deux types de mouvements : laminaire et turbulent. Dans la première situation, la vitesse d'écoulement est uniforme ou légèrement variable. Dans le cas d'un écoulement turbulent, la vitesse n'est plus uniforme et varie à cause de mélange dynamique du fluide, créant ainsi des tourbillons turbulents aléatoires. Un moyen de mesurer l'état de turbulence d'un fluide est d'utiliser le **nombre de Reynolds** (Re) :

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \quad (23)$$

avec U la vitesse du fluide (en m/s), l la dimension de l'écoulement (en m) et ν la viscosité cinématique (en m/s²). Passé une valeur critique dépendant des caractéristiques de l'écoulement, le fluide est considéré comme étant turbulent. Cette valeur critique, déterminée expérimentalement, est de l'ordre de 2000 à 2100. À titre d'exemple, le nombre de Reynolds, dans l'atmosphère, est de 10^6 à 10^8 [4].

Les turbulences dans l'atmosphère couvrent un grand spectre de longueur d'échelles. Le transfert d'énergie entre les turbulences de différentes tailles est décrit par la **théorie de la cascade d'énergie** (ou cascade de Richardson), illustrée à la Fig. 2*.

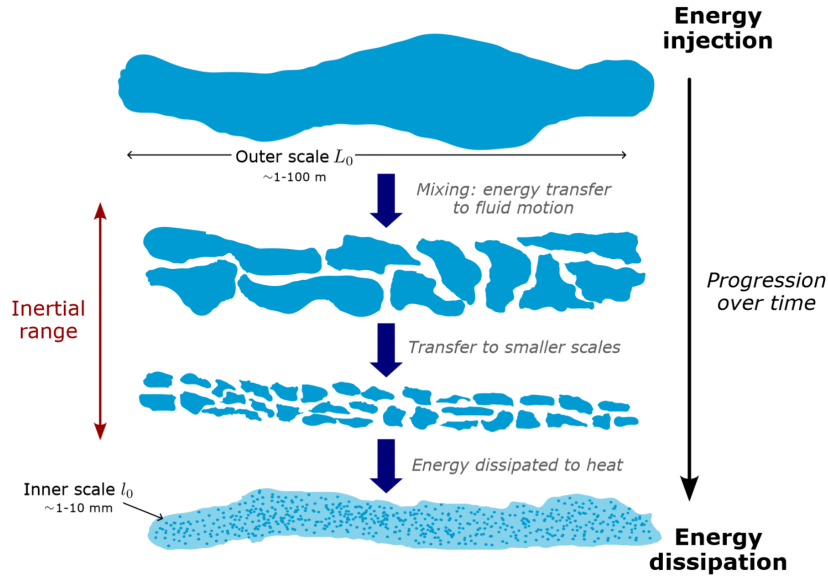


Fig. 2. – Théorie de la cascade d'énergie (image issue de [4])

Les sources d'énergie de grande taille surviennent lors de cisaillement du vent[†] ou de mouvement de convection. Selon la théorie de la cascade d'énergie, une fois que le vent atteint une vitesse liée au nombre de Reynolds critique, des tourbillons turbulents apparaissent. La taille moyenne des plus grands est appelée **échelle externe**, L_0 [5]. Sous l'effet de forces inertielles, ces derniers se décomposent en tourbillons de plus en plus petits jusqu'à atteindre une taille l_0 , appelée **échelle interne**. Les tourbillons compris entre L_0 et l_0 forment la **région inertielle**. En-dessous de l_0 , les tourbillons se dissipent sous forme de chaleur dans la région dite de dissipation visqueuse. Des valeurs typiques pour L_0 vont de quelques mètres jusqu'à même plusieurs centaines de

*Notons que l'échelle verticale ne représente *pas* l'altitude mais bien le temps.

[†]Différence de vitesse ou de direction du vent à deux points proches de l'atmosphère

mètres en fonction de l'altitude. Quant à l_0 , elles sont de l'ordre de quelques millimètres proche du sol jusqu'à quelques centimètres dans la troposphère et la stratosphère.

2.3.2 LA FLUCTUATION DE LA VITESSE DU VENT

Kolmogorov a montré que la fonction de structure de la vitesse du vent suivait une loi puissance deux tiers, mais uniquement dans la région inertielle. Pour la région de dissipation visqueuse, elle suit une loi carrée de sorte que les deux expressions soient identiques en $\rho = l_0$. La fonction de structure s'exprime comme suit :

$$D_v(\rho) = \langle [v(\vec{r} + \vec{\rho}) - v(\vec{r})]^2 \rangle = \begin{cases} C_v^2 \rho^{\frac{2}{3}} & \text{si } l_0 \ll \rho \ll L_0 \\ C_v^2 l_0^{-\frac{4}{3}} \rho & \text{si } 0 \leq \rho \ll l_0 \end{cases} \quad (24)$$

avec V_1 et V_2 , les vitesses du vent à deux points de l'espace séparés par une distance ρ et C_v^2 , (en $m^{\frac{4}{3}}/s^2$), la **constante de structure de la vitesse du vent**. Cette dernière est liée à ε , le taux de dissipation énergétique moyen tel que $C_v^2 \propto \varepsilon^{\frac{2}{3}}$. L'échelle interne lui est aussi proportionnelle ainsi qu'à la viscosité ν : $l_0 \propto \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$; de puissantes turbulences ont tendance à donner une petite échelle interne et inversement.

Grâce à l'Eq. 22, en utilisant cette fonction de structure de la vitesse, nous pouvons en tirer la densité spectrale de puissance de Kolmogorov :

$$\Gamma_v(\kappa) = 0,333 C_v^2 \kappa^{-\frac{11}{3}} \quad (25)$$

2.3.3 LA FLUCTUATION DE LA TEMPÉRATURE

Nous pouvons appliquer le raisonnement de la fluctuation de la vitesse du vent sur des scalaires passifs conservateurs comme la température absolue*. Il s'agit ici d'étudier les fluctuations de la température potentielle. Similairement au point précédent, nous pouvons exprimer la fonction de structure de la température :

$$D_T(\rho) = \langle [T(\vec{r} + \vec{\rho}) - T(\vec{r})]^2 \rangle = \begin{cases} C_T^2 \rho^{\frac{2}{3}} & \text{si } l_0 \ll \rho \ll L_0 \\ C_T^2 l_0^{-\frac{4}{3}} \rho & \text{si } 0 \leq \rho \ll l_0 \end{cases} \quad (27)$$

avec T_1 et T_2 , les températures à deux points de l'espace séparés par une distance ρ et C_T^2 , la **constante de structure de la température**.

Similairement à l'Eq. 25, nous obtenons :

$$\Gamma_T(\kappa) = 0,333 C_T^2 \kappa^{-\frac{11}{3}} \quad (28)$$

* Cette dernière est liée à la température T :

$$\theta_P = T + \alpha_a z \quad (26)$$

avec α_a le taux adiabatique de décroissance (en K/km) et z l'altitude (en km). Cette température potentielle peut être remplacée par la température dans le cas de petits écarts verticaux, ce qui est le cas ici.

2.3.4 LA FLUCTUATION DE L'INDICE DE RÉFRACTION

L'indice de réfraction est un paramètre absolument central dans l'étude des propagations optiques. Lui aussi est considéré comme un champ stochastique. En effet, comme il dépend de la température et de la pression, la variation de cette dernière couplée à un mélange turbulent aléatoire introduit le caractère stochastique de l'indice de réfraction. Ce dernier s'exprime comme suit :

$$n(\vec{r}, t) = m_n(\vec{r}, t) + n'(\vec{r}, t) \quad (29)$$

avec $m_n(\vec{r}, t) = \langle n(\vec{r}, t) \rangle \approx 1$, la moyenne de l'indice de réfraction et $n'(\vec{r}, t)$, la partie variable du champ (de moyenne nulle). Grâce à l'hypothèse de l'atmosphère gelée, nous pouvons nous affranchir de la dépendance temporelle. L'expression se réduit donc à :

$$n(\vec{r}) = 1 + n'(\vec{r}) \quad (30)$$

Pour des faisceaux optiques, nous pouvons exprimer l'indice de réfraction en fonction de la température et de la pression [3, p. 64] :

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= 1 + 77,6 \cdot 10^{-6} \left(1 + \frac{7,52 \cdot 10^{-3}}{\lambda^2} \right) \frac{P(\vec{r})}{T(\vec{r})} \\ &\approx 1 + 79 \cdot 10^{-6} \frac{P(\vec{r})}{T(\vec{r})} \end{aligned} \quad (31)$$

avec λ , la longueur d'onde (en μm), P , la pression (en mbar) et T , la température (en K). En considérant une longueur d'onde aux alentours de $0,5 \mu\text{m}$ (valeur qui ne variera que peu), nous pouvons obtenir l'approximation de l'Eq. 31. Comme la pression ne varie que très peu avec la position, c'est avant tout la température qui a un impact déterminant sur l'indice de réfraction à cette longueur d'onde.

Pour des turbulences statistiquement homogènes et isotropes, nous pouvons, grâce à l'Eq. 17, écrire la fonction de structure de l'indice de réfraction :

$$D_n(\rho) = 2(C_n(0) - C_n(\rho)) = \begin{cases} C_n^2 \rho^{\frac{2}{3}} & \text{si } l_0 \ll \rho \ll L_0 \\ C_n^2 l_0^{-\frac{4}{3}} \rho & \text{si } 0 \leq \rho \ll l_0 \end{cases} \quad (32)$$

avec C_n^2 , la **constance de structure de l'indice de réfraction** en $m^{-\frac{2}{3}}$.

Nous pouvons ensuite développer la fonction de structure de l'indice de réfraction afin de la lier à celle de la température :

$$\begin{aligned}
D_n(\vec{\rho}) &= \langle (n(\vec{r} + \vec{\rho}) - n(\vec{r}))^2 \rangle \\
&\downarrow \text{Eq. 31} \\
&= (79 \cdot 10^{-6})^2 \langle \left[\frac{P(\vec{r} + \vec{\rho})}{T(\vec{r} + \vec{\rho})} - \frac{P(\vec{r})}{T(\vec{r})} \right]^2 \rangle \\
&\downarrow \text{Pression constante : } P(\vec{r} + \vec{\rho}) = P(\vec{r}) = P \\
&= (79 \cdot 10^{-6} \cdot P)^2 \langle \left[\frac{1}{T(\vec{r} + \vec{\rho})} - \frac{1}{T(\vec{r})} \right]^2 \rangle = (79 \cdot 10^{-6} \cdot P)^2 \langle \left[\frac{T(\vec{r}) - T(\vec{r} + \vec{\rho})}{T(\vec{r} + \vec{\rho})T(\vec{r})} \right]^2 \rangle \\
&\downarrow \text{Pour de petits } \vec{r}, \quad T(\vec{r} + \vec{\rho})T(\vec{r}) \approx T^2 \\
&= (79 \cdot 10^{-6} \cdot P \cdot T^{-2})^2 \langle [T(\vec{r}) - T(\vec{r} + \vec{\rho})]^2 \rangle = (79 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{T^2})^2 D_T(\vec{\rho})
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi :

$$D_n(\vec{\rho}) = \left(79 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{T^2} \right)^2 D_T(\vec{\rho}) \quad (33)$$

Dans la région inertielle, comme D_n et D_T évoluent selon $\rho^{\frac{4}{3}}$, nous pouvons réécrire l'expression :

$$C_n^2 = \left(79 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{T^2} \right)^2 C_T^2 \quad (34)$$

Alternativement, de la définition de $D_n(\vec{\rho})$ et de l'Eq. 32, nous avons :

$$C_n^2 = \frac{\langle (n(\vec{r} + \vec{\rho}) - n(\vec{r}))^2 \rangle}{\rho^{2/3}} \quad (35)$$

Grâce à des mesures effectuées par radiosondage, nous pouvons mesurer la pression et la température, et donc en déduire la constante de structure de l'indice de réfraction C_n^2 sans pour autant avoir directement accès à sa mesure. Le C_n^2 représente l'intensité des fluctuations de l'indice de réfraction. Comme nous le verrons plus loin, le C_n^2 varie avec l'altitude et peut être décrit avec différents modèles comme par exemple celui de **Hufnagel-Valley 5/7** (voir Chapitre 2.5.1), le plus utilisé. Lors d'épisodes de fortes turbulences, le C_n^2 peut valoir jusqu'à $10^{-13} m^{-\frac{2}{3}}$ principalement à de faibles altitudes tandis qu'en cas de faibles turbulences, il peut valoir $10^{-17} m^{-\frac{2}{3}}$ plus haut dans l'atmosphère. Les profils de C_n^2 sont introduits dans le Chapitre 2.5.

2.3.5 LA DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

Dans la région inertielle, nous pouvons calculer pour l'indice de réfraction la densité spectrale de puissance de Kolmogorov associée comme nous l'avons fait pour la vitesse du vent et la température. Nous obtenons :

$$\Gamma_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-\frac{11}{3}} \text{ pour } \frac{2\pi}{L_0} \ll \kappa \ll \frac{2\pi}{l_0} \quad (36)$$

avec κ , la fréquence spatiale angulaire. Cependant, cette densité spectrale de puissance n'est valable que dans la région inertielle. Pour l'utiliser avec n'importe quel nombre d'onde, les échelles externes et internes sont fixées respectivement à l'infini et à zéro. Mais cette méthode n'est pas optimale car elle peut mener à des intégrales divergentes dans certains cas. Il convient donc d'étendre la validité de cette expression à des valeurs de κ en dehors de la région inertielle.

LA DSP DE TATARSKII

Pour la considération des fréquences spatiales hautes, Tatarskii a proposé une modification de la DSP de Kolmogorov en introduisant une fonction gaussienne décroissante à haute fréquence, bornant ainsi la DSP :

$$\Gamma_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-\frac{11}{3}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} \text{ pour } \frac{2\pi}{L_0} \ll \kappa \quad (37)$$

avec $\kappa_m = \frac{5,92}{l_0}$ afin de conserver la continuité. Cette DSP possède une singularité en $\kappa = 0$, ce qui nous empêche de calculer la covariance $C_n(\rho)$.

LA DSP DE VON KARMAN MODIFIÉE

En utilisant la DSP de von Karman, créant ainsi une borne dépendant de L_0 pour les fréquences spatiales faibles, nous pouvons nous affranchir de cette singularité à l'origine :

$$\Gamma_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-\frac{11}{6}} \text{ pour } 0 \leq \kappa \leq \frac{2\pi}{l_0} \quad (38)$$

avec $\kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}$. Pour de grandes valeurs de $\kappa \gg \kappa_0$, cette DSP suit celle de Kolmogorov.

En combinant cette expression avec la DSP de Tatarskii, nous obtenons une expression où la turbulence est considérée comme statistiquement homogène et isotrope sur l'entière du spectre des fréquences spatiales :

$$\Gamma_n(\kappa) = \begin{cases} 0,033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-\frac{11}{6}} & \text{pour } 0 \leq \kappa \leq \frac{2\pi}{l_0} \\ 0,033 C_n^2 (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-\frac{11}{6}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) & \text{pour } 0 \leq \kappa \leq \infty \end{cases} \quad (39)$$

LA DSP ATMOSPHÉRIQUE MODIFIÉE

Les modèles évoqués précédemment sont tous valables physiquement dans la région inertielle mais pas en dehors où les ajouts et modifications faits ne le sont pas. D'autres modèles de DSP existent comme celle dite « atmosphérique modifiée » qui prend en compte la bosse observée à haute fréquence comme visible sur la Fig. 3. Son expression est issue d'une approximation analytique :

$$\Gamma_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \left[1 + 1,802 \left(\frac{\kappa}{\kappa_l} \right) - 0,254 \left(\frac{\kappa}{\kappa_l} \right)^{\frac{7}{6}} \right] \frac{\exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_l^2}\right)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{\frac{11}{6}}} \quad (40)$$

avec $\kappa_l = \frac{3,3}{l_0}$ et pour $0 \leq \kappa \leq \infty$.

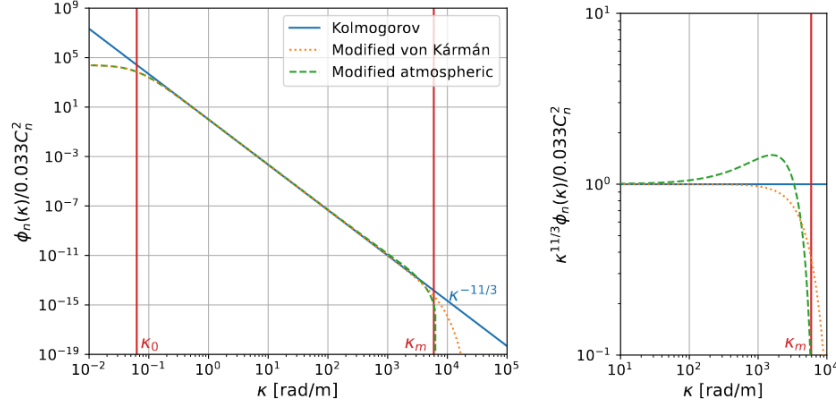


Fig. 3. – Densités spectrales de puissance de Kolmogorov, von Karman modifiée et atmosphérique modifiée (figure issue de [4])

2.4 LA PROPAGATION EN ESPACE LIBRE

Cette section a pour but de présenter au lecteur les outils mathématiques nécessaires à la propagation optique en espace libre. Depuis les équations de Maxwell sont dérivées différentes formules de diffraction. Le faisceau gaussien y est aussi présenté.

2.4.1 L'ÉQUATION D'HELMHOLTZ

Avant tout, il convient de dériver l'équation d'Helmholtz des équations de Maxwell [5]. Pour rappel, les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent, sous forme locale, comme suit* :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (43)$$

avec $\vec{E}(\vec{r}, t)$, le champ électrique, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, le champ magnétique, ε_0 , la permittivité diélectrique, μ_0 , la perméabilité électrique et $\vec{j}$, le vecteur de la densité de courant. Dans le cas de propagation de faisceau optique au travers un milieu linéaire, isotrope, homogène, non dispersif et diélectrique sans aucun courant ni charge, nous avons $\varepsilon = \text{scalaire}$, $\mu = \mu_0$, $\rho = 0$ (densité de charge) et $\vec{j} = \vec{0}$ [5].

Avec ces considérations et en prenant le rotationnel de l'Eq. 42, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \quad (44)$$

En insérant l'Eq. 43, nous en dérivons :

* Avec $\vec{\nabla}$, l'opérateur nabla défini en coordonnées cartésiennes comme étant :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (45)$$

Grâce à l'identité* $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t)$ et à l'équation de Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon = 0$, nous obtenons :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (47)$$

Avec l'opérateur laplacien défini en coordonnées cartésiennes, nous obtenons six équations identiques non couplées :

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = 0 \quad (48)$$

avec $\vec{U}(\vec{r}, t)$, une des composantes scalaires du champ électrique.

Nous pouvons ensuite exprimer l'indice de réfraction en fonction de la permittivité diélectrique avec $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} = \sqrt{\varepsilon_r}$ et la célérité avec $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) U(\vec{r}, t) = 0 \quad (49)$$

Les champs électriques et magnétiques possédant une dépendance temporelle harmonique $\exp(-j2\pi ft)$, l'équation s'exprime comme suit :

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \left(\frac{2\pi n f}{c} \right)^2 \right) U(\vec{r}, t) = 0 \quad (50)$$

Enfin, la longueur d'onde et le nombre d'onde s'exprimant comme $\lambda = 2\pi/f$ et $k = 2\pi/\lambda$, nous obtenons **l'équation d'Helmholtz** :

$$(\vec{\nabla}^2 - k^2 n^2) U(\vec{r}, t) = 0 \quad (51)$$

Pour la suite, nous nous affranchirons de la dépendance temporelle étant donné qu'elle est la même pour toutes les solutions. Aussi, $U(\vec{r})$ est défini comme le phaseur du champ optique en $\sqrt{\text{W}/\text{m}^2}$ de sorte que l'éclairement énergétique† $E_e = |U(\vec{r})|^2$ ait comme unité le W/m^2 [5].

2.4.2 LES DIFFRACTIONS DE FRESNEL ET DE FRAUNHOFER

Grâce au théorème de Green, nous pouvons résoudre l'équation d'Helmholtz‡ [6]. Nous obtenons la valeur du champ U en un point M :

* Avec $\vec{\nabla}^2$, l'opérateur laplacien défini comme étant l'application du gradient et de la divergence successivement. Il s'exprime comme suit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (46)$$

† ou irradiance, et souvent appelé *intensity* en anglais

‡ Voir Chapitre A

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\oint\oint_S \frac{e^{jkr}}{r} \vec{\nabla} U \cdot \overrightarrow{dS} - \oint\oint_S U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \cdot \overrightarrow{dS} \right] \quad (52)$$

avec S , une surface fermée arbitraire contenant le point P . Cette expression est connue sous le nom de **théorème intégral de Kirchhoff**.

Définissons maintenant une onde sphérique de source ponctuelle s comme décrit sur la Fig. 4 :

$$U_s(\rho, t) = \frac{u_0}{\rho} e^{j(k\rho - \omega t)} = U(\rho) e^{-j\omega t} \quad (53)$$

avec ρ , la distance depuis la source et $U(\rho) = U(\rho, t = 0)$, la dépendance spatiale complexe.

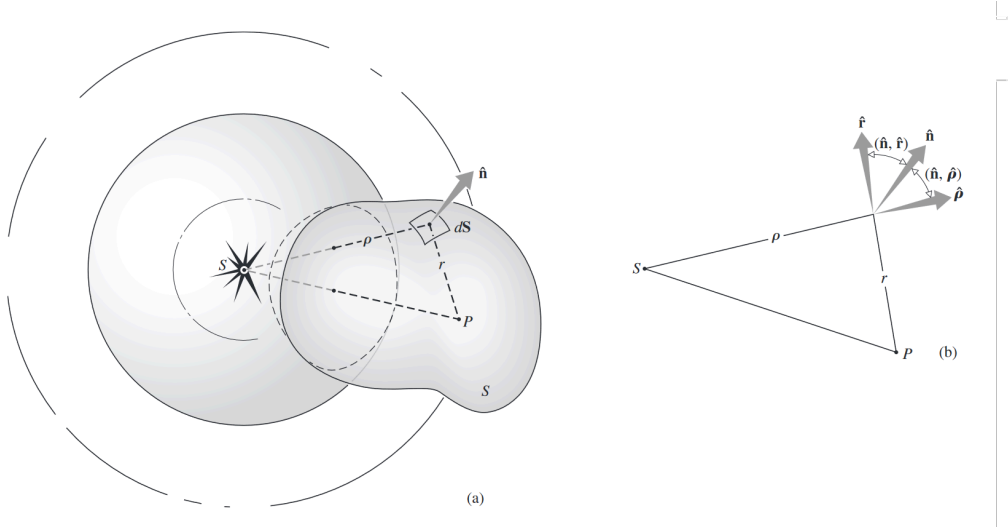


Fig. 4. – Onde sphérique de source ponctuelle s (image issue de [6])

En remplaçant $U(\rho)$ dans l'Eq. 52, nous obtenons, en coordonnées cylindriques :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\oint\oint_S \frac{e^{jkr}}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_0}{\rho} e^{jk\rho} \right) \cos(\hat{n}, \hat{\rho}) dS - \oint\oint_S \frac{u_0}{\rho} e^{jk\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \cos(\hat{n}, \hat{r}) dS \right] \quad (54)$$

avec $\overrightarrow{dS} = \hat{n} dS$, $\hat{n}$, $\hat{r}$ et $\hat{\rho}$, des vecteurs unitaires comme illustré sur la Fig. 4(b). Notons aussi que :

$$\vec{\nabla} U(\rho) = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_0}{\rho} e^{jk\rho} \right) \quad (55)$$

$$\hat{\rho} \cdot \overrightarrow{dS} = \hat{\rho} \cdot \hat{n} dS = \cos(\hat{n}, \hat{\rho}) \quad (56)$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \quad (57)$$

$$\hat{r} \cdot \overrightarrow{dS} = \hat{r} \cdot \hat{n} dS = \cos(\hat{n}, \hat{r}) \quad (58)$$

avec $(\hat{n}, \hat{\rho})$ et $(\hat{n}, \hat{r})$, les angles entre les vecteurs concernés tel que définis sur la Fig. 4(b).

En outre, certains termes peuvent être simplifiés :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) = e^{jk\rho} \left(\frac{jk}{\rho} - \frac{2}{\rho^2} \right) \approx \frac{jk}{\rho} e^{jk\rho} \quad (59)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) = e^{jkr} \left(\frac{jk}{r} - \frac{2}{r^2} \right) \approx \frac{jk}{r} e^{jkr} \quad (60)$$

si $\rho \gg \lambda$ et $r \gg \lambda$, ce qui est le cas dans le domaine optique [6].

Avec ces simplifications, nous obtenons la **formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff** :

$$U(P) = -\frac{u_0 j}{\lambda} \iint_S \frac{e^{jk(\rho+r)}}{\rho r} \frac{\cos(\hat{n}, \hat{\rho}) - \cos(\hat{n}, \hat{r})}{2} dS \quad (61)$$

avec $[\cos(\hat{n}, \hat{\rho}) - \cos(\hat{n}, \hat{r})]/2 = K(\theta)$, appelé facteur d'obliquité.

Cependant, cette formule présente une incohérence théorique majeure : en imposant à la fois la valeur du champ et de sa dérivée normale sur le bord de l'ouverture, elle conduit mathématiquement à une annulation complète du champ derrière l'ouverture, ce qui contredit clairement l'observation physique [7]. La **formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld** prend en compte cette incohérence en n'appliquant aucune condition sur la dérivée de U . Elle s'écrit, en coordonnées cartésiennes, comme suit :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{1}{j\lambda} \iint U(x', y', z=0) \frac{ze^{jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}}{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} dx' dy' \\ &= \frac{1}{j\lambda} \iint U(x', y', z=0) \frac{z}{r} \frac{e^{jkr}}{r} dx' dy' \end{aligned} \quad (62)$$

avec $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ et $U(x', y', z=0) = U(x', y')$, le champ en $z=0$ (voir Fig. 5) et $r \gg \lambda$.

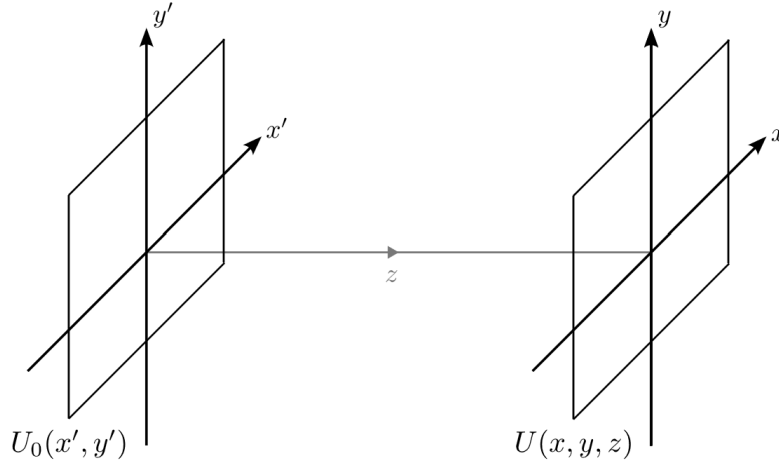


Fig. 5. – Géométrie du problème de diffraction (image issue de [4])

- **La diffraction de Fresnel** : Comme présenté dans [4], grâce au développement de série de Taylor en $a=0$ de $\sqrt{1+a}$ valant $1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^3 + \dots$, nous pouvons réexprimer la distance de propagation r comme suit :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = z \sqrt{\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y'}{z}\right)^2 + 1} \\ &\approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-x'}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-y'}{z}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

En remplaçant dans l'Eq. 62, nous obtenons l'**intégrale de diffraction de Fresnel**, exprimant le champ $U(x, y, z)$ dans le champ proche :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint U(x', y', z=0) e^{-j\frac{k}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy' \quad (64)$$

avec r au dénominateur de l'Eq. 62 limité à l'ordre zéro ($r \approx z$) et r dans l'exponentielle limité au premier ordre. En isolant ensuite $e^{j\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)}$, nous pouvons mettre en évidence une transformation de Fourier en deux dimensions* :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \mathcal{F}\{U(x', y', z=0) e^{j\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)}\}(f_x, f_y) \quad (66)$$

- **La diffraction de Fraunhofer** : Toujours selon [4], en partant du principe que :

$$z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)_{\max}}{2}, \quad (67)$$

nous pouvons approximer $e^{j\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)}$ par 1. De l'Eq. 66, nous obtenons alors, dans le champ lointain :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \mathcal{F}\{U(x', y', z=0)\}(f_x, f_y) \quad (68)$$

Dans sa forme intégrale, nous exprimons l'**intégrale de diffraction de Fraunhofer** :

$$U(x, y, z) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \iint U(x', y', z=0) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(xx' + yy')} dx' dy' \quad (69)$$

2.4.3 LA MÉTHODE DU SPECTRE D'ONDES PLANES

La méthode du spectre d'ondes planes[†] est une technique de propagation d'ondes constituant une alternative à l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld [4]. Elle consiste en une décomposition d'une onde dans un plan en une superposition d'ondes planes représentant chacune une composante spatiale se propageant dans une direction depuis ce plan. Le champ propagé en n'importe quel point ou écran parallèle peut être calculé en sommant toutes les contributions de ces ondes planes, que ce soit en amplitude et en phase [7].

Concrètement, cette méthode consiste à calculer la transformation de Fourier du champ d'entrée et de propager chaque contribution plane sur une distance z pour enfin les fusionner via une transformation de Fourier inverse [4]. Cela s'écrit comme suit :

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x', y', z=0)\}(f_x, f_y) e^{jk_z z}\}(x, y) \quad (70)$$

avec $k_z = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - f_x^2 - f_y^2}$.

*Dans le domaine fréquentiel spatial, définie telle que :

$$\mathcal{F}\{C(x, y)\}(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y) e^{-j(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (65)$$

avec $A(x, y)$ un champ en deux dimensions.

[†]Traduction d'*angular spectrum method*

2.4.4 LE FAISCEAU GAUSSIEN

Le faisceau gaussien correspond au mode TEM_{01} : le mode le plus simple et le plus stable, solution de l'équation de propagation, émis par un résonateur optique tel que le laser à cavité de Fabry-Pérot. En effet, ce mode élémentaire possède un profil de distribution gaussienne [6]. Pour rappel, une fonction gaussienne en deux dimensions s'exprime de manière générique comme suit :

$$f(x, y) = A \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{\mu}|^2}{2\sigma^2}\right) = A \exp\left[-\left(\frac{(x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \quad (71)$$

avec A , l'amplitude ; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le vecteur position ; $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$, le vecteur moyenne et σ , l'écart type selon x et y .

Dans le cadre de ce travail, pour un faisceau gaussien, nous partons du principe que la moyenne est nulle, c'est-à-dire que le faisceau est centré sur l'écran. Nous n'allons pas non plus utiliser la variance notée σ^2 mais w_0 , appelé col du faisceau*. Il s'agit de la largeur† minimale du faisceau gaussien ; dans le cadre de ce travail, le faisceau sera considéré de cette largeur lors de la sortie de la cavité, c'est-à-dire à l'émission comme illustré sur la Fig. 6. Enfin, nous établissons l'amplitude du faisceau initial à l'unité : $U_0 = 1 \sqrt{\text{W}/\text{m}^2}$.

L'éclairement énergétique‡ s'exprime comme :

$$E_e(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2 = \left| e^{-\frac{\vec{r}^2}{w_0^2}} \right|^2 = e^{-\frac{2\vec{r}^2}{w_0^2}} \quad (72)$$

Dans les faits, nous utiliserons l'expression de l'amplitude $U(\vec{r})$ lors des simulations. Cependant, l'éclairement énergétique nous permet de lier le col à l'écart-type. Grâce à l'Eq. 71, nous déduisons que :

$$2\sigma^2 = \frac{w_0^2}{2} \Leftrightarrow w_0 = 2\sigma \quad (73)$$

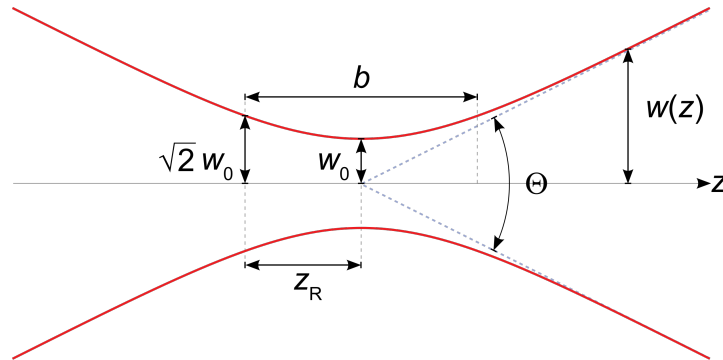


Fig. 6. – Taille d'un faisceau gaussien en fonction de la distance de propagation§

Lors de la propagation, la largeur du faisceau w augmente indépendamment des turbulences atmosphériques selon l'expression suivante [6] :

*Appelé couramment *beam waist* anglais

†La terme « largeur », noté $w(z)$, représente le rayon du faisceau à une distance z donnée.

‡Pour rappel, l'éclairement énergétique, aussi appelé irradiance, est souvent dénommé par *intensity* en anglais.

§Auteur : User DrBob (via Wikimedia Commons). Source. [Licence Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0](#). Aucune modification apportée.

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} \quad (74)$$

Une autre métrique utile lors de la manipulation de faisceau gaussien est la **distance de Rayleigh** notée z_R . Il s'agit de la distance à laquelle l'on observe le doublement de la section du faisceau [6]. En effet, à une distance z_1 , la section vaut πw_0^2 et $2\pi w_0^2$ après une propagation de $\Delta z = z_2 - z_1$. En d'autres termes, il s'agit de la distance où la largeur du faisceau w a été multipliée par $\sqrt{2}$. En prenant $z_1 = 0$ (au col) et $z_2 = z_R$, nous obtenons : $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$

De l'Eq. 74, nous trouvons que :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (75)$$

nous permettant ainsi de réécrire l'Eq. 74 :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (76)$$

De cette équation, nous constatons que plus le col est faible, plus le faisceau sera sujet à une diffraction importante rapidement, c'est-à-dire à une augmentation de sa largeur w . Ce phénomène est illustré par la Fig. 7.

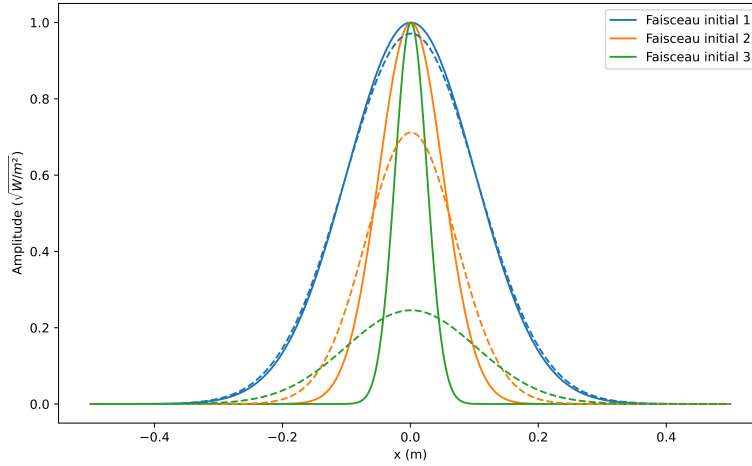


Fig. 7. – Diffraction de trois faisceaux gaussiens de $w_{0,i} = [0,2, 0,1, 0,05]$ m après une propagation de 10 km pour une longueur d'onde de 1550 nm

Enfin, il convient de définir la **largeur à mi-hauteur**, notée LMH. Il s'agit du diamètre du cercle où l'éclairement énergétique atteint la moitié de sa valeur maximale comme illustré sur les Fig. 8 et Fig. 9. Sur ces figures, $E_{e, \max}$ vaut $0,5 \text{ W/m}^2$. Est aussi représenté le col du faisceau tel qu'utilisé dans la définition de l'amplitude du faisceau gaussien de l'Eq. 72.

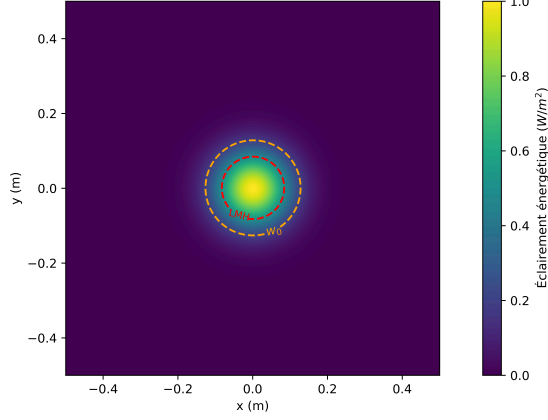


Fig. 8. – Éclairement énergétique d'un faisceau gaussien de $w_0 = 0,2$ m avec les niveaux w_0 et la LMH

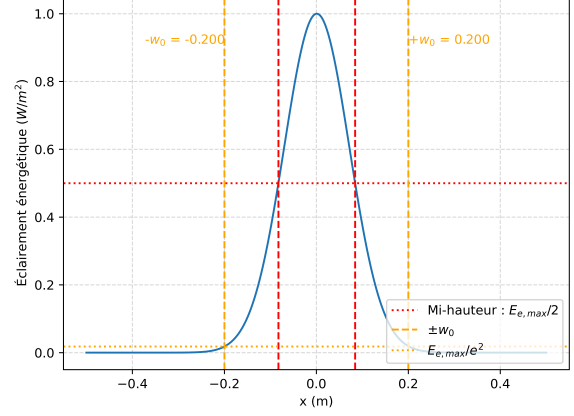


Fig. 9. – Éclairement énergétique d'un faisceau gaussien de $w_0 = 0,2$ m en $y = 0$ avec les niveaux w_0 et LMH

2.5 LES PROFILS DE C_n^2

Comme expliqué dans le Chapitre 2.3.4, la constante de structure de l'indice de réfraction — aussi simplement appelé le C_n^2 — est la métrique utilisée nous permettant de modéliser les turbulences atmosphériques. Plus exactement, elle permet d'en quantifier l'intensité des fluctuations. Il est possible d'obtenir un profil de cette dernière en fonction de l'altitude grâce à des mesures par radiosondage de pression et de température dans l'atmosphère ou encore grâce à des modèles.

2.5.1 LES MODÈLES

Il existe plusieurs moyens d'obtenir un tel profil en fonction de l'altitude et d'autres paramètres atmosphériques. Dans sa thèse, Quatresooz [4] a dressé une classification précise des différents modèles de C_n^2 existants répartis en différentes catégories comme entre autres les modèles non paramétriques et paramétriques de C_n^2 .

- **Les modèles non paramétriques** : Ces modèles de C_n^2 sont de la forme $C_n^2(z) = f(z)$ avec $f(z)$ une fonction dépendant uniquement de l'altitude. Ces modèles sont généralement obtenus via une moyenne des profils de C_n^2 mesurés à un certain endroit, à une certaine saison, ... ; cela fait d'eux des modèles empiriques mais qui peuvent s'avérer utiles dans certains cas comme nous le verrons dans le Chapitre 3.2.
- **Les modèles paramétriques** : Contrairement aux précédemment cités, ces profils de C_n^2 sont de la forme $C_n^2(z) = f(z, t, P, T, \dots)$, dépendant donc de plusieurs autres paramètres comme le temps, la pression ou encore la température. Ces modèles paramétriques peuvent être empiriques ou théoriques.

LES MODÈLES DE HUFNAGEL-VALLEY

Les modèles de Hufnagel-Valley sont des modèles paramétriques simples largement utilisés. Ces modèles combinent les contributions de différentes couches atmosphériques comme la troposphère, la tropopause ou encore la couche limite. Sa forme générale s'écrit comme suit [4] :

$$C_n^2(z) = Ae^{-\frac{z}{100}} + 2,7 \cdot 10^{-16} e^{-z/1500} + 0,00594 \left(\frac{\tilde{v}}{27} \right)^2 \left(\frac{z}{10^5} \right)^{10} e^{-z/1000} \quad (77)$$

avec z , l'altitude (en m), $\tilde{v}$, la vitesse moyenne quadratique du vent, moyennées de 5 km à 20 km d'altitude et A , les turbulences au niveau du sol (en $\text{m}^{-2/3}$), associées à $C_n^2(0)$. Le premier terme modélise une décroissance exponentielle rapide au niveau du sol, le deuxième représente la décroissance dans la troposphère tandis que le dernier décrit le pic de turbulence dans la tropopause vers 10 km d'altitude, suivi d'une décroissance.

Ce modèle, par ses paramètres A et $\tilde{v}$, peut être adapté à des mesures de C_n^2 réalisées dans différentes zones géographiques. Cependant, quand les paramètres sont connus et fixés, le modèle peut être considéré comme non-paramétrique, c'est-à-dire ne dépendant que de l'altitude. Un modèle de Hufnagel-Valley avec $A = 1,7 \cdot 10^{-14} \text{ m}^{2/3}$ et $\tilde{v} = 21 \text{ m/s}$ est appelé **modèle de Hufnagel-Valley 5/7***, illustré à la Fig. 10 ; il constitue le modèle de C_n^2 le plus utilisé [8].

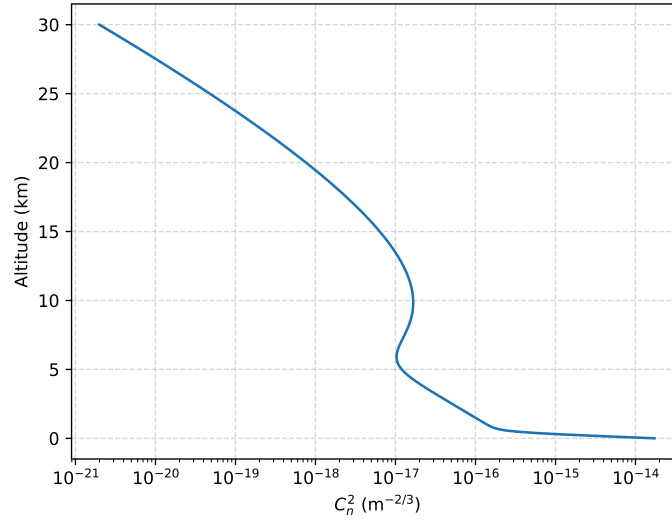


Fig. 10. – Modèle de Hufnagel-Valley 5/7

2.5.2 LES QUELQUES PARAMÈTRES INTÉGRAUX

Afin d'exploiter les profils de C_n^2 dans le cadre d'une propagation turbulente comme cela sera présenté dans le Chapitre 5.2, il convient d'en dériver quelques paramètres dits « intégrés », car faisant intervenir l'intégrale verticale $\int_0^\infty C_n^2(z) dz$, appelée « intégrale de turbulence » [9].

LE PARAMÈTRE DE FRIED

La paramètre de Fried, noté r_0 , représente le diamètre d'un télescope idéal (seulement affecté par la diffraction) qui fournirait une image de la même résolution angulaire qu'un télescope réel affecté par les turbulences atmosphériques (phrase adaptée de Quatresooz [4]). Il représente le paramètre intégré le plus utilisé du fait de sa simplicité et parce qu'il prend en compte la longueur d'onde, l'angle zénithal de l'observation et le C_n^2 . De par la puissance $-3/5$, il s'exprime en mètres. Il a été introduit par Fried [10] et est défini comme suit :

*La mention 5/7 fait référence à la valeur de certains paramètres intégraux à 500 nm pour ce modèle.

$$r_0 = \left(0,423 \, k^2 \sec(\theta) \int_0^\infty C_n^2(z) \, dz \right)^{-\frac{3}{5}} \quad (78)$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, le nombre d'onde ; θ , l'angle zénithal* et $C_n^2(z)$, le profil de la constante de structure de l'indice de réfraction.

LA QUALITÉ DE LA VISIBILITÉ

La qualité de la visibilité, aussi appelé *seeing* de l'anglais, noté $\mathcal{E}_0$, donne la LMH[†] de la fonction d'étalement du point — c'est-à-dire la réponse impulsionnelle spatiale de l'atmosphère — en exposition longue d'une source ponctuelle après propagation par une atmosphère turbulente [4]. Elle se mesure en secondes d'arc et, telle que définie dans [11], s'exprime comme suit :

$$\mathcal{E}_0 = 0,976 \, \frac{\lambda}{r_0} \quad (79)$$

Grâce à l'Eq. 78, nous pouvons la réécrire comme :

$$\mathcal{E}_0 = 5,285 \, \lambda^{-\frac{1}{5}} \left(\sec(\theta) \int_0^\infty C_n^2(z) \, dz \right)^{\frac{3}{5}} \quad (80)$$

Comme pour le paramètre de Fried, l'intégrale de turbulence est plus sensible aux zones de fortes turbulences, c'est-à-dire principalement la couche limite [4]. En effet, $C_n^2(s)$ y est élevé.

L'ANGLE ISOPLANATIQUE

L'angle isoplanatique, introduit par Fried [12], noté θ_0 , définit la région angulaire dans laquelle les turbulences sont considérées comme étant corrélées. Plus formellement, il s'agit de l'angle pour lequel la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) augmente de 1 rad. Sa définition est la suivante :

$$\theta_0 = \left(2,913 \, k^2 (\sec(\theta))^{\frac{8}{3}} \int_0^\infty C_n^2(z) z^{\frac{5}{3}} \, dz \right)^{-\frac{3}{5}} \quad (81)$$

Nous remarquons que son expression est assez similaire à celle du paramètre Fried si ce n'est qu'ici, une dépendance en $z^{\frac{5}{3}}$ est introduite, diminuant donc l'impact des fortes turbulences de faible altitude dans l'intégrale de turbulence. L'angle isoplanatique est donc particulièrement influencé par les turbulences de haute altitude.

2.6 LA FIBRE OPTIQUE

Il convient par ailleurs de rappeler quelques points théoriques concernant la fibre optique, et plus précisément la fibre optique monomode. Cette section se fonde sur Hecht [6].

Une fibre optique est un guide d'ondes cylindrique destiné à la propagation de la lumière. Elle est largement utilisée dans le milieu des télécommunications. La structure de base de la fibre est un cylindre dans lequel est injecté un faisceau lumineux (cf. Fig. 11). La fibre est d'indice de réfraction n_f et le milieu incident d'où est issu le faisceau est l'air, d'indice n_a .

*Il s'agit de l'angle mesuré entre le zénith et le point de visée.

†La largeur à mi-hauteur, telle que définie dans le Chapitre 2.4.4.

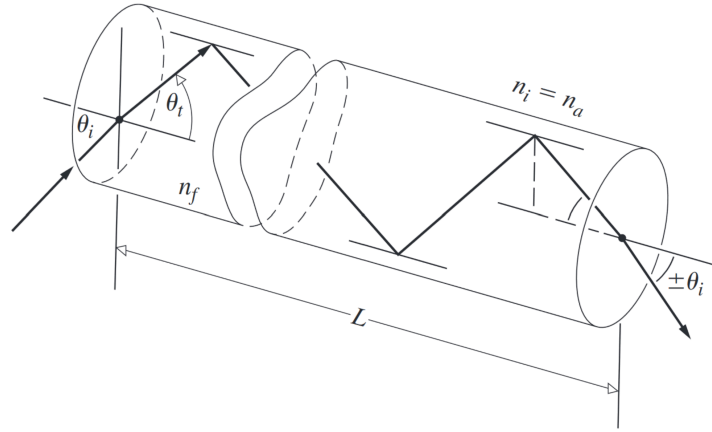


Fig. 11. – Injection dans une fibre optique cylindrique diélectrique (image issue de [6])

Le but est de s'assurer que le faisceau lumineux, une fois injecté dans la fibre, se propage sur toute la longueur du guide grâce à de multiples réflexions au sein du cœur jusqu'à l'autre bout de la fibre. Pour une fibre de longueur L (en m) et de rayon D (en m), la distance totale parcourue par le faisceau lumineux est :

$$\ell = \frac{L}{\cos(\theta_t)} \quad (82)$$

avec θ_t , l'angle incident au sein de la fibre. Grâce à la loi de Snell-Descartes, elle peut s'exprimer comme :

$$\ell = n_f L \sqrt{n_f^2 - \sin^2(\theta_i)} \quad (83)$$

Grâce au diamètre du cœur de la fibre, nous pouvons en dériver le nombre total de réflexions, arrondi à l'entier le plus proche :

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{\ell}{D / \sin(\theta_t)} \pm 1 \\ &= L \frac{\sin(\theta_i)}{D \sqrt{n_f^2 - \sin^2(\theta_i)}} \pm 1 \end{aligned} \quad (84)$$

avec ± 1 , une correction dépendant de l'endroit où le rayon frappe le bout de la fibre qui pour un grand nombre de réflexions, est négligeable. À titre d'exemple, pour une fibre optique de diamètre $D = 50 \mu\text{m}$, un indice de réfraction $n_f = 1,6$ et un angle d'incidence $\theta_i = 30^\circ$, N_r vaut environ 6600 réflexions par mètre.

Cependant de telles fibres sont sujettes à quelques problèmes. En effet, la présence de poussières ou d'impuretés sur la surface peut provoquer une fuite de la lumière s'y propageant. De plus, si quelques fibres sont trop rapprochées, la lumière peut passer de l'une à l'autre. Pour régler ce problème, les fibres sont entourées d'une gaine optique d'indice de réfraction n_c inférieur à celui du cœur comme visible sur Fig. 12.

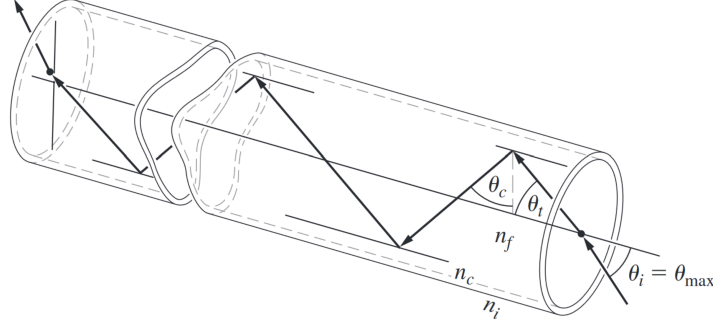


Fig. 12. – Injection dans une fibre optique cylindrique diélectrique (image issue de [6])

Comme visible sur la Fig. 12, il existe un angle incident θ_i maximum au-delà duquel l'angle θ_t sera inférieur à l'angle critique de l'interface cœur-gaine lors d'une réflexion dans le guide d'onde. Cet angle maximum est appelé **angle d'acceptance** et noté $\theta_{\max}$. En effet, si $\theta_i > \theta_{\max}$, l'angle d'incidence interne θ_t ne permet pas une réflexion totale, menant donc à une perte par réfraction lumineuse dans la gaine. Au contraire, tout angle incident inférieur à $\theta_{\max}$ assure une propagation guidée au sein de la fibre optique.

L'angle critique (c'est-à-dire l'angle maximum au-delà duquel il n'y a plus de réfraction) n'existe que quand $n_f > n_c$, ce qui est le cas ici. À l'interface cœur-gaine, il est alors défini comme suit :

$$\sin(\theta_c) = \frac{n_c}{n_f} \quad (85)$$

La somme de l'angle réfracté et de l'angle incident — en l'occurrence l'angle critique — dans le cœur vaut 90° . Dès lors, nous pouvons réécrire l'expression comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{n_c}{n_f} &= \sin(\theta_c) \\ &= \sin(90^\circ - \theta_t) \\ &= \cos(\theta_t) \end{aligned} \quad (86)$$

Enfin, pour déterminer l'angle incident maximum $\theta_{\max}$ avec l'angle critique θ_c , nous réexprisons le cosinus en un sinus duquel nous utilisons la loi de Snell-Descartes à l'interface air-cœur $n_i \sin(\theta_{\max}) = n_f \sin(\theta_t)$:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_t) &= n_c/n_f \\ \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)} &= \\ \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_f} \sin(\theta_{\max})\right)^2} &= \\ \frac{n_i}{n_f} \sin(\theta_{\max}) &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_c}{n_f}\right)^2} \\ \sin(\theta_{\max}) &= \frac{\sqrt{n_f^2 - n_c^2}}{n_i} = \frac{\text{O.N.}}{n_i} \end{aligned} \quad (87)$$

De plus, le facteur $n_i \sin(\theta) = \frac{n_i}{n_i} \sqrt{n_f^2 - n_c^2} = \text{O.N.}$ est défini comme étant l'**ouverture numérique**, notée O.N. Notons que la plupart du temps, le milieu dans lequel est placée la fibre est l'air ; $n_i \approx 1$ et l'ouverture numérique peut s'écrire alors : $\text{O.N.} = \sqrt{n_f^2 - n_c^2}$.

Il existe deux types principaux de fibres optiques : **la fibre optique à saut d'indice** et **la fibre optique à gradient d'indice**. La différence réside dans la structure des indices de réfraction du cœur et de la gaine. Dans le cas du saut d'indice, le changement d'indice de réfraction à l'interface cœur-gaine est net alors que pour la fibre à gradient d'indice, il se fait progressivement. La première est la plus ancienne, la moins chère à produire et la moins efficace. Quant à la deuxième, plus récente et plus chère, elle possède certains avantages quant à la dispersion intermodale.

En fonction de l'angle incident à l'entrée de la fibre, il peut y avoir des centaines voire des milliers de modes de propagation différents comme illustrés sur la Fig. 13 : une telle fibre est dite **fibre multimode**. Nous définissons la fréquence normalisée :

$$V = \pi D \frac{O.N.}{\lambda_0} \quad (88)$$

avec D , le diamètre du cœur optique (en m) et λ_0 , la fréquence du rayon lumineux dans le vide. Pour $V > 2.405$, la nombre de modes de propagation augmente significativement, pour de grandes valeurs de V :

$$N_m \approx \frac{1}{2} V^2 \quad (89)$$

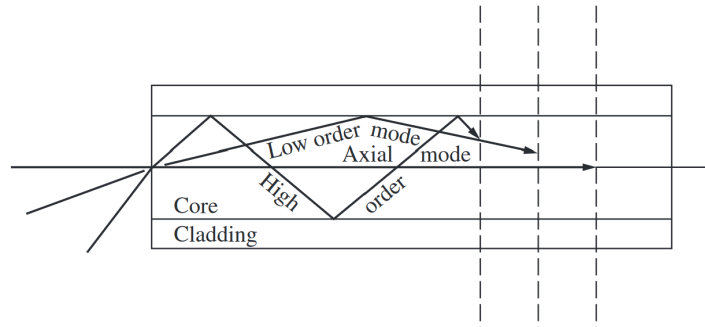


Fig. 13. – Dispersion intermodale au sein d'une fibre à saut d'indice (image issue de [6])

Dans des fibres multimodes, comme les différents modes parcourent une distance différente, l'information arrive à des instants différents en fonction du mode comme illustré sur la Fig. 13. Comme le signal lumineux est composé de courtes impulsions correspondant aux bits de l'information, ce phénomène, **la dispersion intermodale**, a pour conséquence de modifier la forme du front d'onde reçu, menant ainsi à une impulsion corrompue. La différence de délai entre le rayon empruntant le chemin le plus direct et celui empruntant le chemin le plus long (avec le plus grand nombre de réflexion), s'exprime comme suit :

$$\Delta t = L \frac{n_f}{c} \left(\frac{n_f}{n_c} - 1 \right) \quad (90)$$

Remarquons que cette différence ne dépend que des indices de réfraction et de la longueur de la fibre. Par exemple, pour $n_f = 1,500$ et $n_c = 1,489$, la différence de délai $\Delta t/L$ vaut 37 ns/km. Cela signifie qu'une impulsion en entrée de la fibre s'étale sur 37 ns sur chaque kilomètre. Sans modifier les caractéristiques de la fibre, une des manières de contourner ce problème est d'espacer les impulsions d'entrée d'au moins deux fois Δt . Les fibres optiques à gradient d'indice constituent aussi une bonne alternative pour l'effet très modéré de la dispersion intermodale.

2.7 LES POLYNÔMES DE ZERNIKE

Les polynômes de Zernike, présentés en détail par Lakshminarayanan [13], sont un ensemble de polynômes continus et orthogonaux entre eux défini sur un cercle de rayon unitaire. Ils sont utilisés pour décrire les fronts d'onde ayant subi des aberrations, c'est-à-dire un front d'onde ayant subi un déphasage par rapport à l'onde plane initiale après avoir traversé un système optique comme une atmosphère sujette à des turbulences. En utilisant la série de polynômes de Zernike normalisés, le coefficient lié à chaque mode contribue à la racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM)* du mode en question. Plus le coefficient d'un mode est élevé, plus sa contribution à la REQM totale est grande. De plus, chaque coefficient est indépendant du nombre de modes sélectionnés. Cela signifie que même si le nombre de polynômes utilisés pour décrire le front d'onde est ajusté, cela n'affecte pas les coefficients des modes déjà considérés.

Un front d'onde incident, exprimé en coordonnées polaires, peut être développé en une série de polynômes orthonormaux sur la pupille :

$$W(r, \theta) = \sum_{n,m} C_n^m Z_n^m \quad (91)$$

avec C , les coefficients et Z , les modes de Zernike associés.

Exprimé en coordonnées cartésiennes, cela donne :

$$\begin{aligned} Z_n^m(r, \theta) \pm j Z_n^{-m}(r, \theta) &= V_n^{-m}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ &= R_n^{m(r)} \exp(\pm j m \theta) \end{aligned} \quad (92)$$

Pour $r \in [0, 1]$ et θ mesuré dans le sens indirect depuis l'axe Oy , nous retrouvons :

$$\begin{cases} Z_n^{m(r, \theta)} &= R_n^m(r) \cos(m\theta) \text{ si } m \geq 0 \\ Z_n^{-m}(r, \theta) &= R_n^m(r) \sin(m\theta) \text{ si } m < 0 \end{cases} \quad (93)$$

La fonction radiale $R_n^m(r)$ est définie comme suit :

$$R_n^m(r) = \sum_{l=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^{l(n-l)!}}{l! [\frac{1}{2}(n+m) - l]! [\frac{1}{2}(n-m) - l]!} r^{n-2l} \quad (94)$$

Cela peut être normalisé avec cette constante :

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_{m0}}} \quad (95)$$

avec δ_{m0} , le symbole delta de Kronecker†.

Similairement, les polynômes de Zernike peuvent s'écrire en coordonnées cartésiennes, pour $x^2 + y^2 \in [-1, 1]$:

*En anglais, *root mean square error* (RMS)

†Le symbole delta de Kronecker est défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (96)$$

$$Z_n^m(x, y) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M-j} (-1)^{i+j} \binom{n-2M}{2i+p} \binom{M-j}{k} \frac{(n-j)!}{j!(M-j)!(n-M-j)!} x^\xi y^\eta \quad (97)$$

avec $M = \frac{n}{2} - |m - \frac{n}{5}|$, $p = \frac{|s|}{2}(s+1)$, $q = (d - s(n \bmod 2))\frac{s}{2}$, $s = \text{sgn}(d)$, $d = n - 2m$, $\xi = 2(i+k) + p$ et $\eta = n - 2(i+j+k) - p$.

Les coefficients n et m sont appelés respectivement degrés radial et azimuthal. Sur la Fig. 14 sont présentés les 28 premiers modes.

Pour finir, l'orthogonalité et la normalité des polynômes de Zernike s'expriment comme suit :

$$\frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} Z_j(r, \theta) Z_{j'}(r, \theta) r \, dr \, d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r \, dr \, d\theta} = \delta_{jj'} \quad (98)$$

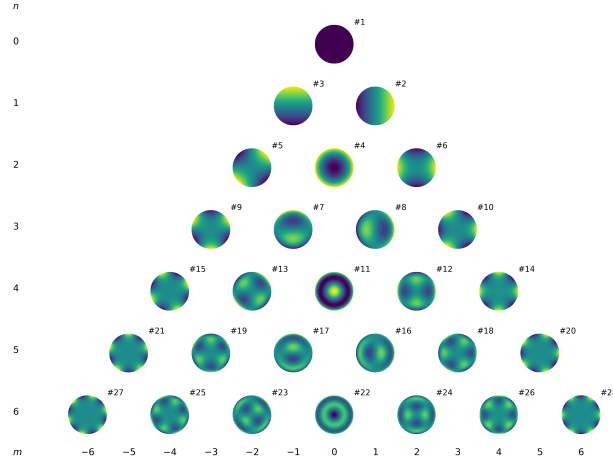


Fig. 14. – Les vingt-huit premiers modes de Zernike (généré via [14])

3. ÉTUDE STATISTIQUE DES PROFILS DE TURBULENCE

Afin de produire artificiellement des profils de C_n^2 fidèles et représentatifs des conditions réelles, une étude statistique d'un jeu de profils mesurés a été menée. Nous disposons ainsi de diverses métriques qui seront, pour certaines, ensuite exploitées lors du processus de reconstruction détaillé dans le Chapitre 4.

Après (i) la présentation du jeu de données utilisé et de quelques définitions et analyses préliminaires, (ii) nous construirons un profil moyen de référence à partir duquel (iii) nous détecterons des couches turbulentes via un seuil adaptatif et mesurerons diverses métriques associées. Ensuite, (iv) nous explorerons différentes corrélations avec notamment, des paramètres intégraux tels que la qualité de la visibilité $\mathcal{E}_0$ et l'angle isoplanatique θ_0 . Enfin, (v) nous étudierons les distributions relatives aux trois couches les plus turbulentes, résultats centraux dans la procédure de reconstruction artificielle de profils présentés au Chapitre 4.

3.1 LE JEU DE DONNÉES

Le jeu de données utilisé consiste en 731 profils de C_n^2 mesurés à midi et à minuit tout au long de l'année 2020 à Trappes, couvrant ainsi les quatre saisons. Ces mesures sont échantillonnées tous les 200m et, après retrait des erreurs de mesure (profils nuls ou incomplets), il subsiste $N_{\text{tot}} = 620$ profils, nombre suffisant pour mener l'étude suivante. Sur base des mesures expérimentales de l'altitude, de la pression atmosphérique et de la température, ces profils ont été obtenus via la définition statistique de l'Eq. 35 tel que présentée par Quatresooz *et al.* [15]. À titre d'exemple, la Fig. 15 illustre un profil de C_n^2 mesuré à minuit et un autre à midi le 25 juillet 2020.

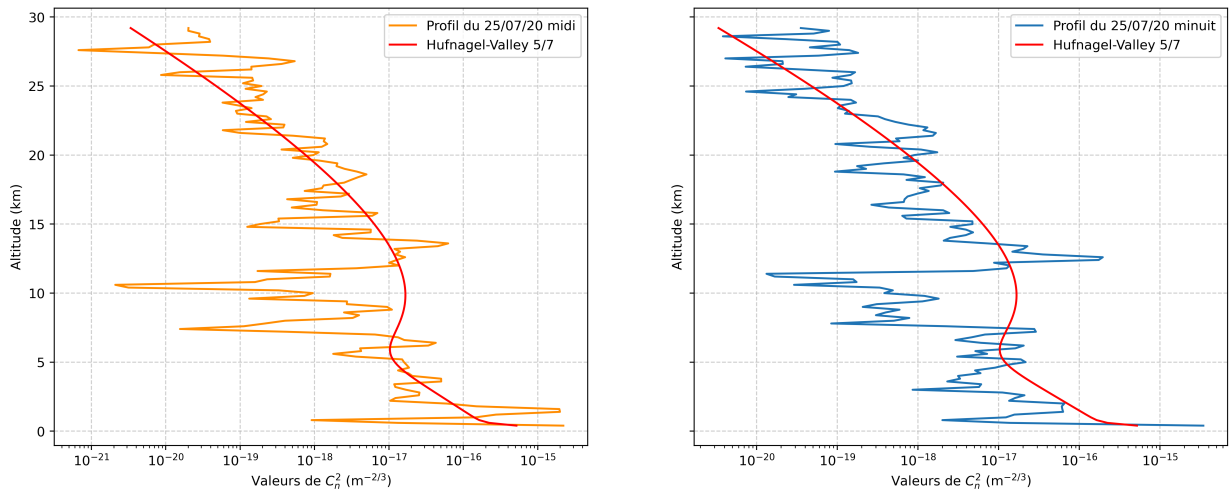


Fig. 15. – Profils de C_n^2 mesurés à Trappes le 25 juillet 2020 à midi (à gauche) et à minuit (à droite)

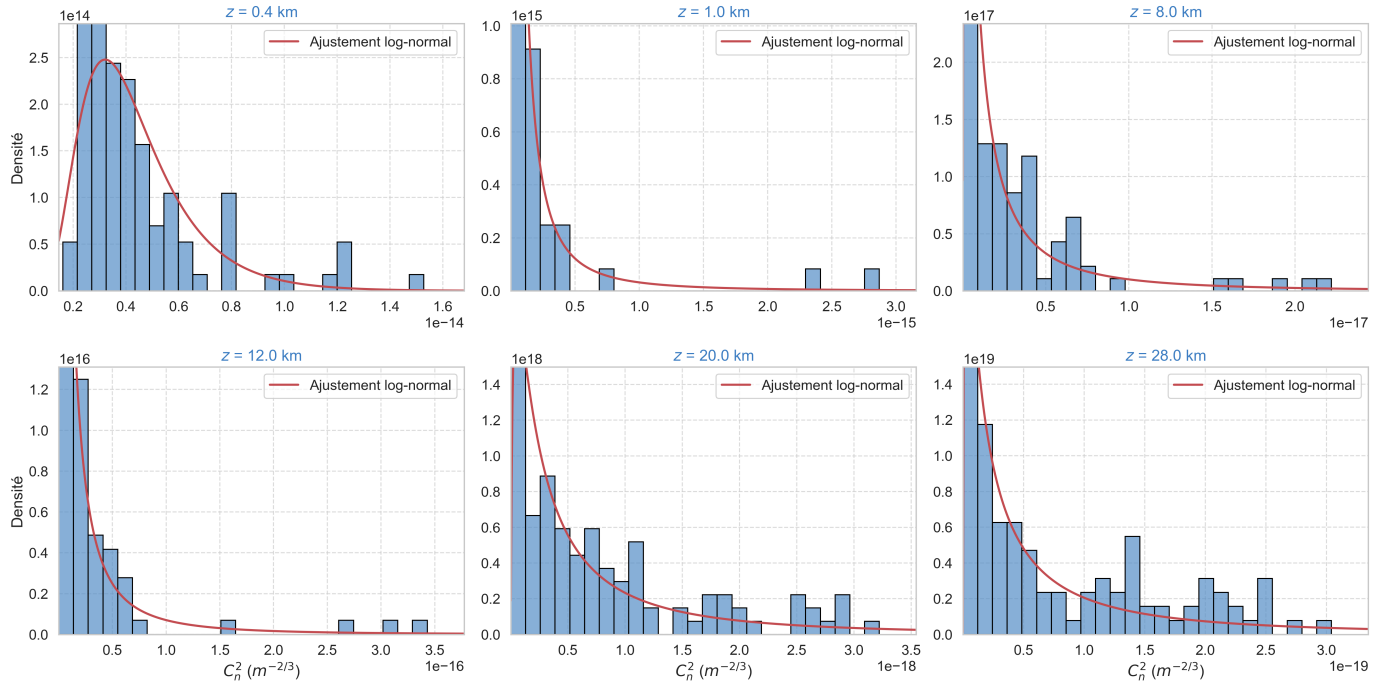


Fig. 16. – Distribution des C_n^2 des profils sélectionnés à différentes altitudes avec ajustement par une loi log-normal

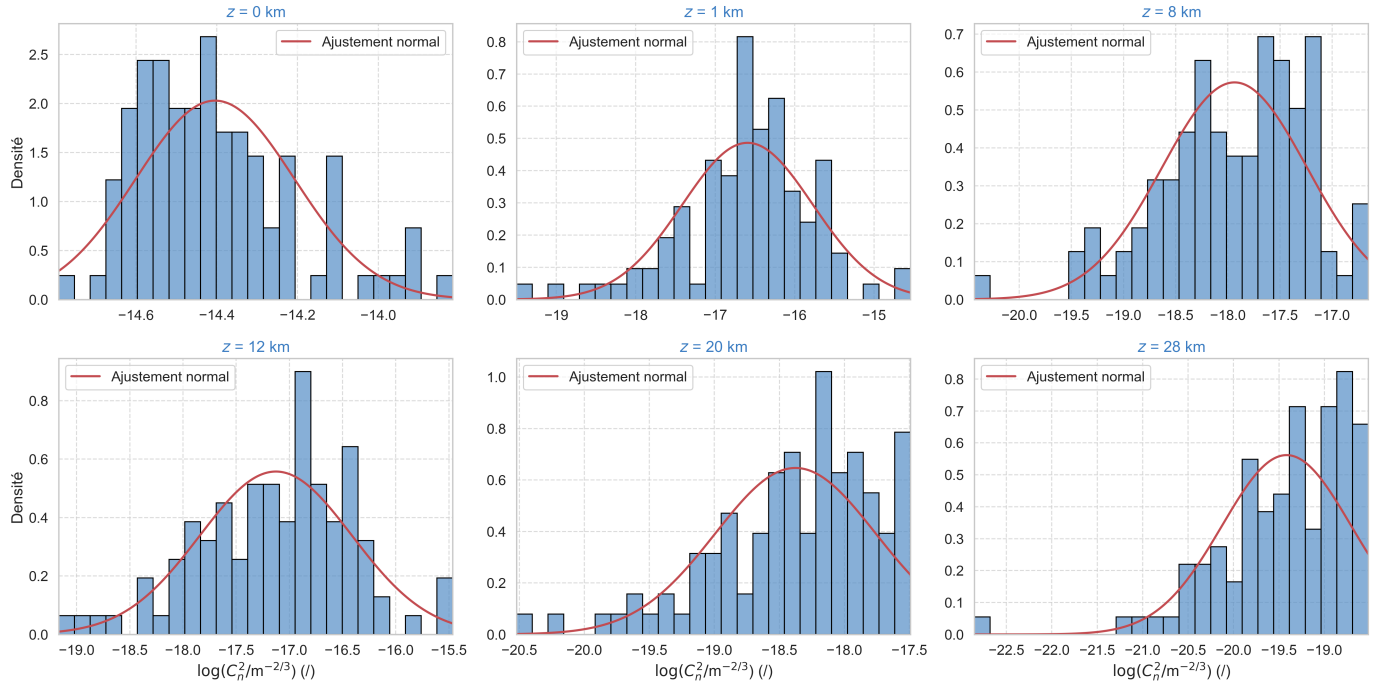


Fig. 17. – Distribution des $\log(C_n^2)$ des profils sélectionnés à différentes altitudes avec ajustement par une loi normale

3.2 LE PROFIL MOYEN DE RÉFÉRENCE

Pour une altitude z donnée, nous avons calculé la distribution de la valeur du C_n^2 pour l'ensemble des profils du jeu. Ces dernières sont représentées à la Fig. 16. Nous remarquons que pour les faibles altitudes, la variabilité est plus élevée car ces couches sont plus sujettes à de grandes variations de température et de pression et donc de turbulence. La Fig. 17 représente quant à elle, les mêmes données mais avec un axe des abscisses en échelle logarithmique. Comme l'ont étudié Trinquet et Vernin [16], le $\log(C_n^2)$ suit une loi normale pour une altitude z donnée. Nous pouvons ainsi dire que :

$$\log(C_n^2(z)) \sim \mathcal{N}(\mu(z), \sigma^2(z)) \quad (99)$$

Par conséquent, pour des abscisses représentées linéairement, nous avons :

$$C_n^2(z) \sim \text{Log-}\mathcal{N}\left(\frac{\mu(z)}{\log(10)}, \sigma^2 \frac{z}{\log^2(10)}\right) \quad (100)$$

En effet, pour une variable aléatoire* $X \sim \text{Log-}\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Pour chaque altitude, la moyenne arithmétique et l'écart type des logarithmes des N_{tot} profils ont été calculés. Mathématiquement, pour une altitude donnée z , nous avons :

$$\mathbb{E}[\log(C_n^2(z))] = \mu_{\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{tot}}} \log(C_{n,i}^2(z)) \quad (101)$$

$$\mathbb{V}[\log(C_n^2(z))] = \sigma_{\mathcal{N}}^2(z) = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{tot}}} [\log(C_{n,i}^2(z)) - \mu_{\mathcal{N}}(z)]^2 \quad (102)$$

D'autre part, la moyenne arithmétique des $C_n^2(z)$ se calcule comme suit :

$$\mu_{\text{Log-}\mathcal{N}}(z) = \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sel}}} C_{n,i}^2(z) \quad (103)$$

En ignorant le caractère log-normal de la distribution que suivent les $C_n^2(z)$, nous obtenons une moyenne dont la valeur en échelle logarithmique est systématiquement supérieure à $\mu_{\mathcal{N}}$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \log(\mu_{\text{Log-}\mathcal{N}}(z)) &\geq \mu_{\mathcal{N}}(z) \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sel}}} C_{n,i}^2(z)\right) &\geq \frac{1}{N_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{tot}}} \log(C_{n,i}^2(z)) \end{aligned} \quad (104)$$

Il s'agit de l'inéquation de Jensen [17] appliquée au logarithme, une fonction concave. Cette différence est représentée sur la Fig. 18 : les traits continu et pointillé représentent respectivement $\mu_{\mathcal{N}}(z)$ et $\log(\mu_{\text{Log-}\mathcal{N}}(z))$. Pour la suite de ce travail, nous utiliserons $\mu_{\mathcal{N}}(z)$ ou $\exp_{10}(\mu_{\mathcal{N}}(z))$ dans le cas d'une représentation sur une échelle linéaire.

Ensuite, nous définissons un **profil moyen de référence** $\overline{C_n^2}(z)$. Ce dernier constituera une base pour la mesure de certaines métriques comme le nombre de couches turbulentes. Pour

*Bien que la loi log-normale porte ce nom, la loi normale en est le logarithme népérien et non décimal. C'est pour cette raison qu'apparaissent les facteurs $1/\log(10)$ et $1/\log^2(10)$ dans l'Eq. 100, résultat du changement de base.

l'obtenir, $N_{\text{sel}} = 105$ profils de nuit et de jour répartis équitablement tout au long de l'année ont été sélectionnés. Nous avons choisi de restreindre le profil moyen de référence à ce sous-échantillon afin de limiter la corrélation temporelle entre les événements. Nous évitons ainsi qu'un épisode particulier (conditions météorologiques atypiques, ...) n'ait une influence disproportionnée sur la moyenne et l'écart type.

De ces profils sélectionnés, nous calculons ensuite $\mu_{\mathcal{N},\text{sel}}(z) = \overline{C_n^2}(z)$ et $\sigma_{\mathcal{N},\text{sel}}^2(z)$ sur base de l'Eq. 101 et de l'Eq. 102, nous obtenons de cette façon la courbe bleue de la Fig. 18 ainsi que l'intervalle de confiance fixé à $\pm 1\sigma$. Nous remarquons que cette moyenne des profils sélectionnés est assez fidèle à la moyenne sur tout le jeu de données. Le profil moyen présenté ici résume la structure verticale typique de la turbulence sur l'ensemble de la période considérée.

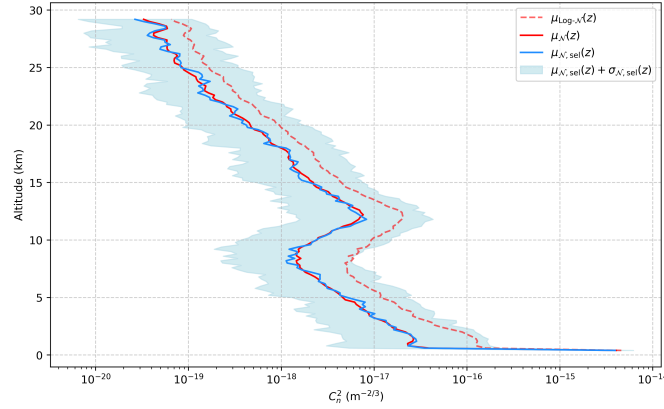


Fig. 18. – Comparaison de profils moyens de C_n^2 obtenus par différentes méthodes statistiques sur une année de mesures à Trappes (2020).

3.3 LA DÉTECTION DE COUCHES TURBULENTES

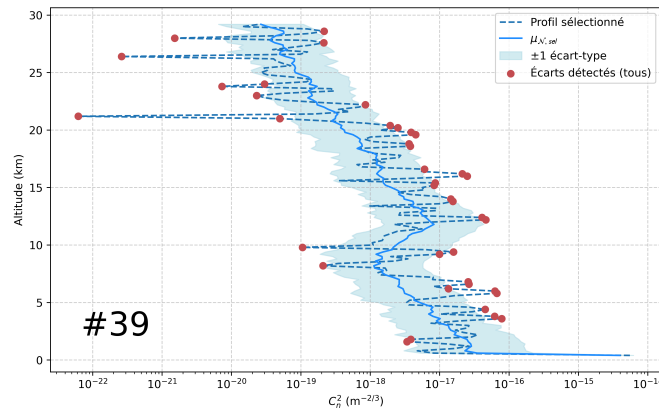


Fig. 19. – Écarts hors intervalle de confiance ($\pm 1\sigma$) détectés pour le profil de C_n^2 du 22/10/2020 à minuit

Dans cette partie, nous abordons le calcul du nombre de couches turbulentes que compte un profil de C_n^2 en fonction du profil moyen de référence. Pour la suite, nous associerons le terme « couches turbulentes » à tout dépassement contigu de l'intervalle de confiance autour de

$\mu_{\mathcal{N},\text{sel}}(z)$. L'adjonction des termes « positives » et « négatives » désigne les couches turbulentes dépassant respectivement $+1\sigma$ et $-1\sigma^*$.

Tout d'abord, pour le profil du 22/10/2020 à minuit sélectionné à titre d'exemple, la Fig. 19 représente l'ensemble de ses points dépassant l'intervalle de confiance de chaque côté ; il y en a 39 comme indiqué dans le coin inférieur droit de la figure.

Les Fig. 20 et Fig. 21 détaillent quant à elles respectivement le nombre de couches turbulentes positives et négatives du profil du 22/10/2020 à minuit : elles sont au nombre de 16 positives et 8 négatives. Le comptage a été effectué sur base des écarts positifs et négatifs contigus hors intervalle de confiance de la Fig. 19. Cependant, les couches turbulentes négatives ne représentent pas une métrique intéressante pour la future reconstruction artificielle de profils de C_n^2 artificiels. En effet, bien qu'une couche positive semble être de même amplitude qu'une couche négative, ce n'est pas le cas du fait de la nature logarithmique de l'échelle des abscisses. Ces dernières comportent parfois des pics jusqu'à quatre ordres de grandeurs inférieurs à la valeur du profil moyen de référence, ne diminuant ainsi que très peu la valeur du C_n^2 intégré et donc de paramètres intégraux tels que le paramètre de Fried r_0 . C'est pour cela que nous ne considérerons pour la suite que les couches turbulentes positives car ce sont elles qui ont une réelle incidence sur l'intégrale continue des profils de C_n^2 .

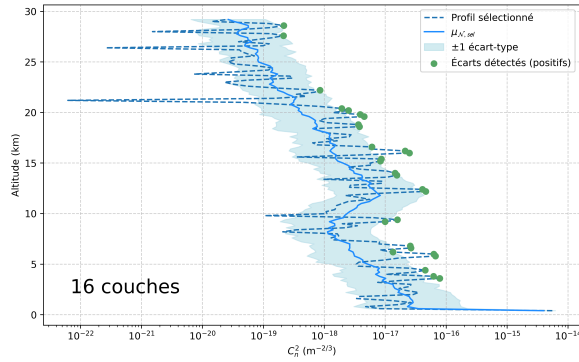


Fig. 20. – Couches turbulentes positives pour l'intervalle de confiance ($+1\sigma$) détectées pour le profil de C_n^2 du 22/10/2020 à minuit

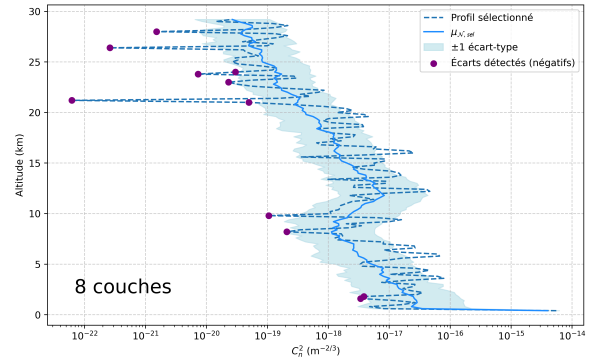


Fig. 21. – Couches turbulentes négatives pour l'intervalle de confiance ($+1\sigma$) détectées pour le profil de C_n^2 du 22/10/2020 à minuit

Nous définissons f appelé par la suite « facteur ». Faire varier ce **facteur** f nous permet de contrôler l'amplitude de l'intervalle de confiance et donc la sensibilité avec laquelle les écarts seront détectés. Par conséquent, le nombre mesuré de couches turbulentes ainsi que leur amplitude dépend fortement de la valeur choisie du facteur. Les figures précédentes détectaient les écarts de plus de $\pm f\sigma$ avec $f = 1$.

*Notons que par la suite, le facteur 1 sera sujet à modification.

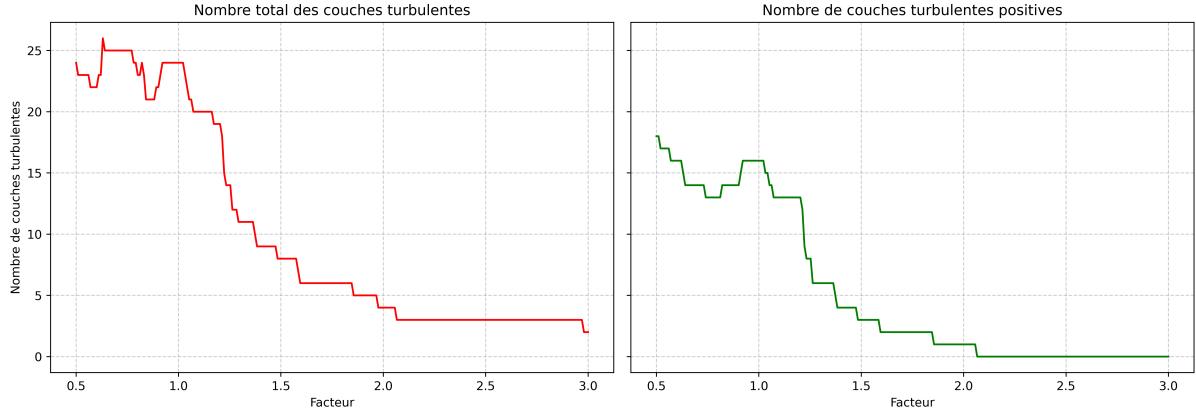


Fig. 22. – Nombre de couches turbulentes détectées dans le profil du 25/07/20 à minuit en fonction du facteur f utilisé. À gauche : nombre total de couches turbulentes ; à droite : nombres de couches turbulentes positives.

La Fig. 22 représente le nombre de couches turbulentes de tout type ainsi que le nombre de couches positives relevées en fonction du facteur. Nous constatons dans les deux cas que le nombre décroît avec le facteur malgré quelques brèves augmentations. Ces dernières sont dues au fait que lorsque le facteur augmente d'un pas, un point de C_n^2 au sein d'une couche passe parfois sous le seuil de détection. La couche est donc divisée en deux autres, augmentant ainsi le nombre mesuré. Au fur et à mesure que le facteur augmente, de plus en plus de points hors intervalle passent sous le seuil, réduisant ainsi progressivement le nombre total de couches.

La Fig. 23 illustre quant à elle l'évolution du nombre de couches turbulentes (totales, positives et négatives) en fonction de f pour l'ensemble du jeu de données. Pour chaque facteur, la moyenne de ce nombre ainsi que son écart type sont représentés. Comme attendu, le nombre de couches diminue avec l'augmentation de l'écart de confiance. La Fig. 24 représente la distribution du nombre de couches positives pour $f = 1$. Elle peut être vue comme une coupe de la courbe bleue pour ce facteur en abscisse. Nous remarquons une tendance normale pour cette distribution.

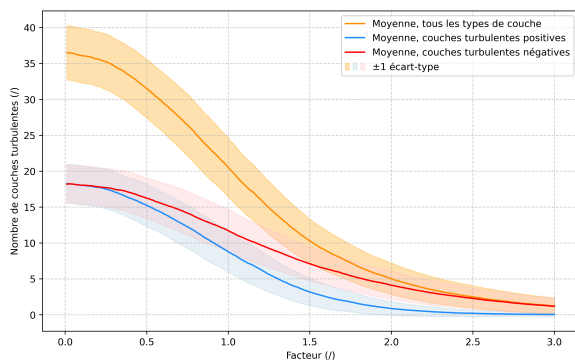


Fig. 23. – Évolution du nombre de couches turbulentes (totales, positives et négatives) en fonction de f pour l'ensemble du jeu de données

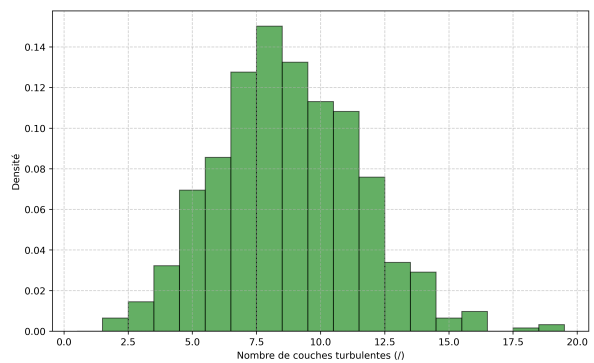


Fig. 24. – Distribution du nombre de couches turbulentes positives sur l'ensemble du jeu de données pour $f = 1$

3.4 LA CORRÉLATION AVEC $\mathcal{E}_0$ ET θ_0

Pour chaque profil de C_n^2 du jeu de données, la qualité de la visibilité ainsi que l'angle isoplanatique ont été calculés selon l'Eq. 80 et l'Eq. 81 et sont représentés en abscisses. Pour rappel, il s'agit de paramètres intégraux dépendant de l'intégrale continue d'un profil de C_n^2 . Pour ces analyses, trois valeurs de facteur ont été considérées, à savoir 0,5 ; 1,25 et 2. Nous nous attachons à présent à identifier les corrélations éventuelles avec différentes métriques de turbulence, présentées ci-après.

LA CORRÉLATION AVEC LE NOMBRE DE COUCHES TURBULENTES POSITIVES

La Fig. 25 décrit le nombre de couches turbulentes positives en fonction de la qualité de la visibilité pour les trois valeurs de facteur évoquées plus haut. Comme l'illustre la Fig. 22, nous remarquons à nouveau que plus le facteur est élevé, plus le nombre de couches turbulentes diminue. Cependant, nous n'observons aucune tendance claire entre ce nombre et $\mathcal{E}_0$ alors que pourtant, $\mathcal{E}_0 \propto \left(\int_0^\infty C_n^2(z) dz \right)^{5/3}$ et devrait, a priori, croître avec le nombre de couches turbulentes détectées.

En réalité, il suffit d'une couche turbulente à basse altitude pour augmenter considérablement $\mathcal{E}_0$ sans pour autant accroître le nombre de couches détectées. À l'inverse, un grand nombre de couches turbulentes détectées en haute altitude ne contribuent que très peu à la qualité de la visibilité du fait des faibles valeurs du profil moyen de référence et du seuil de détection à cette hauteur, alors que le nombre de couches positives augmente fortement.

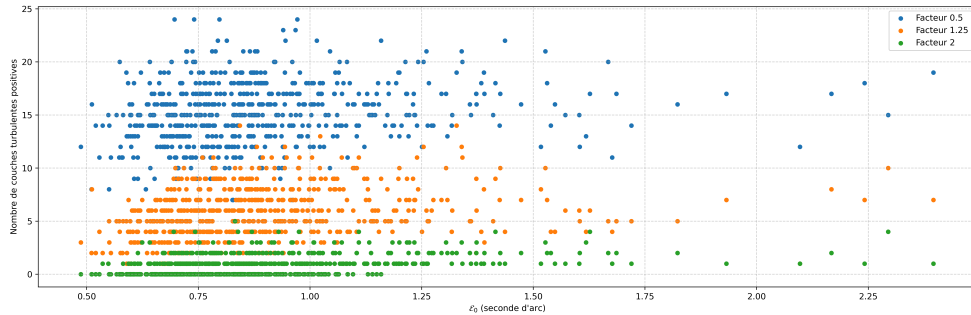


Fig. 25. – Nombre de couches turbulentes positives en fonction de la qualité de la visibilité pour plusieurs seuils de détection

La Fig. 26 décrit quant à elle la même métrique mais en fonction de l'angle isoplanatique. Le raisonnement est ici analogue à celui mené pour la qualité de la visibilité. La seule différence réside dans la pondération de l'intégrande par le facteur $z^{5/3}$, augmentant donc ainsi le poids des couches turbulentes à haute altitude malgré leur faible amplitude.

Plus globalement, ce résultat illustre bien le fait qu'une métrique discrète telle que le nombre de couches turbulentes positives n'est pas corrélée à un paramètre intégral où intervient une mesure d'intégrale continue comme $\mathcal{E}_0$ ou θ_0 . Cela est par ailleurs confirmé par la Fig. 36 où aucune corrélation linéaire n'est observée.

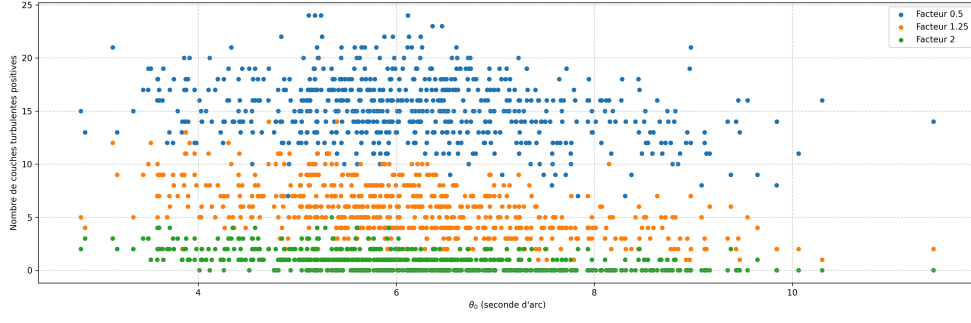


Fig. 26. – Nombre de couches turbulentes positives en fonction de l'angle isoplanatique pour plusieurs seuils de détection

LA CORRÉLATION AVEC LE RAPPORT DES AIRES

Pour un profil $C_n^2(h)$, le rapport des aires est défini comme suit :

$$R_f = \frac{\sum_{z_j \in \mathcal{D}_f} [C_n^2(z_j) - \text{seuil}_f(z_j)] \delta z}{\sum_{j=1}^n C_n^2(z_j) \delta z} = \frac{A_+}{A_{\text{tot}}} \quad (105)$$

avec $\mathcal{D}_f = \{z_j \mid C_n^2(z_j) > \mu_{\mathcal{N}, \text{sel}}(z_j) + \text{seuil}_f(z_j)\}$

avec $\text{seuil}_f(z) = \mu_{\mathcal{N}, \text{sel}}(z) + f\sigma_{\mathcal{N}, \text{sel}}(h)$, le seuil supérieur de détection et n , le nombre de couches d'indice j obtenues lors de la discrétisation de l'atmosphère, tel que défini sur la Fig. 53.

En d'autres termes, le rapport des aires est le rapport entre l'aire des couches turbulentes positives A_+ (calculée au-dessus du seuil) et l'aire totale A_{tot} du profil de C_n^2 considéré. Cela est illustré par la Fig. 27.

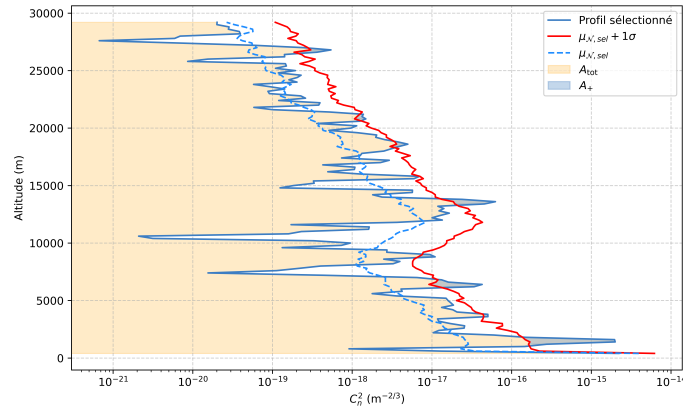


Fig. 27. – Profil du 25/07/20 à midi avec le profil moyen de référence $\mu_{\mathcal{N}, \text{ref}}$, le seuil supérieur $\mu_{\mathcal{N}, \text{ref}} + \sigma$ et l'aire totale

Analysons maintenant l'évolution de R_f lors de l'apparition d'une couche positive.

Pour une couche d'aire $\Delta A_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}_f$, nous avons :

$$R_{f, \mathcal{D}} = \frac{A_+ + \Delta A_{\mathcal{D}}}{A_{\text{tot}} + \Delta A_{\mathcal{D}}} = R_f + \frac{\Delta A_{\mathcal{D}}(1 - R_f)}{A_{\text{tot}} + \Delta A_{\mathcal{D}}} > R_f \quad (106)$$

L'apparition d'une telle couche contribue positivement au rapports des aires. Cette contribution ralentit si R_f est déjà élevé du fait du facteur $(1 - R)$.

Cependant, pour une couche d'aire $\Delta A' \notin \mathcal{D}_f$, nous avons :

$$R'_f = \frac{A_+}{A_{\text{tot}} + \Delta A'} < R_f \quad (107)$$

Dans ce cas, la présence de la couche en question contribue à la réduction du rapport des aires.

La Fig. 28 et la Fig. 29 décrivent le rapport des aires en fonction, respectivement, de la qualité de la visibilité et de l'angle isoplanatique pour trois valeurs de f différentes. Pour la première figure, nous observons que pour $f = 0,5$, une tendance se dégage pour les profils très turbulents, en l'occurrence lorsque $\mathcal{E}_0 > 0,75$. Le rapport des aires augmente alors progressivement pour tendre vers 1. En effet, beaucoup de couches turbulentes positives sont détectées et contribue donc grandement à A_+ .

Pour des valeurs de f plus élevées, une tendance similaire est observée mais de manière moins marquée. En effet, moins de couches turbulentes positives sont détectées, ce qui diminue la valeur du rapport des aires par l'Eq. 107. Par exemple, lorsque $f = 2$, comme aucune couche n'est détectée pour une partie des profils, le rapport des aires est nul.

Cependant, pour la Fig. 29, nous n'observons aucune tendance. En effet, même si le rapport des aires est élevé, les couches turbulentes de faibles altitudes ne contribuent que très peu au calcul de l'intégrale alors et sont donc invisibilisées.

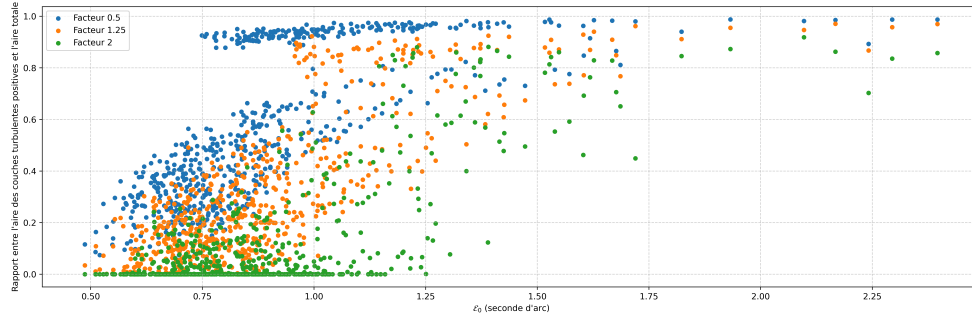


Fig. 28. – Rapport des aires des couches turbulentes positives en fonction de la qualité de la visibilité pour plusieurs seuils de détection

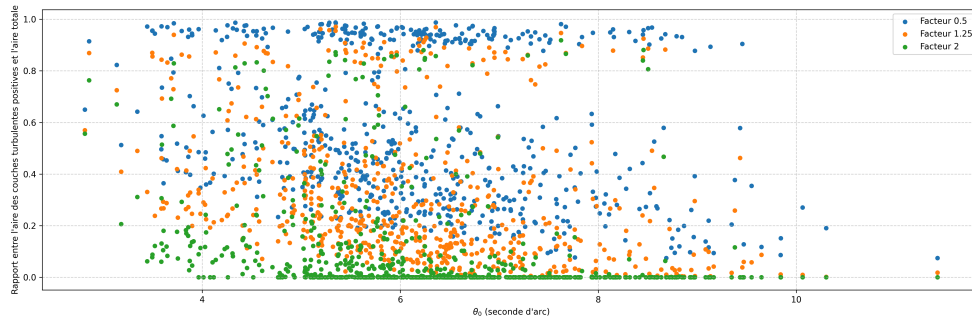


Fig. 29. – Rapport des aires des couches turbulentes positives en fonction de l'angle isoplanatique pour plusieurs seuils de détection

Pour $f = 1$, la Fig. 30 met en perspective trois indicateurs dont la qualité de la visibilité et le rapport des aires. Nous retrouvons la tendance décrite précédemment : le rapport des aires (en vert) tend à augmenter avec $\mathcal{E}_0$ (en bleu) et il y a une forte dispersion des valeurs excepté pour les $\mathcal{E}_0$ élevés.

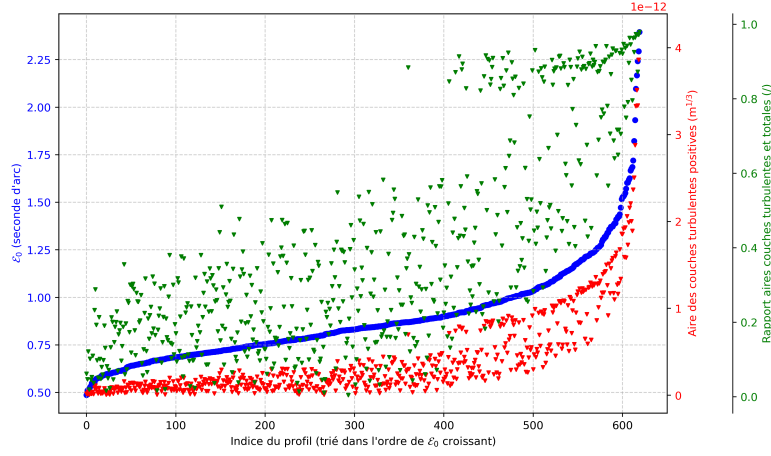


Fig. 30. – Évolution de la qualité de la visibilité, de l'aire des couches turbulentes positives et du rapport des aires pour $f = 1$. Les profils sont triés par $\mathcal{E}_0$ croissants.

LA CORRÉLATION AVEC L'AIRES DES COUCHES TURBULENTES

L'aire des couches turbulentes positives est définie, sur base de la définition du rapport des aires de l'Eq. 105, comme suit :

$$A_+ = \sum_{z_j \in \mathcal{D}_f} [C_n^2(z_j) - \text{seuil}_f(z_j)] \delta z \quad (108)$$

$$\text{avec } \mathcal{D}_f = \{z_j \mid C_n^2(z_j) > \mu_{\mathcal{N}, \text{sel}}(z_j) + \text{seuil}_f(z_j)\}$$

Autrement dit, il s'agit de l'aire du profil de C_n^2 dépassant le seuil de détection.

La Fig. 31 et la Fig. 32 décrivent le rapport des aires en fonction, respectivement, de la qualité de la visibilité et de l'angle isoplanatique pour trois valeurs de f différentes. Ici, nous remarquons d'emblée une tendance sur ces deux figures.

Pour la première, pour $f = 0,5$ et $f = 1,25$, l'aire des couches turbulentes positives croît presque linéairement avec la qualité de la visibilité. Le coefficient de corrélation indiqué sur la Fig. 36* vaut 0,94 pour $f = 1$, indiquant une corrélation linéaire élevée entre ces deux métriques. Cela s'explique par le fait que plus $\mathcal{E}_0$ est élevé — et donc une $\int_0^\infty C_n^2(z) dz$ importante — plus une part significative du profil dépasse le seuil de détection, contribuant ainsi à une augmentation de A_+ . Cependant, pour un facteur plus important, une faible part du profil seulement franchit le seuil et ce même pour des profils assez turbulents à haut $\mathcal{E}_0$. Cela explique la dispersion des points proches de 0 excepté pour certaines valeurs très élevées de qualité de la visibilité où l'aire positive augmente significativement du fait du haut niveau de turbulence. Nous retrouvons cette tendance pour $f = 1$ sur la Fig. 30.

*Pour rappel, le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson mesure la corrélation linéaire entre deux variables aléatoires. Une corrélation nulle ne signifie pas l'indépendance entre elles.

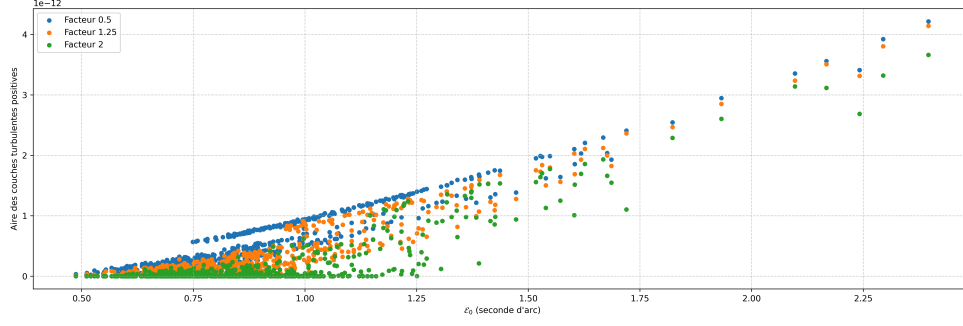


Fig. 31. – Aire des couches turbulentes positives en fonction de la qualité de la visibilité pour plusieurs seuils de détection

Pour la Fig. 32, nous ne décelons aucune corrélation. La justification est identique à précédemment avec le rapport des aires : les couches de haute altitude sont favorisées sur celles de faible altitude de par la pondération en $z^{\frac{5}{3}}$. Par conséquent, même si un profil est très turbulent avec une aire positive A_+ élevée, θ_0 peut être élevé.

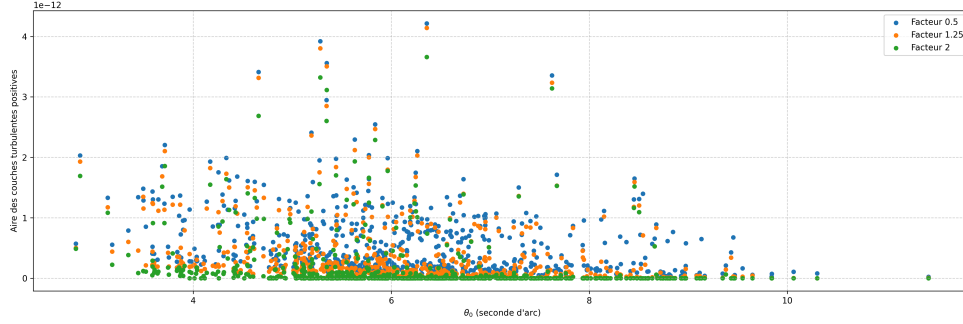


Fig. 32. – Aire des couches turbulentes positives en fonction de l'angle isoplanatique pour plusieurs seuils de détection

CORRÉLATION AVEC L'ALTITUDE DE LA COUCHE LA PLUS TURBULENTE

Une métrique intéressante à analyser est l'altitude de la couche positive la plus turbulente. La Fig. 33 et la Fig. 34 la représentent en fonction de $\mathcal{E}_0$ et θ_0 pour trois valeurs de facteur. Nous remarquons que pour $f = 2$, un grand nombre de profils ont leur couche la plus turbulente à $z = 0$. Cela s'explique par le fait qu'aucune couche n'est détectée car le seuil est très élevé, dès lors, l'altitude est fixée à zéro, indiquant qu'il n'y a eu aucune détection. Nous remarquons aussi ceci sur la Fig. 31 et la Fig. 28, où les métriques valent aussi zéro pour ces mêmes profils avec $f = 2$.

Nous ne décelons cependant aucune tendance si ce n'est que plus le facteur est faible plus l'altitude de la première couche turbulente semble être faible. Cela s'explique par le fait que comme le seuil de détection est plus faible, plus de couches sont détectées et ce, pour la plus turbulente, à basse altitude.

Sur la Fig. 35, nous remarquons que plus l'aire des couches turbulentes positives est élevée (et donc $\mathcal{E}_0$), plus les couches ont tendance à se situer à faible altitude. Néanmoins, certains profils échappent à cette tendance.

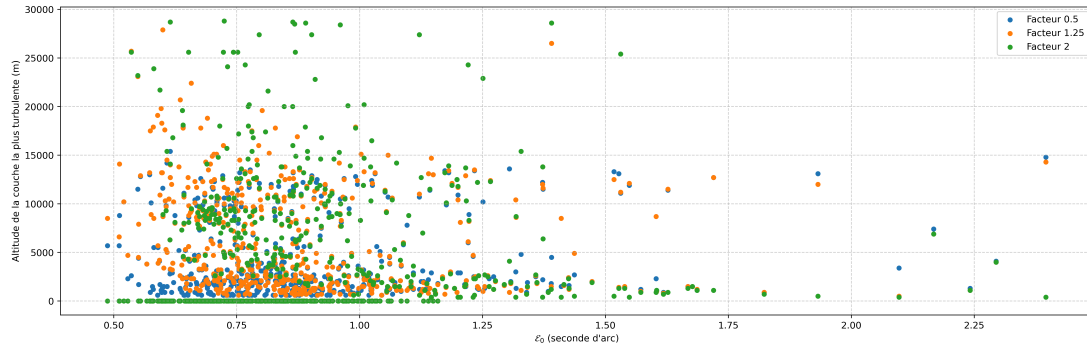


Fig. 33. – Altitude de la couche positive la plus turbulente en fonction de la qualité de la visibilité pour plusieurs seuils de détection

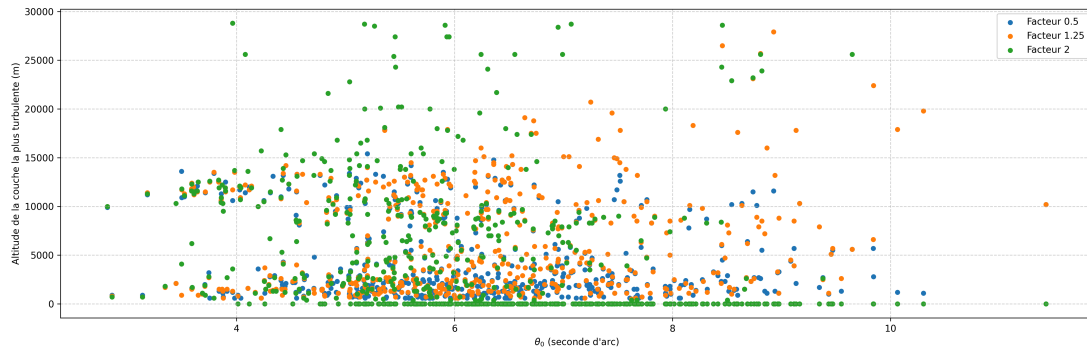


Fig. 34. – Altitude de la couche positive la plus turbulente en fonction de l'angle isoplanatique pour plusieurs seuils de détection

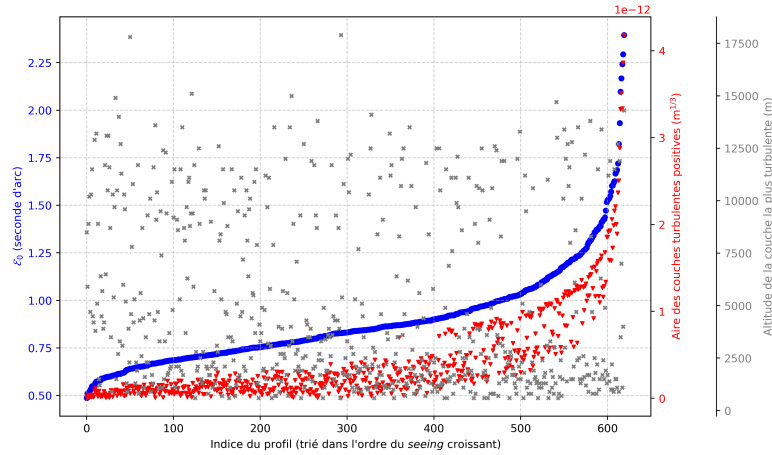


Fig. 35. – Évolution de la qualité de la visibilité, de l'aire des couches turbulentes positives et de l'altitude de la couche positive la plus turbulente pour $f = 1$. Les profils sont triés par $\mathcal{E}_0$ croissants.

3.5 LA MATRICE DE CORRÉLATION

La Fig. 36 représente la matrice de corrélation pour $f = 1$ entre les différentes métriques abordées plus haut. Comme attendu, nous observons une forte corrélation linéaire entre $\mathcal{E}_0$ et A_+ de même avec le rapport des aires, bien que cela soit inférieur à cause de la contribution

de A_{tot} . Hormis A_+ et le rapport des aires qui présente un coefficient de corrélation 0,84 de par leur lien mathématique, aucun lien linéaire n'est mis en évidence entre les métriques de turbulence autres que $\mathcal{E}_0$ et θ_0 .

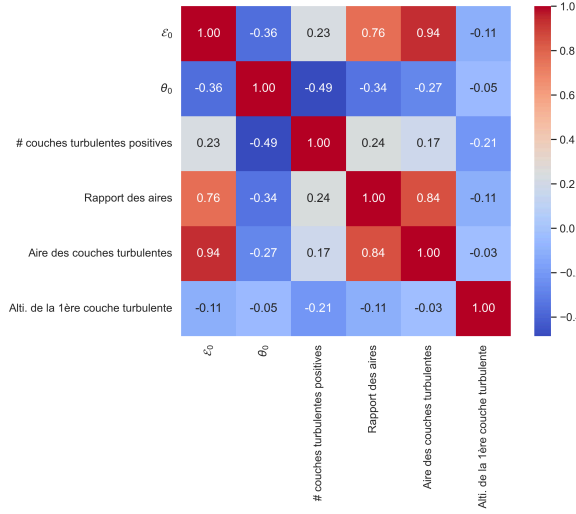


Fig. 36. – Matrice de corrélation de différentes métriques de turbulence pour $f = 1$

Cependant, le coefficient de corrélation entre deux métriques dépend fortement de la valeur de facteur considérée : cela est illustré par la Fig. 37 et la Fig. 38 pour la qualité de la visibilité ou l'angle isoplanatique avec différentes autres métriques.

Nous remarquons que, pour un facteur faible, l'aire positive A_+ est très élevée et capte une grande portion du profil turbulent. Alors, elle est globalement corrélée linéairement avec la qualité de la visibilité. Dès que le facteur augmente, la part captée diminue et A_+ devient de moins en moins liée à $\mathcal{E}_0$. Cette même tendance s'observe pour les métriques présentant une dépendance au C_n^2 intégré telles que le rapport des aires et A_+ .

Comme discuté dans le Chapitre 3.4, le nombre de couches turbulentes positives n'est corrélé ni avec $\mathcal{E}_0$, ni avec θ_0 . De même, aucune corrélation linéaire n'est observée avec l'altitude de la couche la plus turbulente.

Le lecteur trouvera en annexe au Chapitre B le corrélogramme illustrant les relations croisées entre les différentes métriques pour trois valeurs de f . Cette représentation permet de visualiser certaines relations déjà abordées ainsi que d'autres, moins essentielles à développer dans le corps principal de ce travail.

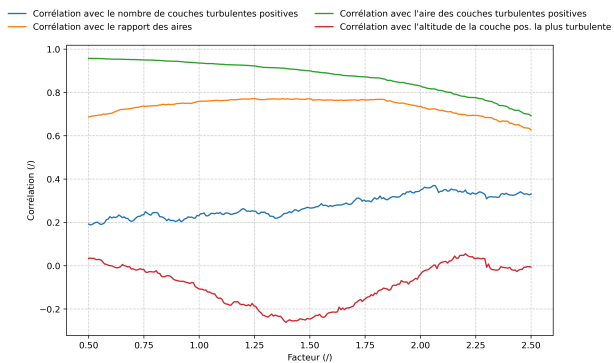


Fig. 37. – Évolution de la corrélation entre $\mathcal{E}_0$ et différentes métriques en fonction de f

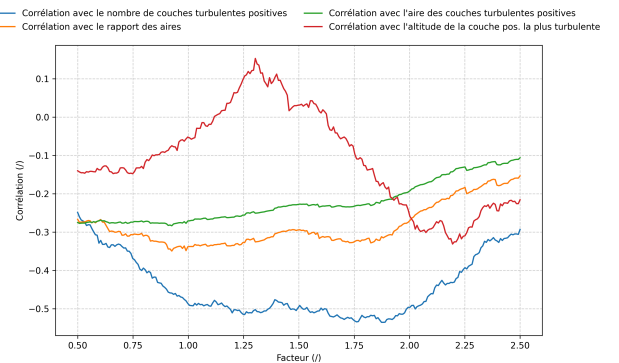


Fig. 38. – Évolution de la corrélation entre θ_0 et différentes métriques en fonction de f

3.6 LES DISTRIBUTIONS RELATIVES AUX TROIS PREMIÈRES COUCHES TURBULENTES

Du jeu de données sont déduites les distributions des altitudes et des logarithmes des aires des trois couches les plus turbulentes. Celles-ci sont représentées à la Fig. 39 et la Fig. 40 pour $f = 1$. Pour rappel, dans ce travail, la couche la plus turbulente est définie comme la couche détectée — c'est-à-dire dont la valeur de C_n^2 dépasse $\mu_{\mathcal{N},\text{sel}}$ — et dont l'aire positive $A_{+,1}$ est la plus élevée.

Pour la distribution des altitudes, nous constatons visuellement qu'elles ne suivent ni une loi normale, ni une loi log-normale. Dans les trois cas, il y a diminution des occurrences pour une altitude d'environ 7 à 8km. Cette altitude correspond à la décroissance du C_n^2 juste en dessous du pic de turbulence situé à 10km du profil moyen de turbulence $\mu_{\mathcal{N},\text{sel}}(h)$ illustré par la courbe bleue de la Fig. 18. Pour la couche la plus turbulente, la majorité des occurrences se situe au niveau des faibles altitudes inférieures à 2,5km. Pour les deuxième et troisième couches, la concentration se situe à altitudes plus élevées, réparties autour de la décroissance de 7,5km.

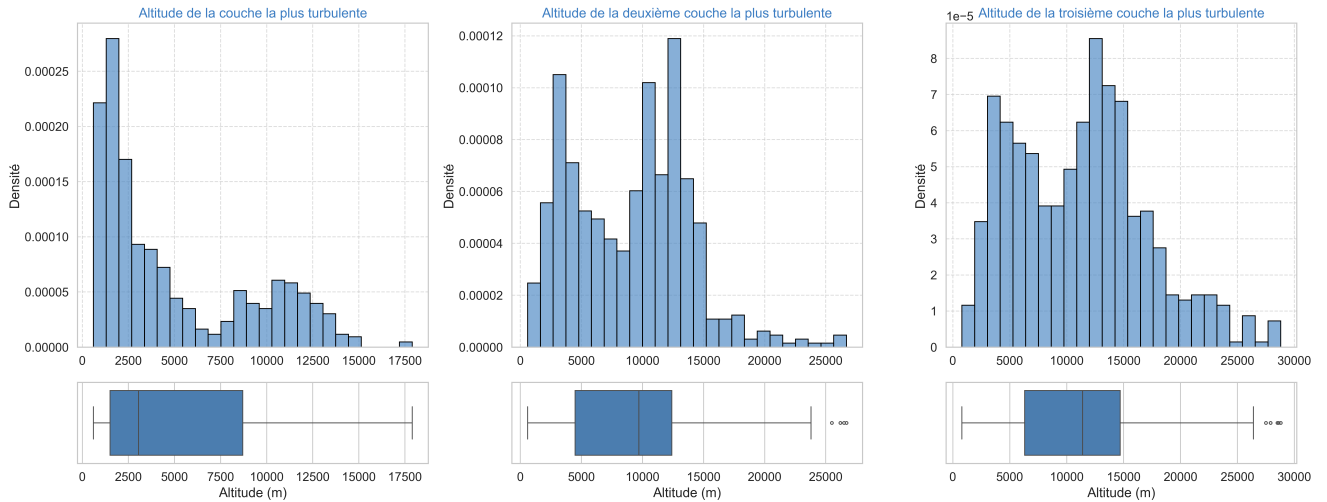


Fig. 39. – Distributions et boîte à moustaches de l'altitude des trois couches les plus turbulentes pour $f = 1$

Pour la distribution des aires des couches en question, nous observons une tendance globalement normale. En effet, la moyenne empirique est très proche de la médiane, représentée au centre de la boîte à moustaches. Cependant, la queue de la distribution est plus marquée pour les couches de rang supérieur, traduisant une plus grande dispersion des valeurs et donc une variabilité accrue de leur magnitude. Ces valeurs de queue apparaissent comme des points isolés car elles correspondent à des valeurs extrêmes par rapport au reste de l'échantillon. Elles ne sont pas nécessairement aberrantes mais reflètent la nature asymétrique de la distribution. Pour les trois couches, nous mesurons respectivement des moyennes de $10^{-12,94}$, $10^{-13,54}$ et $10^{-13,93}$. Cela signifie une diminution d'un facteur 3.98 de l'aire moyenne entre la première et de la deuxième, et d'un facteur 2,45 entre la deuxième et la troisième.

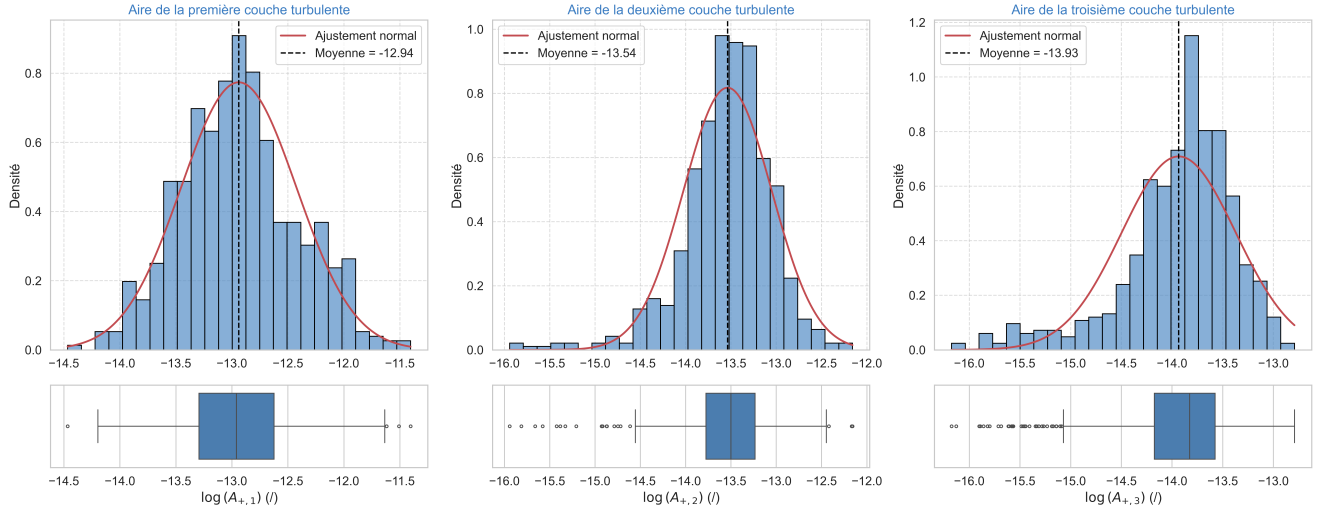


Fig. 40. – Distributions et boîte à moustaches du logarithme des aires des trois couches les plus turbulentes pour $f = 1$

En conclusion, ces distributions mettent en évidence des comportements statistiques distincts entre les altitudes et les aires des couches. Les altitudes présentent des concentrations spécifiques selon le rang de la couche, semblable à la structure verticale caractéristique du profil moyen de référence $\mu_{\mathcal{N},\text{ref}}$. Les aires, quant à elle, suivent globalement une distribution normale en échelle logarithmique (donc log-normale en échelle linéaire) avec cependant une dispersion élevée des valeurs pour les couches de rang supérieur.

Ces distributions s'avéreront essentielles dans le processus de reconstruction artificielle de profils de C_n^2 détaillé dans le Chapitre 4.

4. RECONSTRUCTION DE PROFILS DE TURBULENCE

Grâce aux résultats obtenus dans l'étude statistique menée dans le Chapitre 3, nous disposons maintenant des distributions statistiques de différentes métriques de turbulence, lesquelles nous permettent de reconstruire artificiellement des profils de C_n^2 fidèles aux mesures du jeu de données.

Dans ce chapitre, nous (i) introduirons les métriques de turbulence considérées ainsi que leurs distributions conjointes et la méthode employée pour les estimer. Sur cette base, nous (ii) développerons ensuite une méthodologie de reconstruction artificielle, en intégrant éventuellement diverses contraintes sur cette dernière.

4.1 LES DISTRIBUTIONS CONJOINTES

Le choix des paramètres statistiques utilisés pour reconstruire artificiellement des profils turbulents de $C_n^2(z)$ repose sur les conclusions de l'étude statistique menée dans le Chapitre 3. Nous avons montré que certaines métriques intégrées, obtenues par des intégrales discrètes du profil telles que l'aire des turbulences positives (supérieur au seuil de détection) ou encore le rapport des aires, présentent les corrélations les plus fortes avec les paramètres intégraux comme la qualité de la visibilité ou l'angle isoplanatique.

Pour rappel, l'aire positive est définie comme :

$$A_+ = \sum_{z_j \in \mathcal{D}_f} [C_n^2(z_j) - (\mu_{\mathcal{N},\text{sel}}(z) + f\sigma_{\mathcal{N},\text{sel}}(h))] \delta z \quad (109)$$

avec $\mathcal{D}_f = \{z_j \mid C_n^2(z_j) > \mu_{\mathcal{N},\text{sel}}(z_j) + \text{seuil}_f(z_j)\}$

et le rapport des aires, quant à lui, s'écrit :

$$R_f = \frac{A_+}{\sum_{j=1}^n C_n^2(z_j) \delta z} = \frac{A_+}{A_{\text{tot}}} \quad (110)$$

Cependant, ces métriques ne fournissent aucune information sur la répartition verticale de la turbulence. C'est pourquoi nous avons également retenu des métriques concernant les trois couches les plus turbulentes, à savoir, pour chacune d'entre elles :

- leur altitude z_k , calculée comme étant la moyenne des altitudes des échantillons de C_n^2 au sein de la couche turbulente détectée
- le logarithme de leur aire positive $\log(A_{+,k})$

Ces paramètres, bien que non directement liés à une intégrale pondérée du profil complet, influencent fortement l'impact de la turbulence lors d'une propagation par écrans de phase telle que détaillée dans le Chapitre 5.2. Dans le cas d'un lien descendant, lorsqu'une couche turbulente est située à haute altitude, les perturbations de phase induites se propagent sur une distance

plus grande que si elles étaient proches du sol. Ces dernières contribuent significativement à l'amplitude du champ reçu comme décrit par la diffraction de Fresnel de l'Eq. 64.

Dans la suite de ce travail, nous retenons la valeur $f = 1$ afin de privilégier une reconstruction fidèle de l'impact réel des couches turbulentes sur la propagation. Un facteur trop faible comme $f = 0,5$ mène à une surreprésentation des couches turbulentes détectées comme discuté dans le Chapitre 3. Au contraire, un facteur trop élevé réduit excessivement leur importance, menant à une sous-estimation voire à invisibilisation des couches turbulentes positives.

Pour reconstruire des profils turbulents, nous ne pouvons pas utiliser les différentes distributions des métriques indépendamment. En effet, nous devons tenir compte de la dépendance statistique entre certaines d'entre elles comme par exemple les altitudes et les aires des couches ou encore A_+ et R_f . Pour cela, nous utilisons les distributions conjointes de ces couples de variables aléatoires.

Mathématiquement, pour deux variables aléatoires X et Y , la fonction de répartition s'écrit (voir par exemple [18]) :

$$F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) \quad (111)$$

En dérivant cette expression, nous obtenons la **densité de probabilité conjointe**, aussi appelée distribution conjointe :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (112)$$

De cette distribution, nous pouvons en dériver les lois marginales de X et de Y . Elle s'obtient par projection orthogonale de f_{XY} sur l'espace unidimensionnel de X ou de Y . Elles s'expriment comme suit :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad (113)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \quad (114)$$

La distribution conjointe rend compte des lois marginales ainsi que de leur dépendance mutuelle. C'est elle qui est utilisée pour la reconstruction.

Les Fig. 41, Fig. 42 et Fig. 43 représentent, pour les trois premières couches les plus turbulentes, les densités de probabilité conjointes entre Z_k et $\mathcal{A}_{+,k}$.^{*} Y sont également représentées les lois marginales. Pour la couche la plus turbulente ($k = 1$), les régions de fortes densités indiquent les couples altitude-aire les plus probables mettant ainsi en évidence que les couches de faible altitude ont tendance à avoir des aires plus élevées. Pour $k = 2$ et $k = 3$, nous remarquons un décalage des couches vers des altitudes plus élevées pour des aires plus faibles. Cela confirme la hiérarchie verticale des couches turbulentes mise en évidence dans le Chapitre 3.6.

^{*} Z_k et $\mathcal{A}_{+,k}$ représentent les variables aléatoires tandis que z_k et $A_{+,k}$ en sont les réalisations.

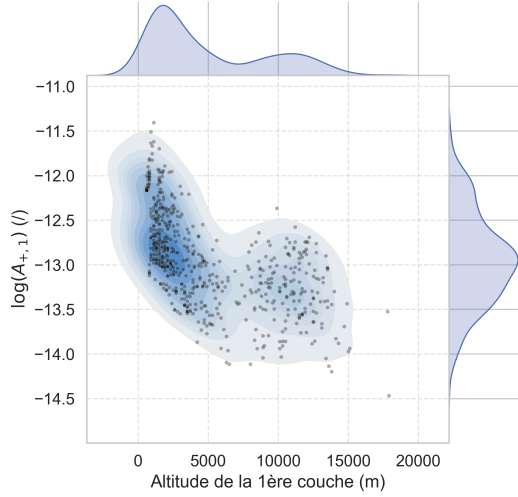


Fig. 41. – Distribution conjointe de l'altitude de la couche la plus turbulente et du logarithme de son aire $\log(A_{+,1})$

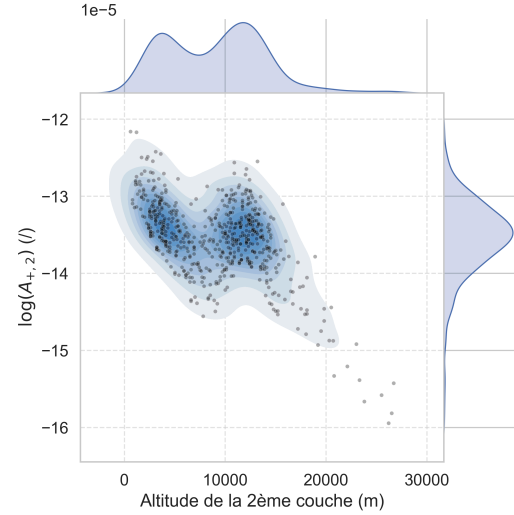


Fig. 42. – Distribution conjointe de l'altitude de la deuxième couche la plus turbulente et du logarithme de son aire $\log(A_{+,2})$

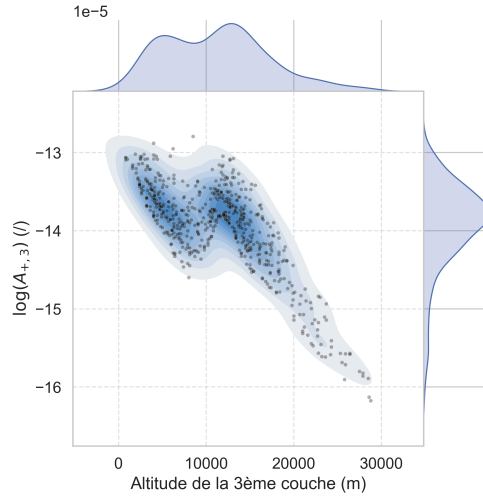


Fig. 43. – Distribution conjointe de l'altitude de la troisième couche la plus turbulente et du logarithme de son aire $\log(A_{+,3})$

Les distributions conjointes représentées sur ces figures ont été obtenues à l'aide de la méthode d'**estimation par noyau**. Il s'agit d'une méthode permettant d'estimer la fonction de densité de probabilité d'un ensemble de données à partir d'échantillons. Elle repose sur la somme pondérée de fonctions « noyau » centrées sur chaque point, produisant ainsi une approximation lisse de la distribution réelle.

Dans le cas univarié, pour des n échantillons $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'estimateur s'écrit tel que défini par Silverman [19] :

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x_i, t) \quad (115)$$

avec un noyau $K(x_i, t) \in [0, \infty]$, une fonction telle que $\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dt = 1$. Par conséquent, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K(x_i, t) dt = 1 \quad (116)$$

assurant ainsi la normalisation de l'estimateur de la densité de probabilité.

Comme expliqué dans [20], en supposant que le noyau K est une fonction symétrique*, nous pouvons écrire :

$$K_{\text{sym}}(x, t) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x - t}{h}\right) \quad (117)$$

avec h , la fenêtre qui détermine le lissage appliqué au noyau K . La valeur de h doit être choisie judicieusement afin d'éviter le sous-lissage et sur-lissage. L'un engendre une distribution bruitée et l'autre une distribution lisse masquant les détails de la structure réelle de densité de probabilité.

Dans notre cas, en se basant sur [20], le noyau choisi est une fonction gaussienne de type :

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (118)$$

Cette méthode est illustrée par la Fig. 44 où l'on remarque bien l'application d'une moyenne sur les différents noyaux appliqués à chaque échantillon.

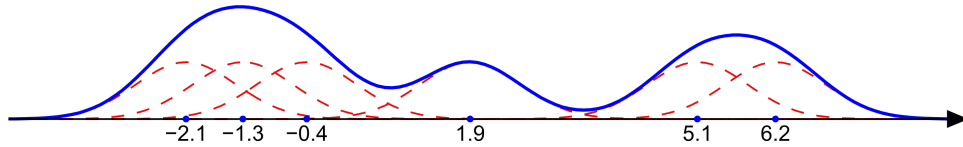


Fig. 44. – Illustration du principe de l'estimation par noyau†

Enfin, est utilisée la règle de Scott [21] qui, dans le cas d'une estimation univariée, s'écrit :

$$h = \hat{\sigma} n^{-1/5} \quad (119)$$

avec $\hat{\sigma}$, l'estimation de la variance et n , le nombre d'échantillons. Cette règle, en plus d'être simple, minimise l'erreur quadratique moyenne intégrée‡, et nous permet ainsi d'éviter les lissages extrêmes.

Dans le cas multivarié de dimension d , cette méthode est utilisée mais généralisée sous une forme qui s'écrit :

$$\hat{f}(\vec{x}) = \frac{1}{n h_1 \dots h_d} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d K\left(\frac{x_j - x_{i,j}}{h_j}\right) \quad (121)$$

avec $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)^T$. La règle de Scott s'écrit alors ainsi :

$$\hat{h}_i = \hat{\sigma}_i n^{-1/d+4} \quad (122)$$

*Ce qui est généralement le cas dans la plupart des applications pratiques selon [20].

†Source : Wikimedia Commons, « Parzen window illustration », domaine public, disponible [ici](#)

‡L'erreur quadratique moyenne intégrée (EQMI) est définie comme [20] :

$$\text{EQMI}(\hat{f}(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{EQM}_x(\hat{f}) dx \quad (120)$$

avec l'erreur quadratique moyenne $\text{EQM}_x(\hat{f}(x)) = \mathbb{E}[(\hat{f}(x) - f(x))^2] = [\text{biais}(\hat{f}(x))]^2 + \text{var}_x(\hat{f}(x))$.

Lorsque $d = 2$, cela donne :

$$\hat{f}(\vec{x}) = \hat{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{nh_1h_2} \sum_{i=1}^n \left[K\left(\frac{x_1 - x_{i,1}}{h_1}\right) K\left(\frac{x_2 - x_{i,2}}{h_2}\right) \right] \quad (123)$$

4.2 LA MÉTHODOLOGIE

Nous avons choisi de reconstruire des profils de C_n^2 par la création de trois couches turbulentes. Au-delà de ce nombre, les couches atteignent des magnitudes de plus en plus faibles, ne contribuant plus que très peu à l'intégrale des profils.

Pour chaque couche $k \in \{1, 2, 3\}$, nous considérons le couple de variables aléatoires $(Z_k, \mathcal{A}_{+,k})$ représentant l'altitude et l'aire de la k -ième couche, de telle sorte que :

$$(Z_k, \mathcal{A}_{+,k}) \sim \hat{f}_{Z_k, \mathcal{A}_{+,k}}(z, A_+) \quad (124)$$

avec $\hat{f}_{Z_i, \mathcal{A}_{+,i}}$, la densité de probabilité conjointe estimée par noyau. Ainsi, nous conservons la corrélation statistique entre son altitude et son aire positive. Un tirage dans la distribution conjointe $\hat{f}_{Z_i, \mathcal{A}_{+,i}}$ fournit une réalisation $(z_k, A_{+,k})$.

Ensuite, sur base de ce couple, nous produisons une fonction gaussienne centrée en z_k et d'écart type σ visant à répliquer artificiellement la couche k en question. Cette dernière s'écrit comme :

$$L'_k(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - z_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (125)$$

En outre, nous avons dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_k(z) dz = 1 \quad (126)$$

Pour que la couche soit d'aire adéquate, nous multiplions par $A_{+,k}$ pour obtenir :

$$L_k(z) = \frac{A_{+,k}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - z_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (127)$$

Nous avons fixé $\sigma = 400$. Ce choix, bien qu'arbitraire, reflète la volonté d'éviter les largeurs trop importantes, et des couches trop fines qui concentreraient toute la turbulence dans un intervalle réduit.

Une fois les k couches créées, nous les ajoutons à un profil d'Hufnagel-Valley 5/7 noté $HV(z)$ tel que défini par la Fig. 10. Ainsi, nous en dérivons notre profil de C_n^2 reconstruit :

$$\begin{aligned} C_{n,r}^2(z) &= HV(z) + \sum_{i=1}^k L_i(z) \\ &= HV(z) + \sum_{i=1}^k \frac{A_{+,i}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - z_i)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (128)$$

4.2.1 UNE PREMIÈRE RECONSTRUCTION

La première reconstruction, illustrée par la Fig. 47, est celle décrite ci-dessous, avec $k = 3$. Nous remarquons que cette dernière est conforme à la méthodologie présentée.

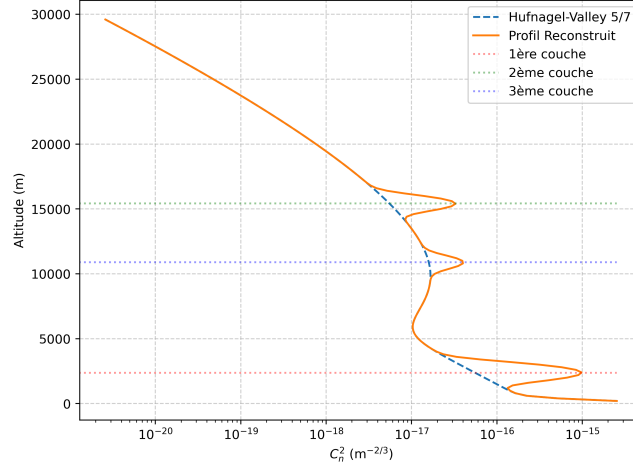


Fig. 45. – Profil reconstruit pour les trois premières couches les plus turbulentes

4.2.2 UNE CONTRAINTE SUR L'AIRE TOTALE POSITIVE

Cependant, la méthode précédemment décrite comporte quelques limites. En effet, certains tirages simultanés de couples $(z_k, A_{+,k})$ peuvent donner des reconstructions où l'aire totale des trois couches $A_{+,tot}$ n'est pas cohérente avec les profils du jeu de données.

Pour cela, nous estimons par noyau la distribution de l'aire totale positive $\mathcal{A}_{+,tot}$ de l'ensemble du jeu de données. Nous avons alors :

$$\mathcal{A}_{+,tot} \sim \hat{f}_{\mathcal{A}_+}(A_+) \quad (129)$$

En plus du tirage des $(z_k, A_{+,k})$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$, nous tirons de cette distribution, représentée sur la Fig. 46, une aire A_+ qui nous servira de référence pour adapter le profil reconstruit.

Si l'on note la somme de l'aire des trois couches :

$$A_{+,L} = A_{+,1} + A_{+,2} + A_{+,3}, \quad (130)$$

alors un facteur d'échelle χ est calculé :

$$\chi = \frac{A_{+,tot}}{A_{+,L}} \quad (131)$$

et appliqué à l'aire de chacune des couches reconstruites :

$$A'_{+,k} = \chi A_{+,k} \quad (132)$$

Sur base des définitions du Chapitre 4.2, nous obtenons alors un profil reconstruit $C_{n,r}^{2'}(z)$, représenté par la Fig. 46, s'écrivant :

$$C_{n,r}^{2'}(z) = \text{HV}(z) + \sum_{i=1}^k L_i'(z) = \text{HV}(z) + \sum_{i=1}^k \chi L_i(z) \quad (133)$$

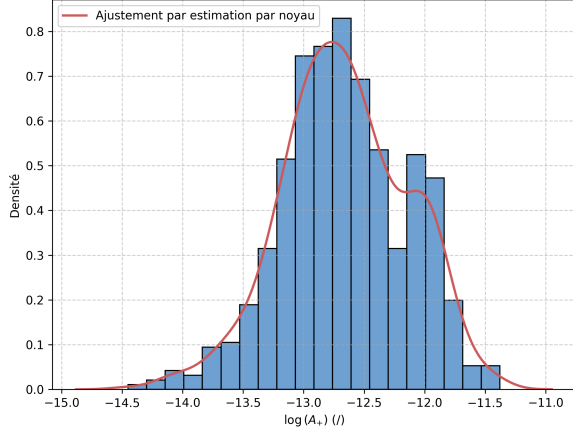


Fig. 46. – Distribution de l'aire positive A_+ pour l'ensemble du jeu de données pour $f = 1$

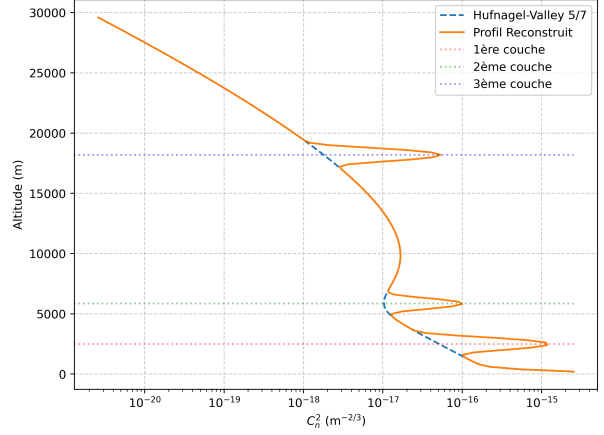


Fig. 47. – Profil reconstruit pour les trois premières couches les plus turbulentes avec une contrainte sur l'aire totale positive $A_{(+,\text{tot})}$

4.2.3 UNE CONTRAINTES SUR L'AIRES TOTALE POSITIVE ET LE RAPPORT DES AIRES

La contrainte sur l'aire positive totale A_+ garantit la cohérence de l'amplitude des couches turbulentes via leur somme $A_{+,L}$. Néanmoins, cette seule contrainte ne permet pas de contrôler la cohérence de l'intégrale totale du profil reconstruit.

Nous introduisons alors une contrainte supplémentaire portant sur le rapport des aires tel que défini par l'Eq. 105 :

$$R = \frac{A_{+, \text{tot}}}{A_{\text{tot}}} \quad (134)$$

avec $A_{+, \text{tot}}$, l'aire positive totale et $A_{\text{tot}} = \int C_n^2(z) dz$, l'aire totale du profil de C_n^2 .

Nous estimons ensuite par noyau la distribution conjointe, représentée par la Fig. 48, sur l'ensemble du jeu de données :

$$(\mathcal{A}_{+, \text{tot}}, \mathcal{R}) \sim \hat{f}_{\mathcal{A}_+, \mathcal{R}}(A_+, R) \quad (135)$$

De cette densité de probabilité conjointe est tiré un couple $(A_{+, \text{tot}}, R)$ afin de prendre en compte la dépendance statistique entre ces deux valeurs. L'aire totale positive $A_{+, \text{tot}}$ est utilisée comme précédemment pour le calcul d'un facteur d'échelle χ appliqué aux couches turbulentes reconstruites :

$$A'_{+,k} = \chi A_{+,k} \quad (136)$$

Ensuite, afin d'intégrer la contrainte portant sur R , nous appliquons un facteur de mise à l'échelle η sur $\text{HV}(z)$. En partant de la définition du rapport R , nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
R &= \frac{A_{+,tot}}{A_{tot}} = \frac{A_{+,tot}}{\eta A_{HV} + A_{+,tot}} \\
\iff \eta &= \frac{A_{+,tot}}{A_{HV}} \left(\frac{1}{R} - 1 \right)
\end{aligned}
\tag{137}$$

avec $A_{HV} = \int HV(z) dz$.

Finalement, le produit reconstruit s'écrit :

$$\begin{aligned}
C_{n,r}^{2''}(z) &= \eta HV(z) + \sum_{i=1}^k L'_i(z) \\
&= \eta HV(z) + \sum_{i=1}^k \chi L_i(z)
\end{aligned}
\tag{138}$$

Cette double contrainte permet de mieux contrôler la proportion entre les couches turbulentes reconstruites et le profil de support d'Hufnagel-Valley 5/7, assurant ainsi une cohérence accrue avec le jeu de données.

Un exemple de reconstruction artificielle d'un profil de C_n^2 est illustrée sur la Fig. 49. Nous remarquons la mise à l'échelle appliquée sur $HV(z)$, support du profil reconstruit.

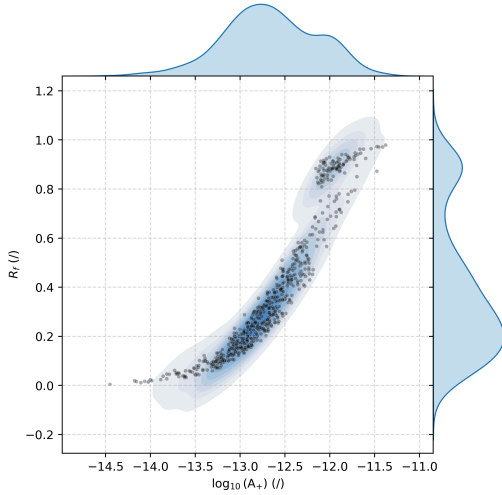


Fig. 48. – Distribution conjointe du rapport des aires et de l'aire positive sur l'ensemble du jeu de données

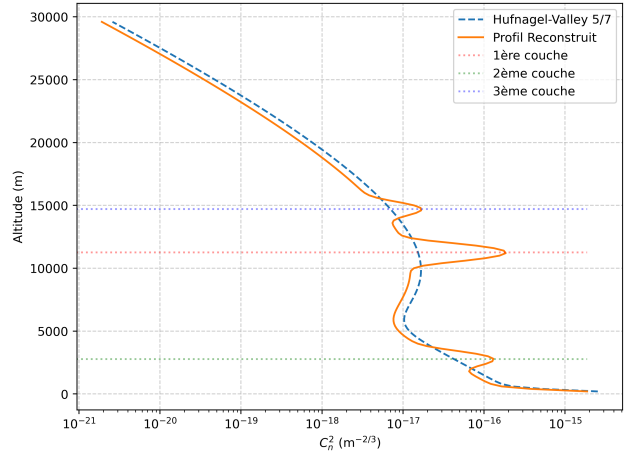


Fig. 49. – Profil reconstruit pour les trois premières couches les plus turbulentes avec une contrainte sur l'aire totale positive $A_{(+,tot)}$ et sur le ratio R

Ensuite, il convient de comparer les profils reconstruits avec ceux du jeu de données afin de valider ou d'invalidier les méthodes de reconstruction artificielle présentées ci-avant. Cette étape fera l'objet du Chapitre 6, où les profils reconstruits seront comparés aux profils originaux au travers de différentes métriques de simulation et des paramètres intégraux. Avant cela, le Chapitre 5 présente le cadre théorique et méthodologique de la simulation par écrans de phase.

5. SIMULATION

Afin d'évaluer l'impact de la turbulence atmosphérique sur un lien optique satellite-sol, il est nécessaire de recourir à des simulations numériques. Celles-ci constituent une solution flexible permettant de tester différents scénarios de propagation turbulente. Dans notre cas, nous utiliserons cette méthode pour comparer quantitativement l'impact des turbulences décrite des profils du jeu de données et des profils reconstruits tels qu'introduits dans le Chapitre 4.

Ce chapitre a pour objectif de présenter au lecteur la méthodologie mise en place. Après avoir introduit (i) la grille d'entrée, nous (ii) présenterons l'implémentation de la propagation par écrans de phase ainsi que les définitions mathématiques associées. Nous (iii) préciserons ensuite les paramètres utilisés pour les simulations. Enfin, nous (iv) introduirons la théorie du couplage dans une fibre monomode comme outil potentiel d'évaluation complémentaire, en particulier dans une perspective de correction par optique adaptative. Bien que cette approche n'ait pas pu être développée jusqu'à l'obtention de résultats quantitatifs, elle constitue une piste prometteuse.

5.1 LA GRILLE D'ENTRÉE

Dans ce travail, la propagation est simulée à partir de représentations bidimensionnelles des faisceaux lumineux, modélisés sous forme d'écrans carrés. Dans le domaine spatial, ces écrans, de dimensions physique $S \times S$, sont décomposés en une grille de $N_{\text{pxl}} \times N_{\text{pxl}}$ pixels comme l'illustre la Fig. 50. Par conséquent, la taille d'un pixel vaut :

$$\delta = \frac{S}{N_{\text{pxl}}} \quad (139)$$

Comme l'origine du repère est au centre de la grille, nous avons :

$$x, y \in \left\{ -\frac{N_{\text{pxl}}}{2}\delta, \left(1 - \frac{N_{\text{pxl}}}{2}\right)\delta, \dots, \left(\frac{N_{\text{pxl}}}{2} - 1\right)\delta \right\} \quad (140)$$

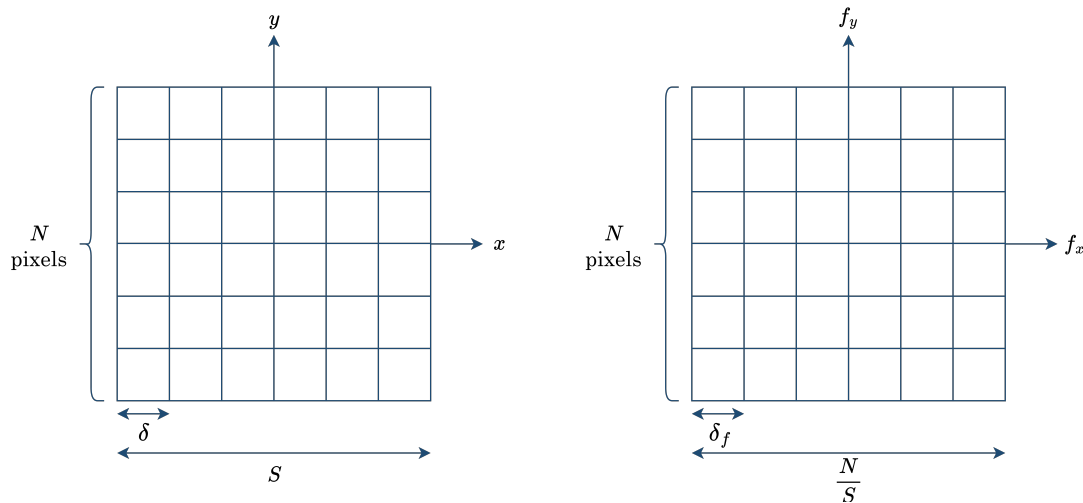


Fig. 50. – Décomposition de l'écran en grille de $N \times N$ pixels : domaine spatial à gauche et domaine fréquentiel à droit (schéma inspiré de [22])

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 2.4, il est nécessaire d'appliquer une transformation de Fourier discrète bidimensionnelle (TFD 2D) afin de simuler une propagation, nous devons en outre définir un écran dans le domaine fréquentiel. La taille d'un pixel de la grille fréquentielle vaut [5] :

$$\delta_f = \frac{1}{N_{\text{pxl}}\delta} \quad (141)$$

Nous avons donc :

$$f_x, f_y \in \left\{ -\frac{N}{2}\delta_f, \left(1 - \frac{N_{\text{pxl}}}{2}\right)\delta_f, \dots, \left(\frac{N_{\text{pxl}}}{2} - 1\right)\delta_f \right\} \quad (142)$$

Notons qu'afin d'obtenir de meilleures performances lors du calcul des TFD, N_{pxl} doit valoir idéalement une puissance de 2 ou à défaut un nombre pair comme expliqué dans [5, p. 18].

5.2 LA PROPAGATION PAR ÉCRANS DE PHASE

Afin de simuler la propagation d'un faisceau gaussien à travers une atmosphère turbulente, nous utilisons une méthode appelée **propagation par écrans de phase**. Cette méthode consiste à discrétiser l'atmosphère turbulente en couches d'épaisseurs données, appelées « dalles », et à y effectuer une propagation turbulente. La propagation à travers chaque dalle d'épaisseur Δz se déroule en deux étapes successives : l'application d'une contribution en phase due aux turbulences suivie d'une propagation optique en espace libre sur l'épaisseur de la dalle.

La contribution est appliquée en additionnant, à la phase du faisceau, un **écran de phase** : une surface bidimensionnelle modélisant les distorsions de phase — du fait de la fluctuation de l'indice de réfraction — provoquées par les turbulences dans une couche de l'atmosphère, en l'occurrence une dalle donnée.

À la i -ème dalle lors d'une simulation de propagation par écrans de phase avec N dalles — et donc N écrans —, les deux étapes s'expriment comme suit :

- **Étape 1** : L'application de l'écran de phase $\phi_i(x, y)$ sur le faisceau d'entrée de la dalle $U_{i-1}(x, y, z_{i-1})$ s'exprime comme suit :

$$U'_{i-1}(x, y, z_{i-1}) = U_{i-1}(x, y, z_{i-1})e^{j\phi_i(x, y)} \quad (143)$$

- **Étape 2** : La propagation en espace libre sur l'épaisseur Δz_i de la i -ème dalle est effectuée avec la méthode du spectre d'ondes planes :

$$U_i(x, y, z_i) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U'_{i-1}(x', y', z_{i-1})\}(f_x, f_y)e^{jk_z\Delta z}\}(x, y) \quad (144)$$

Nous obtenons ainsi le faisceau de sortie de la i -ème dalle. Ce dernier devient le faisceau d'entrée de la propagation sur la dalle $i + 1$ suivante.

La propagation par écrans de phase est résumée visuellement sur la Fig. 51. Dans le cadre de ce travail, nous n'effectuerons que des propagations en lien descendant (du satellite vers la Terre). Cependant, pour simuler des liens montants, la marche à suivre est exactement la même à la seule différence que les dalles sont parcourues dans le sens opposé.

Le nombre de dalles considérées lors d'une simulation est un paramètre crucial. Ce dernier va déterminer le niveau de discrétisation de l'atmosphère turbulente et donc le nombre de modifications de phase et de propagation en espace libre à effectuer numériquement. Si ce

nombre est trop élevé, le temps de calcul augmentera considérablement, rendant la simulation inefficace. À l'inverse, si ce nombre est trop faible, la discrétisation de l'atmosphère turbulente sera insuffisante, entraînant ainsi une perte de précision rendant la simulation peu fiable. Dans le cadre de ce travail, le nombre de dalles considéré est $N = 10$; valeur proche de celle sélectionnée par Osborn [23].

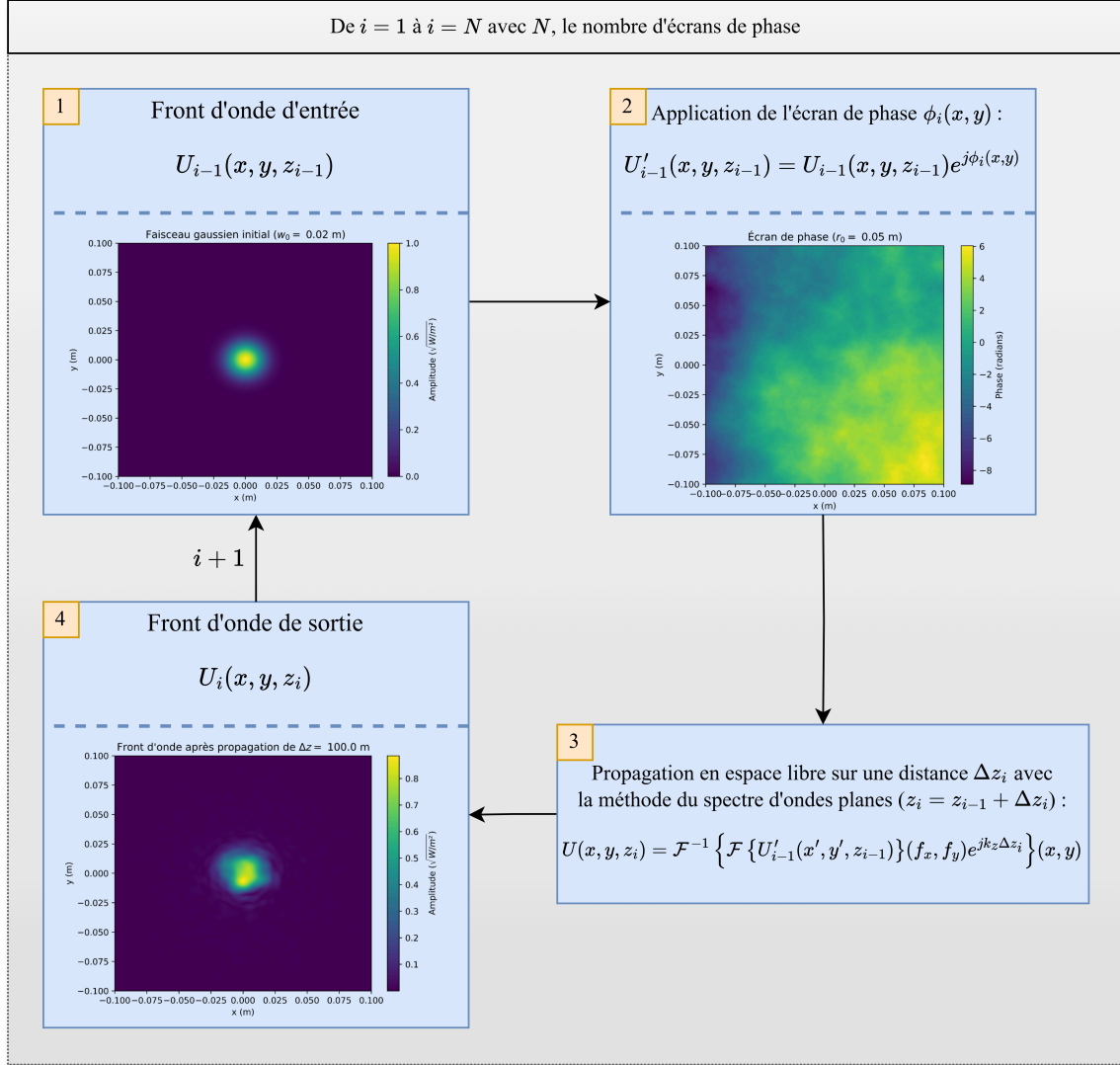


Fig. 51. – Schéma de la propagation par écrans de phase (inspiré de [22])

Au-dessus d'environ 35 km, comme visible sur la Fig. 10, le profil de C_n^2 atteint des valeurs inférieures à $10^{-21} \text{ m}^{-2/3}$. Ces très faibles valeurs sont dues à l'absence de turbulence à de telles altitudes. Inutile donc d'utiliser la propagation par écrans de phase au-dessus de cette limite. En effet, cela demanderait de grandes ressources informatiques. Par conséquent, au-dessus de cette limite, uniquement une propagation en espace libre est effectuée via la diffraction de Fraunhofer.

La diffraction de Fraunhofer a été implémentée en `python` sur base de Schmidt [5]. L'implémentation d'`A0tools` [24] de la propagation par spectre d'ondes planes et la méthode des couches équivalentes ont été utilisées.

5.2.1 LA CRÉATION D'ÉCRANS DE PHASE

Afin de créer les écrans de phase, nous devons disposer de la densité spectrale de puissance (DSP) de la phase. Cette dernière peut être obtenue à partir de la DSP de l'indice de réfraction (voir Chapitre 2.3.5) grâce à cette relation [5, p. 160] :

$$\Gamma_{\phi}(\kappa) = 2\pi k^2 \Delta z \Gamma_n(\kappa) \quad (145)$$

avec k , le nombre d'onde et Δz , l'épaisseur de la dalle.

En reprenant les DSP de Kolmogorov, $\Gamma_{\phi}^K(\kappa)$ et de von Kármán modifiée, $\Gamma_{\phi}^{\text{mvK}}(\kappa)$, (respectivement l'Eq. 37 et l'Eq. 39) et en les y injectant, nous obtenons les DSP de la phase :

$$\Gamma_{\phi}^K(\kappa) = 0,49 r_0^{-5/3} \kappa^{-11/3} \quad (146)$$

$$\Gamma_{\phi}^{\text{mvK}}(\kappa) = 0,49 r_0^{-5/3} \frac{e^{-\kappa^2/\kappa_m^2}}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \quad (147)$$

avec $r_{0,i}$, le paramètre de Fried pour une dalle donnée ; $\kappa_m = \frac{5,92}{l_0}$ et $\kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}$. En effet, de l'Eq. 78 et pour l'angle zénithal $\theta = 0^\circ$, le paramètre de Fried peut se réécrire :

$$\begin{aligned} r_{0,i}^{-5/3} &= 0,423 k^2 \int_{z_i}^{z_i + \Delta z} C_n^2(z) dz \\ &\approx 0,423 k^2 C_n^2(z) \Delta z \end{aligned} \quad (148)$$

En multipliant $2\pi k^2 \Delta z$ de l'Eq. 145 avec 0,033 C_n^2 des expressions des différentes DSP mentionnées ci-avant, nous avons donc :

$$2\pi k^2 \Delta z 0,033 C_n^2 = 0,49 r_0^{-5/3} \quad (149)$$

Cependant, notre grille fréquentielle obtenue après transformation de Fourier bidimensionnelle de la grille spatiale telle que définie sur la Fig. 50 est exprimée en fréquence spatiale f alors que les expressions obtenues plus haut sont exprimées en fonction de $\kappa = 2\pi f$. Pour effectuer la transformation, remplacer κ par $2\pi f$ n'est pas suffisant ; il faut que les intégrales soient identiques. En repartant de l'expression de la fonction de structure et en calculant la transformation de Fourier selon (κ_x, κ_y) et (f_x, f_y) [22], nous avons :

$$\begin{aligned} D_{\phi}(x, y) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\phi, \kappa}(\kappa_x, \kappa_y) (1 - e^{j(\kappa_x x + \kappa_y y)}) d\kappa_x d\kappa_y \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\phi, f}(f_x, f_y) (1 - e^{2\pi j(f_x x + f_y y)}) df_x df_y \end{aligned} \quad (150)$$

Nous pouvons réécrire l'intégrande de la première ligne comme :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi, \kappa}(\kappa_x, \kappa_y) (1 - e^{j(\kappa_x x + \kappa_y y)}) d\kappa_x d\kappa_y &= \\ \Gamma_{\phi, \kappa}(2\pi f_x, 2\pi f_y) (1 - e^{2\pi j(f_x x + f_y y)}) (2\pi)^2 df_x df_y \end{aligned} \quad (151)$$

Comme il faut que les deux intégrandes de l'Eq. 150 soient égales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi, \kappa}(2\pi f_x, 2\pi f_y) (1 - e^{2\pi j(f_x x + f_y y)}) df_x df_y (2\pi)^2 &= \\ \Gamma_{\phi, f}(f_x, f_y) (1 - e^{2\pi j(f_x x + f_y y)}) df_x df_y \end{aligned} \quad (152)$$

Finalement, la conversion s'écrit comme suit :

$$\Gamma_{\phi,f}(f_x, f_y) = \Gamma_{\phi,\kappa}(2\pi f_x, 2\pi f_y)(2\pi)^2 \quad (153)$$

Grâce à cela, nous obtenons alors les expressions suivantes [5] :

$$\Gamma_{\phi}^K(f) = 0,023 r_0^{-\frac{5}{3}} f^{-\frac{11}{3}} \quad (154)$$

$$\Gamma_{\phi}^{\text{mvK}}(f) = 0,023 r_0^{-\frac{5}{3}} \frac{e^{-f^2/f_m^2}}{(f^2 + f_0^2)^{11/6}} \quad (155)$$

avec $f_m = \frac{\kappa_m}{2\pi}$ et $f_0 = \frac{\kappa_0}{2\pi}$. Ces deux DSP de la phase sont représentées sur la Fig. 52.

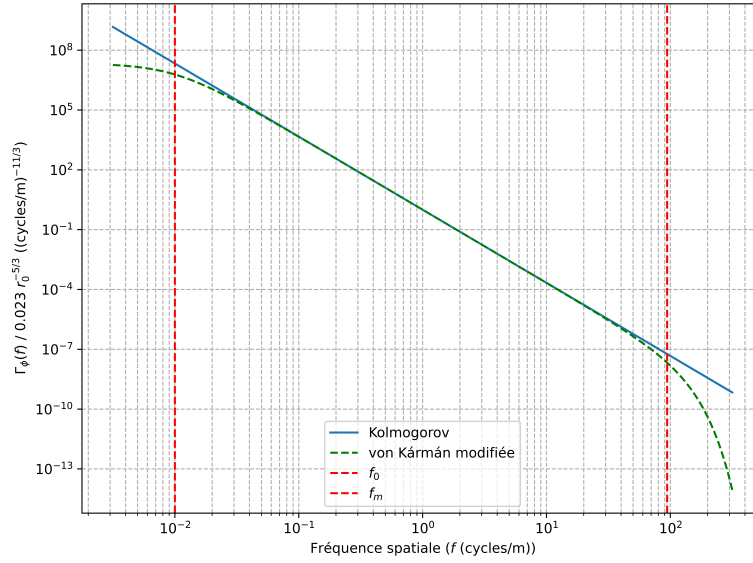


Fig. 52. – Densité spectrale de puissance normalisée de la phase de Kolmogorov et de von Kármán

Par la suite, nous utiliserons la DSP de von Kármán modifiée telle que définie par l'Eq. 155. C'est aussi cette dernière qui est utilisée dans la librairie python `A0tools` [24].

De l'expression de la DSP de la variation de la phase, nous pouvons en déduire la phase $\phi(x, y)$ pour chaque pixel (x, y) comme expliqué dans [5] :

$$\phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\phi}(f_x, f_y) \exp[2\pi j(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (156)$$

Toujours selon [5], nous pouvons ensuite réécrire la phase sous forme d'une série de Fourier. Cela donne :

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} \exp[j2\pi(f_{x_n} x + f_{y_m} y)] \quad (157)$$

avec $f_{x_n} = \frac{n}{S_x}$ et $f_{y_m} = \frac{m}{S_y}$, les fréquences spatiales discrètes selon x et y et $c_{n,m}$, les coefficients de Fourier. Pour rappel, S est la taille physique de l'écran carré considéré dans ce travail ; aussi, $S_x = S_y = S$.

Comme la phase est sujette à des variations causées par des inhomogénéités aléatoires et indépendantes sur l'entièreté du chemin optique, nous pouvons supposer grâce au théorème

central limite que les parties réelles et imaginaires des coefficients complexes $c_{n,m}$ suivent une loi normale circulaire complexe. Ces parties suivent cette distribution car leurs moyennes et les variances croisées sont nulles et leurs variances sont égales. Cette variance s'exprime comme :

$$\begin{aligned}\langle |c_{n,m}|^2 \rangle &= \Gamma_\phi(f_{x_n}, f_{y_m}) \delta_{f_{x_n}} \delta_{f_{y_m}} \\ &= \Gamma_\phi(f_{x_n}, f_{y_m}) \delta_f^2\end{aligned}\quad (158)$$

avec $\delta_{f_{x_n}} = \delta_{f_{y_m}} = \delta_f$, l'espace de la grille fréquentielle dans le cas d'une grille carrée.

Par conséquent, l'écart type s'écrit comme :

$$\langle |c_{n,m}| \rangle = \sqrt{\Gamma_\phi(f_{x_n}, f_{y_m})} \delta_f \quad (159)$$

Ainsi, pour chaque pixel (n, m) de la grille fréquentielle, il convient d'effectuer un tirage aléatoire d'un nombre $(a + jb) \in \mathbb{C}$ selon une loi normale complexe centrée réduite. Nous obtenons ainsi un bruit gaussien sur l'entièreté de la grille. Afin d'obtenir le tirage des coefficients $c_{n,m}$, il faut multiplier chaque nombre $a + jb$ par l'écart-type des coefficients (Eq. 159). En effet, pour une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , Y suit une loi normale centrée réduite selon l'expression :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (160)$$

Après simplification, nous obtenons :

$$Y\sigma = X \quad (161)$$

Ces coefficients $c_{n,m}$ peuvent être vus comme un bruit gaussien coloré par la DSP Γ_ϕ . Ils s'expriment donc comme suit :

$$c_{n,m} = (a + jb)_{n,m} \langle |c_{n,m}| \rangle = (a + jb)_{n,m} \sqrt{\Gamma_\phi(f_{x_n}, f_{y_m})} \delta_f \quad (162)$$

De par la nature complexe des coefficients de Fourier, nous obtenons, après application de la transformation inverse de Fourier, des écrans de phases distincts et décorrélés. Nous pouvons donc en sélectionner un seul en ne conservant que la partie réelle de chaque pixel de l'écran de phase obtenu.

En résumé, l'expression mathématique d'un écran de phase est la suivante :

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n,m} \exp[j2\pi(f_{x_n}x + f_{y_m}y)] \right\} \\ &= \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a + jb)_{n,m} \sqrt{\Gamma_\phi(f_{x_n}, f_{y_m})} \delta_f \exp[j2\pi(f_{x_n}x + f_{y_m}y)] \right\}\end{aligned}\quad (163)$$

Cependant, cette méthode, appelée pour ce travail **méthode de la transformée de Fourier discrète seule** (notée *méthode TSD seule*), implémentée dans la librairie `A0tools` [24] sur base de [5], présente certaines limitations. En raison de l'échantillonnage de la grille discrète de taille finie $N \times N$, les très basses fréquences spatiales ne peuvent pas être représentées correctement. En effet, la fréquence minimale accessible est $f_{\min} = \frac{1}{S}$ avec S , la taille physique de l'écran dans le domaine spatial. Or, la DSP de von Kármán modifiée est dominée par ces composantes basses

fréquences spatiales comme illustré sur la Fig. 3 et donné par l'Eq. 147. Par conséquent, la méthode décrite ci-avant ne permet pas de reproduire fidèlement les statistiques théoriques de turbulence liées à cette DSP.

La méthode utilisée dans le cadre de ce travail est la **méthode des sous-harmoniques** telle que décrite dans [5] et [25] permet de mitiger ce problème. C'est cette dernière qui est utilisée dans ce travail pour les simulations. Le but de cette méthode est d'améliorer le contenu en basses fréquences via l'ajout de ces composantes via la génération de sous-écrans de petites tailles. Pour cela, la méthode décrite plus haut est appliquée sur un écran de 3×3 pixels avec un espace spatial diminuant avec p . L'écran obtenu par cette méthode est la somme de chaque écran obtenu par valeur de p .

L'écran de phase basse fréquence ϕ_{SH} est une somme de N_p écrans telle que définie ci-après :

$$\begin{aligned}\phi_{\text{SH}}(x, y) &= \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 c_{n,m,p} \exp[j2\pi(f_{x_n,p}^{\text{SH}}x + f_{y_m,p}^{\text{SH}}y)] \\ &= \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 c_{n,m,p} \exp\left[j2\pi\left(\frac{n}{3^p S}x + \frac{m}{3^p S}y\right)\right]\end{aligned}\quad (164)$$

Dans la fonction implémentée dans la librairie **A0tools** [24], N_p a été fixé à 3. Cela signifie que l'espacement en fréquence spatiale $\delta_{f,p} = \frac{1}{3^p S}$ vaut, pour chaque itération successivement $\frac{1}{3S}$, $\frac{1}{9S}$ et $\frac{1}{27S}$. De plus, pour une grille de taille $N^{\text{SH}} = 3$ avec $n, m \in \{-1, 0, 1\}$, les fréquences spatiales sont définies comme :

$$\begin{aligned}f_{x_n,p}^{\text{SH}} &= n\delta_{f,p} = \frac{n}{3^p S} \\ f_{y_m,p}^{\text{SH}} &= m\delta_{f,p} = \frac{m}{3^p S}\end{aligned}\quad (165)$$

Les coefficients de Fourier $c_{n,m,p}$, dépendant cette fois de p , s'obtiennent analogiquement à la méthode TFD seule. Les coefficients sont égaux au produit de leur écart type par une grille de nombres complexes $(a + jb)_{n,m}$. Chacun de ces nombres est une réalisation d'un tirage aléatoire suivant une loi normale complexe centrée réduite. Les coefficients de Fourier s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}c_{n,m,p} &= (a + jb)_{n,m,p} \sqrt{\langle |c_{n,m,p}|^2 \rangle} \\ &= (a + jb)_{n,m,p} \sqrt{\Gamma_{\phi}(f_{x_n,p}^{\text{SH}}, f_{y_m,p}^{\text{SH}})} \delta_{f,p}\end{aligned}\quad (166)$$

De l'Eq. 165 et $\delta_{f,p} = \frac{1}{3^p S}$, nous obtenons :

$$c_{n,m,p} = (a + jb)_{n,m,p} \sqrt{\Gamma_{\phi}\left(\frac{n}{3^p S}, \frac{m}{3^p S}\right)} \frac{1}{3^p S}\quad (167)$$

Finalement, en injectant les coefficients de Fourier dans l'Eq. 164 et en ne conservant que la partie réelle afin de n'obtenir qu'un seul des deux écrans décorrélés, nous obtenons :

*Pour rappel, comme l'écran est carré, nous avons $\delta_{f_x,p} = \delta_{f_y,p} = \delta_{f,p}$.

$$\phi_{\text{SH}}(x, y) = \Re \left\{ \sum_{p=1}^3 \sum_{n=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 (a + jb)_{n,m,p} \sqrt{\Gamma_{\phi} \left(\frac{n}{3^p S}, \frac{m}{3^p S} \right)} \frac{1}{3^p S} \exp \left[j2\pi \left(\frac{n}{3^p S} x + \frac{m}{3^p S} y \right) \right] \right\} \quad (168)$$

Pour obtenir l'écran de phase final, il suffit d'additionner la contribution de la méthode des sous-harmoniques à l'écran obtenu avec la méthode TFD seule de l'Eq. 163 :

$$\phi_{\text{tot}}(x, y) = \phi(x, y) + \phi_{\text{SH}}(x, y) \quad (169)$$

5.2.2 LES ÉCRANS DE PHASE À PARTIR D'UN PROFIL DE C_n^2

Après avoir abordé la définition mathématique des écrans de phases et la manière dont ils sont créés, il convient maintenant de déterminer comment, sur base d'un profil de C_n^2 , ils sont produits. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la DSP de von Kármán modifiée, en plus de dépendre des échelles internes et externes (l_0 et L_0), dépend du paramètre de Fried r_0 . Or, ce paramètre dépend directement de la valeur du C_n^2 variant lui-même avec l'altitude. Il faut donc sélectionner une valeur de r_0 pour chaque écran de phase en fonction de l'altitude à laquelle il est placé.

Avant d'aller plus loin, il convient de définir les notations utilisées telles qu'illustrées dans la Fig. 53. L'atmosphère est donc divisée en N dalles d'indice i d'épaisseur identique Δz avec N étant le nombre d'écrans de phase considérés ($N = 10$ dans notre cas). De plus, afin d'effectuer les simulations numériques, l'atmosphère est discrétisée en n couches d'indice j d'épaisseur identique δz . La précision et la demande en ressources informatiques augmentant avec le nombre de couches i sélectionnées, nous avons choisi $n = 1000$.

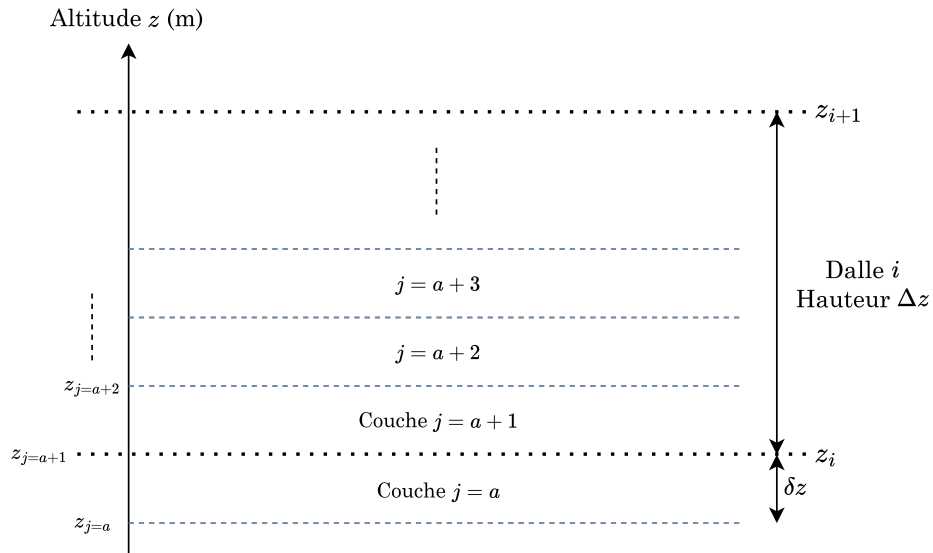


Fig. 53. – Schéma de la séparation de l'atmosphère en dalles d'épaisseur Δz et de la discrétisation en couches d'épaisseur δz

Comme décrit par Schmidt [5, p. 165], pour une dalle i d'épaisseur $\Delta z_i = \Delta z$, le paramètre de Fried de la i -ème dalle est calculé selon :

$$r_{0,i} = (0,423 \, k^2 C_{n,i}^2 \Delta z)^{-\frac{3}{5}} \quad (170)$$

Il s'agit de l'Eq. 78 où l'intégrale a été remplacée par le facteur $C_{n,i}^2 \Delta z_i$ avec $C_{n,i}^2$, la valeur de C_n^2 prise à la limite basse de la dalle i .

La première approche consiste à disposer les écrans de phases, dans le cas d'un lien descendant, sur la limite haute de chacune des dalles et à calculer le paramètre de Fried comme expliqué ci-dessus. En résulte alors la Fig. 54 avec les points rouges représentant la position verticale des écrans de phase et les points noirs représentant la valeur de $C_{n,i}^2 \Delta z$ pour chacune des dalles.

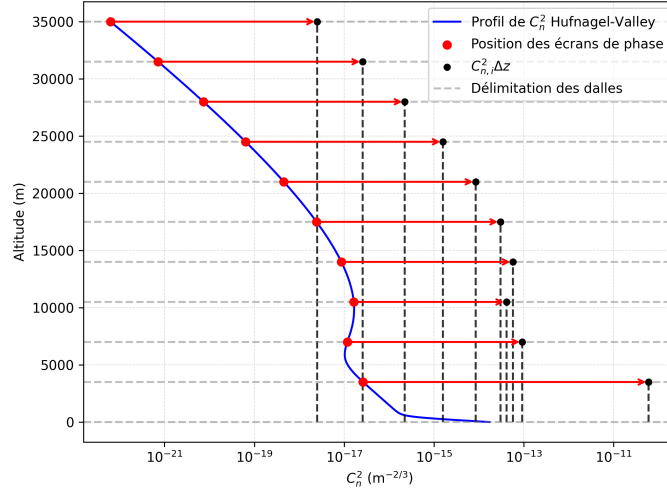


Fig. 54. – Profil d'Hufnagel-Valley 5/7 avec écrans de phase placés à intervalles réguliers sur le haut des dalles

i	z_i (m)	$C_{n,i}^2 \Delta z$ (m ^{1/3})	$r_{0,i}$ (m)
1	3500	$6,044 \cdot 10^{-11}$	0,007
2	7000	$9,269 \cdot 10^{-14}$	0,335
3	10500	$4,128 \cdot 10^{-14}$	0,544
4	14000	$5,727 \cdot 10^{-14}$	0,447
5	17500	$3,033 \cdot 10^{-14}$	0,655
6	21000	$8,515 \cdot 10^{-15}$	1,403
7	24500	$1,591 \cdot 10^{-15}$	3,838
8	28000	$2,245 \cdot 10^{-16}$	12,429
9	31500	$2,576 \cdot 10^{-17}$	45,554
10	35000	$2,526 \cdot 10^{-18}$	183,500

Tableau 1. – Valeurs numériques, pour chaque dalle, de l'altitude de l'écran de phase, de $C_{n,i}^2 \Delta z^*$ ainsi que du paramètre de Fried

Cependant, cette méthode pose problème car, en plaçant les écrans à une altitude arbitraire comme la limite haute de la dalle, elle ne prend pas en compte la distribution des turbulences au sein de celle-ci. Cela peut conduire à une approximation inexacte de la propagation ayant

* $C_{n,2}^2$ mesuré au bas de la dalle considérée, c'est-à-dire en $z'_i = z_i - \Delta z$

lieu. De plus, la valeur de $C_{n,i}^2$ sélectionnée pour chaque dalle (voir l'Eq. 170) peut mener à des valeurs de r_0 extrêmement faibles comme relevées sur le Tableau 1.

Nous pouvons dès lors utiliser la **méthode des couches équivalentes**, introduite par Fusco *et al.* [26] et implémentée dans **A0tools** [24], qui consiste à remplacer chaque dalle de turbulence par une couche équivalente située à une altitude effective $\tilde{z}_i$ via une intégrale pondérée par $z^{5/3}$ comme décrit ci-après :

$$\tilde{z}_i = \left(\frac{\int_{z_{i,\min}}^{z_{i,\max}} C_n^2(z) z^{5/3} dz}{\int_{z_{i,\min}}^{z_{i,\max}} C_n^2(z) dz} \right)^{3/5} \quad (171)$$

Pour une dalle i d'épaisseur $\Delta z = z_{i,\max} - z_{i,\min}$, nous avons dans ce cas :

$$C_{n,i}^2 \Delta z_i = \int_{z_{i,\min}}^{z_{i,\max}} C_n^2(z) dz \quad (172)$$

Le paramètre de Fried associé à la dalle est donc le suivant :

$$r_{0,i} = \left(0,423 k^2 \int_{z_{i,\min}}^{z_{i,\max}} C_n^2(z) dz \right)^{-3/5} \quad (173)$$

qui, numériquement, donne :

$$r_{0,i} \approx \left(0,423 k^2 \sum_{j \in \text{dalle } i} C_n^2(z_j) \delta z \right)^{-3/5} \quad (174)$$

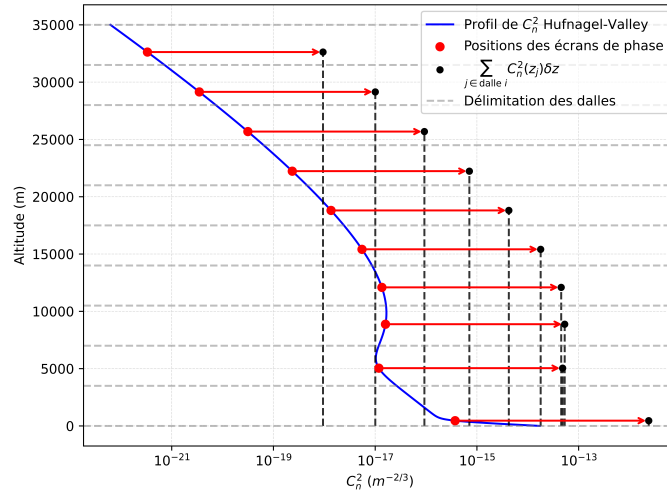


Fig. 55. – Profil d'Hufnagel-Valley 5/7 avec écrans de phase placés via la méthode des couches équivalentes

Pour un profil de C_n^2 d'Hufnagel-Valley 5/7 s'étendant jusqu'à 35 km d'altitude, le calcul des paramètres de Fried et des altitudes effectives des écrans de phase est décrit sur la Fig. 55 et le Tableau 2. En comparant avec la Fig. 54, nous remarquons que les écrans sont placés à des altitudes différentes. Pour simuler une propagation avec un tel placement d'écrans de phase, nous suivons la méthode illustrée par la Fig. 51 à la seule différence qu'avant d'appliquer le

premier écran de phase, nous propageons le faisceau jusqu'à sa position. En effet, le premier écran se situe à 32,623 km.

Cette méthode permet d'obtenir pour chaque dalle des valeurs de r_0 cohérentes avec des écrans de phase placé à des altitudes prenant en compte la structure verticale du profil de C_n^2 . C'est d'ailleurs elle qui est utilisée dans la suite de ce travail.

i	$\tilde{z}_i$ (m)	$\sum_{j \in \text{dalle } i} C_n^2(z_j) \delta z$ (m ^{1/3})	$r_{0,i}$ (m)
1	458	$2,385 \cdot 10^{-12}$	0,0477
2	5041	$4,843 \cdot 10^{-14}$	0,494
3	8875	$5,310 \cdot 10^{-14}$	0,468
4	12090	$4,541 \cdot 10^{-14}$	0,514
5	15412	$1,792 \cdot 10^{-14}$	0,898
6	18803	$4,242 \cdot 10^{-15}$	2,131
7	22233	$7,100 \cdot 10^{-16}$	6,228
8	25684	$9,271 \cdot 10^{-17}$	21,131
9	29149	$1,005 \cdot 10^{-17}$	80,149
10	32623	$9,424 \cdot 10^{-19}$	331,596

Tableau 2. – Valeurs numériques, pour chaque dalle, de l'altitude effective de l'écran de phase, de l'intégrale numérique du C_n^2 ainsi que du paramètre de Fried pour la méthode des couches équivalentes

5.3 LES PARAMÈTRES DE LA SIMULATION

Les simulations effectuées dans ce travail visent à reproduire un lien descendant entre un satellite en orbite terrestre basse et une station au sol. Cette situation est décrite par un ensemble fixe de paramètres résumés dans le Tableau 3. Nous y retrouvons notamment la taille de la fenêtre spatiale S et son nombre de pixels N_{pxl} , la distance de propagation totale z_{tot} ainsi que la longueur d'onde λ , située dans l'infrarouge et utilisée en communications optiques [23]. Sont aussi indiqués le nombre d'écrans de phase N et le col du faisceau gaussien initial w_0

S et N_{pxl} ont été choisi afin d'offrir une bonne résolution et de minimiser le repliement de spectre et le temps de calcul numérique. Les autres paramètres ont été fixés conformément à Osborn [23], pour simuler un lien depuis un satellite en orbite terrestre basse. Ces paramètres seront utilisés pour l'ensemble des simulations.

S (m)	N_{pxl}	z_{tot} (km)	λ (nm)	N	w_0 (m)
3	512	500	1550	10	0.02

Tableau 3. – Paramètres de la simulation

5.4 L'INJECTION DANS LA FIBRE OPTIQUE

Afin d'obtenir des métriques de télécommunications réalistes telles que le rapport signal sur bruit ou le taux d'erreur*, il est nécessaire de simuler l'injection de lumière reçue dans la fibre optique via un télescope.

*Respectivement appelés SNR et BER, de l'anglais *signal-to-noise ratio* et *bit error rate*

Premièrement, comme suggéré par Canuet *et al.* [27] définissons un produit scalaire pondéré :

$$\langle X|Y \rangle_Z \triangleq \iint Z(\vec{r}) \cdot X(\vec{r}) \cdot Y^*(\vec{r}) d^2\vec{r} \quad (175)$$

avec $X(\vec{r})$, $Y(\vec{r})$ et $Z(\vec{r}) \in \mathbb{C}$; $Y^*(\vec{r})$, le complexe conjugué et $\vec{r}$, la position spatiale.

La normalisation et la variance sont notées :

$$\langle X \rangle_Z \triangleq \frac{\langle X|1 \rangle_Z}{\langle 1|1 \rangle_Z} = \frac{\iint Z(\vec{r}) \cdot X(\vec{r}) d^2\vec{r}}{\iint Z(\vec{r}) d^2\vec{r}} \quad (176)$$

$$\sigma_Z^2 \triangleq \langle X^2 \rangle_Z - \langle X \rangle_Z^2 \quad (177)$$

Toujours selon Canuet *et al.* [27], considérons un faisceau incident propagé à travers une atmosphère turbulente à l'entrée du télescope. Les turbulences introduisant une variations sur l'amplitude et la phase, le champ s'exprime comme suit :

$$\Psi(\vec{\rho}, t) = A_0 \exp(\chi(\vec{r}, t) + j\phi(\vec{r}, t)) \quad (178)$$

avec A_0 , l'amplitude du champ électromagnétique, $\chi(\vec{r}, t)$, la variation de log-amplitude et $\phi(\vec{r}, t)$, la variation de phase.

Considérons aussi P , la transmittance d'une pupille circulaire, modélisant le télescope à la réception :

$$P(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq 2|r| \leq D, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (179)$$

avec D la diamètre de la pupille (en m).

La fibre dans laquelle l'injection a lieu est une fibre monomode. Pour rappel, le mode se propageant alors est le mode LP_{01} . Selon Ruilier [28], bien que ce dernier ait le profil d'une fonction de Bessel dans le cœur, il peut être approximé par une fonction gaussienne sous certaines conditions :

$$LP_{01} \approx e^{-\left(\frac{r}{\omega_0}\right)^2} \quad (180)$$

avec ω_0 , le rayon du mode fondamental*.

Pour une pupille non obstruée, Ruilier [28] a montré que l'efficacité de couplage maximum atteignable était d'environ 81%. Alors, le rayon devient, dans le plan focal :

$$\omega_{0,\text{opt}} = 0,71 \frac{\lambda f}{D} \quad (181)$$

avec f , la distance focale. Nous appelons M_0 , ce mode gaussien donnant la meilleur efficacité de couplage dans le plan de la pupille :

$$M_0 = e^{-\left(\frac{r}{\omega_{0,\text{opt}}}\right)^2} \quad (182)$$

Nous pouvons ensuite écrire l'adaption entre Ψ et M_0 via l'intégrale de recouvrement normalisée telle que définie par Canuet *et al.* [27] :

*à ne pas confondre avec w_0 , le col d'un faisceau gaussien.

$$\Omega = \frac{\langle \Psi | M_0 \rangle_P}{\sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle_P \times \langle M_0 | M_0 \rangle_P}} \quad (183)$$

De laquelle nous pouvons exprimer l'efficacité de couplage instantanée :

$$\eta = |\Omega|^2 \quad (184)$$

En considérant comme champ incident sans impact des turbulences $\Psi_0(\vec{r}, t) = A_0$, nous exprimons l'efficacité de couplage :

$$\eta_0 = |\Omega_0|^2 \quad (185)$$

Afin de corriger la phase incidente avec de l'optique adaptative, il est nécessaire de décomposer la phase incidente en polynômes de Zernike. Pour cela, nous négligerons pour la suite la scintillation et en se basant sur Canuet *et al.* [27], nous exprimons le champ incident comme suit :

$$\Psi_{\Phi}(\vec{r}, t) = A_0 \exp(j\phi(\vec{r}, t)) \quad (186)$$

avec $\phi(\vec{r}, t)$, la variation de la phase. Après avoir défini $W_0 = PM_0$, grâce à l'Eq. 183, l'adaptation normalisée entre Ψ_{Φ} et le mode monofibre M_0 s'écrit :

$$\frac{\Omega_{\Phi}}{\Omega_0} = \frac{\langle \Psi_{\Phi} | M_0 \rangle_P}{\langle \Psi_0 | M_0 \rangle_P} = \langle \exp(j\phi) \rangle_{W_0} \quad (187)$$

Après développement en série entière et en tirant parti de l'hypothèse d'ergodicité de la phase, le membre de droite peut se réécrire comme suit :

$$\langle \exp(j\phi) \rangle_{W_0} = \exp(j\langle \phi \rangle_{W_0}) \exp\left(-\frac{\sigma_{W_0}^2(\phi)}{2}\right) \quad (188)$$

De cette expression, nous pouvons tirer une approximation de l'efficacité de couplage instantanée normalisée :

$$\eta_{\Phi} \approx \eta_0 \exp\left[-\sigma_{W_0}^2(\phi)\right] \quad (189)$$

Une phase ϕ exprimée sur une pupille circulaire peut, à l'instant t , se décomposer en polynômes de Zernike :

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i\left(\frac{2\vec{r}}{D}\right) \quad (190)$$

avec Z_i , le i -ème mode de Zernike et a_i , le coefficient associé.

Bien que le cadre théorique permette d'écrire l'Eq. 189, nous n'avons pas mené cette partie jusqu'à son terme en raison de difficultés numériques. Une ré-implémentation soignée de ces étapes, avec vérifications analytiques et numériques, est laissée en perspective.

6. VALIDATION

Cette section vise à étudier l'efficacité des méthodes de reconstruction artificielles présentées dans le Chapitre 4. Sont présentés les résultats obtenus à partir des simulations décrites précédemment ainsi que diverses analyses statistiques. Les différentes métriques considérées — telles que l'éclairement énergétique reçu, la qualité de la visibilité ou encore l'angle isoplanatique — permettent d'analyser de manière quantitative la validité des reconstructions proposées.

Tout d'abord, nous (i) comparerons des paramètres intégraux pour des jeux de profils reconstruits et authentiques. Ensuite, nous (ii) analyserons les distributions d'éclairement énergétique reçu lors d'un lien depuis un satellite en orbite terrestre basse.

6.1 LES PARAMÈTRES INTÉGRAUX

Avant d'examiner en détail les distributions des éclairagements énergétiques reçus, nous proposons d'abord de comparer les paramètres atmosphériques intégrés que sont la qualité de la visibilité et l'angle isoplanatique. Pour ce faire, un jeu de 300 profils a été tiré pour chacun des types de reconstruction considérés ainsi qu'au sein des profils mesurés, de manière à évaluer si les paramètres intégrés de ces différents ensembles sont cohérents entre eux et représentatifs des conditions atmosphériques d'origine. Cette étape permet de vérifier que les reconstructions ne deviennent pas significativement des profils mesurés en termes de propriétés globales de turbulence avant d'analyser leur impact sur la propagation optique.

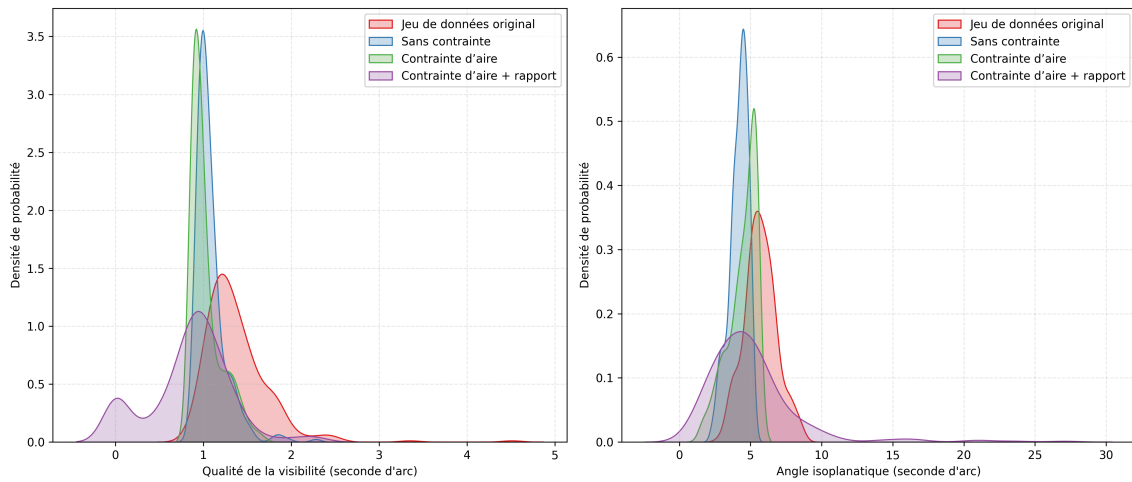


Fig. 56. – Comparaison des distributions de $\mathcal{E}_0$ et de θ_0 pour 300 profils du jeu de données original et des trois méthodes de reconstruction considérées. Les densités de probabilité sont estimées par noyau.

La Fig. 56 représente, pour chaque type de reconstruction ainsi que pour les profils du jeu de données original, les distributions estimées par noyau de $\mathcal{E}_0$ et de θ_0 obtenues à partir de 300 profils. Elles semblent suivre une loi normale.

Nous observons néanmoins que les densités de probabilités estimées par noyau débordent légèrement dans les valeurs négatives. Il s'agit d'un effet de bord indésirable dû à des variables définies sur un support strictement positif comme expliqué dans [29]. Néanmoins, cet artefact

purement visuel n'influence pas les distributions réelles. Nous avons choisi de le conserver pour des raisons de lisibilité de la comparaison visuelle.

	$\mu_{\mathcal{E}_0}$	$\sigma_{\mathcal{E}_0}$	μ_{θ_0}	σ_{θ_0}
Jeu original	1,377	0,372	5,687	1,127
Sans contrainte	1,081	0,178	4,174	0,650
Contrainte sur A_+	1,025	0,176	4,430	1,008
Contrainte sur A_+ et R	0,852	0,465	5,084	3,387

Tableau 4. – Tableau comparatif des valeurs moyennes μ et écarts-types σ (exprimés en secondes d'arc) de la qualité de la visibilité $\mathcal{E}_0$ et de l'angle isoplanatique θ_0 pour 300 profils du jeu de données original et pour les trois méthodes de reconstruction considérées.

Nous constatons sur le Tableau 4 que les valeurs issues des profils reconstruits restent globalement du même ordre de grandeur que celles du jeu original, bien que des écarts apparaissent selon la méthode employée. Le $\mathcal{E}_0$ moyen est légèrement sous-estimé pour toutes les reconstructions, avec une différence plus marquée dans le cas de la contrainte sur A_+ et R . Pour l'angle isoplanatique, les reconstructions sans contrainte et avec contrainte sur A_+ donnent des moyennes proches de l'original, tandis que la contrainte double engendre une dispersion beaucoup plus importante. Ces observations sont identiques sur la Fig. 56 où nous remarquons une moyenne assez similaire entre les différents types de profils. Cependant, l'écart type a tendance à être sous-estimé pour les reconstructions sans contrainte et avec contrainte sur A_+ .

6.2 L'ÉCLAIREMENT ÉNERGÉTIQUE REÇU

Après avoir examiné la cohérence des paramètres intégrés de turbulence ($\mathcal{E}_0$ et θ_0), nous nous intéressons maintenant à l'impact des différentes méthodes de reconstruction sur l'éclairement énergétique E_e^* reçu au centre de l'écran après simulation de propagation optique par écrans de phase. Pour chaque jeu de données (profils originaux et reconstruits), 60 profils ont été sélectionnés aléatoirement. Chacun d'entre eux a fait l'objet de 600 simulations de propagation, nombre suffisant pour assurer une convergence des statistiques de l'éclairement central et permettre une comparaison robuste entre les différentes approches de reconstruction.

Pour chaque profil, les distributions des éclaircissements énergétiques centraux sont analysées en prenant leur logarithme, ce qui permet de mettre en évidence leur caractère log-normal attendu [3]. La Fig. 59 illustre, pour quelques exemples représentatifs, la forme des distributions obtenues ainsi qu'un diagramme quantile-quantile. Nous constatons bel et bien, via notamment le diagramme quantile-quantile ainsi que le coefficient de corrélation, que l'éclairement énergétique suit une loi normale en échelle logarithmique et donc, une loi log-normale en échelle linéaire.

Les figures Fig. 57 et Fig. 58 présentent respectivement les distributions des moyennes et des écarts-types de $\log(E_e)$ pour chaque profil. En d'autres termes, pour chaque profil ayant la distribution de E_e de moyenne μ_p et d'écart-type σ_p , ces figures représentent les distributions des μ_p et des σ_p sur l'ensemble des profils. Nous observons que les profils originaux présentent naturellement une dispersion, tandis que les profils reconstruits reproduisent correctement l'ordre de grandeur de ces variations. Les différences relevées portent surtout sur la largeur des distributions, certaines méthodes de reconstruction tendant à légèrement sous-estimer ou surestimer la variabilité des E_e centraux.

*Aussi dénommé irradiance ou *intensity* en anglais

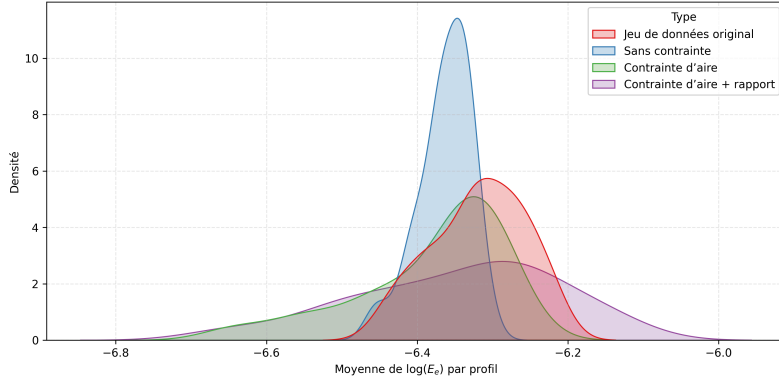


Fig. 57. – Distributions des écarts-types de $\log(E_e)$ pour chaque profil pour le jeu de données original et pour les trois méthodes de reconstruction considérées

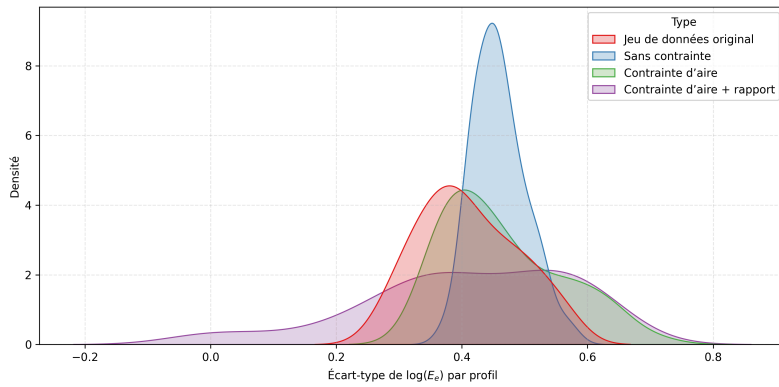


Fig. 58. – Distributions des écarts-types de $\log(E_e)$ pour chaque profil pour le jeu de données original et pour les trois méthodes de reconstruction considérées

	$\mu(\mu)$	$\sigma(\mu)$	$\mu(\sigma)$	$\sigma(\sigma)$
Jeu original	-6,618	0,061	0,410	0,078
Sans contrainte	-6,363	0,035	0,459	0,41
Contrainte sur A_+	-6,382	0,097	0,465	0,092
Contrainte sur A_+ et R	-6,348	0,133	0,409	0,163
	Fig. 57	Fig. 57	Fig. 58	Fig. 58

Tableau 5. – Tableau récapitulatif des statistiques de la Fig. 57 et de la Fig. 58. Les colonnes $\mu(\mu)$ et $\sigma(\mu)$ correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart type des valeurs m_p (distribution des moyennes de la Fig. 57). Les colonnes $\mu(\sigma)$ et $\sigma(\sigma)$ correspondent quant à elles à la moyenne et à l'écart type des valeurs σ_p (distribution des écarts-type de la Fig. 58). Les résultats sont présentés pour le jeu original et pour les trois méthodes de reconstruction.

En conclusion, l'analyse met en évidence que les méthodes de reconstruction proposées reproduisent globalement le comportement statistique attendu de l'éclairement central reçu après propagation turbulente. Et ce, aussi bien en termes de moyenne que d'écart-type. Les différences observées portent essentiellement sur l'ampleur de la variabilité inter-profils : certaines reconstructions tendent à resserrer les distributions tandis que d'autres tendent à les élargir. Ces écarts traduisent les limites des contraintes imposées lors de la reconstruction, mais confirment néanmoins que l'ordre de grandeur de l'éclairement énergétique est correctement restitué par rapport aux profils originaux.

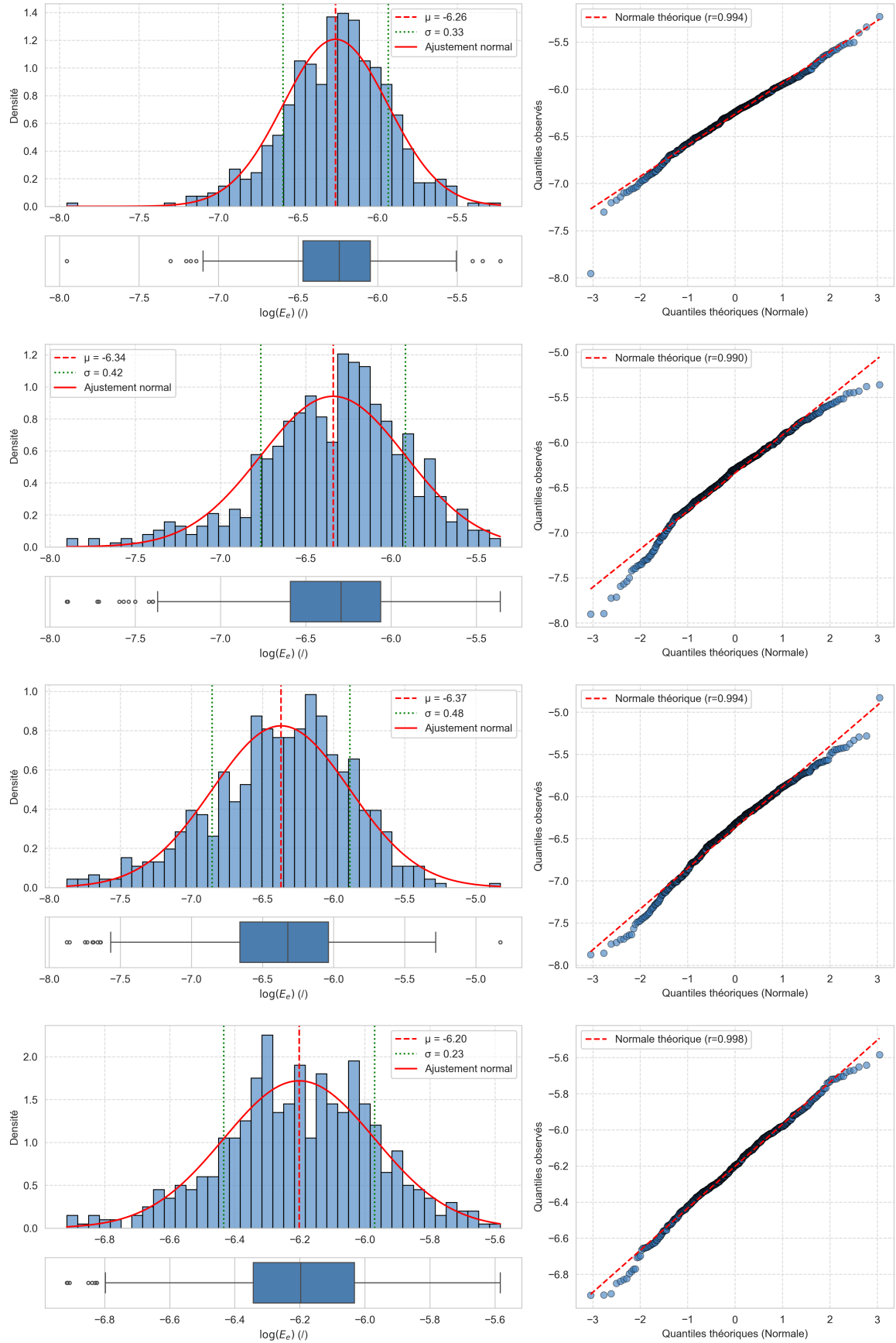


Fig. 59. – Distribution, boîte à moustaches et diagramme quantile-quantile (avec coefficient de corrélation) pour quatre profils arbitrairement choisis de C_n^2 : (i) du jeu de données, (ii) reconstruit sans contrainte (iii) reconstruit avec contrainte sur l'aire et (iv) avec contrainte sur l'aire et sur le rapport

7. CONCLUSION

Ce mémoire a d'abord consisté à analyser statistiquement un jeu de profils de turbulence atmosphérique mesurés à Trappes tout au long de l'année 2020. Cette étude a permis de caractériser ces profils de C_n^2 via des densités de probabilité de paramètres intégraux ou de métriques liées à un seuil de détection telles que l'altitude de la couche la plus turbulente ou le nombre de couches turbulentes.

Sur cette base, une méthode de reconstruction de profils synthétiques a été proposée. Elle repose sur l'échantillonnage de distributions issues des statistiques observées, avec l'ajout de contraintes assurant la cohérence physique des profils obtenus. Ces profils reconstruits ont ensuite été intégrés dans une chaîne de simulation par écrans de phase, afin d'évaluer leur impact sur la propagation optique.

Enfin, des comparaisons entre profils originaux et profils reconstruits ont été menées à travers différents indicateurs de performance. Ces résultats montrent que, malgré leur caractère simplifié, les profils reconstruits reproduisent de manière réaliste certains effets de la turbulence sur un lien descendant satellite-sol.

Plusieurs prolongements naturels se dégagent, tant sur le plan physique que numérique.

- Amélioration de la chaîne de simulation : La résolution
- Injection en fibre monomode : Une étape préparée mais non exploitée dans ce manuscrit est l'évaluation de l'efficacité de couplage dans le mode LP₀₁ d'une fibre optique. Le cadre théorique est posé, mais son application systématique reste à conduire. Son intérêt est double : relier directement la turbulence aux pertes de couplage et obtenir ainsi des SNR et BER sur un modèle de chaîne plus réaliste.
- Correction par optique adaptative (OA) : L'optique adaptative constitue une piste naturelle dans la continuité de ce travail. Comme discuté au Chapitre 5.4, la correction de certains modes de bas ordre permettrait notamment d'augmenter l'efficacité de couplage dans le mode LP₀₁ lors de l'injection en fibre optique.
- Exploitation de davantage de statistiques : La méthode de reconstruction artificielle proposée se base sur les trois couches dominantes et sur des contraintes globales identiques peu importe la date. Nous pourrions inclure dans l'étude statistique la saisonnalité ou encore des profils issus d'autres sites ou d'autres périodes afin de renforcer la robustesse de la méthode et la cohérence des profils ainsi reconstruits.

RÉFÉRENCES

- [1] Faculty of Computing and Information Technology, King Abdulaziz University, Saudi Arabia, R. A. Alsemmeari, S. T. Bakhsh, et H. Alsemmeari, « Free Space Optics Vs Radio Frequency Wireless Communication », *International Journal of Information Technology and Computer Science*, vol. 8, n° 9, p. 1-8, sept. 2016, doi: 10.5815/ijitcs.2016.09.01.
- [2] V. Pierrard, *L'Environnement spatial de la Terre*. Louvain-la-Neuve: Presses universitaires de Louvain, 2009.
- [3] L. C. Andrews, *Laser Beam Propagation Through Random Media, 2nd Ed*, 2nd ed., n° v.PM152. in Press Monograph Series. Bellingham: SPIE, 2005.
- [4] F. Quatresooz, « Atmospheric turbulence modelling and monitoring for satellite-to-ground optical communications », 2024.
- [5] J. D. Schmidt, *Numerical Simulation of Optical Wave Propagation with Examples in MATLAB*. 1000 20th Street, Bellingham, WA 98227-0010 USA: SPIE, 2010. doi: 10.1117/3.866274.
- [6] E. Hecht, *Optics*, 5 edition. Global edition. Boston: Pearson Education, Inc, 2017.
- [7] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, 2. ed., 7. [pr.]. in McGraw-Hill series in electrical and computer engineering Electromagnetics. New York: McGraw-Hill, 2003.
- [8] F. Quatresooz et C. Oestges, « C_n^2 Modeling for Free-Space Optical Communications: A Review », *IEEE Access*, vol. 13, p. 21279-21305, 2025, doi: 10.1109/ACCESS.2025.3535093.
- [9] A. Tokovinin, « The Elusive Nature of “Seeing” », *Atmosphere*, vol. 14, n° 11, p. 1694, nov. 2023, doi: 10.3390/atmos14111694.
- [10] D. L. Fried, « Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures », *Journal of the Optical Society of America*, vol. 56, n° 10, p. 1372, oct. 1966, doi: 10.1364/JOSA.56.001372.
- [11] R. Racine, « The telescopic point spread function », *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 108, n° 726, p. 699-705, 1996, doi: 10.1086/133788.
- [12] D. L. Fried, « Varieties of isoplanatism », *Imaging through the Atmosphere*, vol. 75, p. 20-29, 1976, doi: 10.1117/12.954733.
- [13] V. Lakshminarayanan et A. Fleck, « Zernike polynomials: a guide », *Journal of Modern Optics*, vol. 58, n° 7, p. 545-561, avr. 2011, doi: 10.1080/09500340.2011.554896.
- [14] J. Antonello et M. Verhaegen, « Modal-based phase retrieval for adaptive optics », *JOSA A, Vol. 32, Issue 6, pp. 1160-1170*, juin 2015, doi: 10.1364/JOSAA.32.001160.
- [15] F. Quatresooz, D. Vanhoenacker-Janvier, et C. Oestges, « Computation of Optical Refractive Index Structure Parameter From Its Statistical Definition Using Radiosonde Data », *Radio Science*, vol. 58, n° 1, p. e2022RS007624, 2023, doi: 10.1029/2022RS007624.

- [16] H. Trinquet et J. Vernin, « A statistical model to forecast the profile of the index structure constant C_n^2 », *Environmental Fluid Mechanics*, vol. 7, n° 5, p. 397-407, oct. 2007, doi: 10.1007/s10652-007-9031-x.
- [17] J. Jensen, « Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes », *Acta Mathematica*, vol. 30, p. 175-193, 1906, doi: 10.1007/BF02418571.
- [18] K. I. Park, *Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications*. Cham: Springer International Publishing, 2018. doi: 10.1007/978-3-319-68075-0.
- [19] B. W. Silverman, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. CRC Press, 1986.
- [20] S. Węglarczyk, « Kernel density estimation and its application », *ITM Web of Conferences*, vol. 23, p. 37, 2018, doi: 10.1051/itmconf/20182300037.
- [21] D. W. Scott, *Multivariate Density Estimation*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1992.
- [22] T. Falkenback, « Simulation of optical wave propagation through atmospheric turbulence using phase screens : a study of the turbulence impact on metrics », 2023.
- [23] J. Osborn, M. J. Townson, O. J. D. Farley, A. Reeves, et R. M. Calvo, « Adaptive Optics pre-compensated laser uplink to LEO and GEO », *Optics Express*, vol. 29, n° 4, p. 6113, févr. 2021, doi: 10.1364/OE.413013.
- [24] M. J. Townson, O. J. D. Farley, G. O. d. Xivry, J. Osborn, et A. P. Reeves, « AOtools: a Python package for adaptive optics modelling and analysis », *Optics Express*, vol. 27, n° 22, p. 31316-31329, oct. 2019, doi: 10.1364/OE.27.031316.
- [25] M. Charnotskii, « Four methods for generation of turbulent phase screens: comparison », *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 37, n° 5, p. 738-747, 2020, doi: 10.1364/JOSAA.385754.
- [26] T. Fusco, J.-M. Conan, V. Michau, L. M. Mugnier, et G. Rousset, « Efficient phase estimation for large-field-of-view adaptive optics », *Optics Letters*, vol. 24, n° 21, p. 1472, nov. 1999, doi: 10.1364/OL.24.001472.
- [27] L. Canuet *et al.*, « Statistical properties of single-mode fiber coupling of satellite-to-ground laser links partially corrected by adaptive optics », *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 35, n° 1, p. 148, janv. 2018, doi: 10.1364/JOSAA.35.000148.
- [28] C. Ruilier, « A study of degraded light coupling into single-mode fibers », in *Proceedings of SPIE*, Koha: SPIE – The International Society for Optical Engineering, 1998, p. 764-773. doi: <https://doi.org/10.1117/12.317094>.
- [29] M. C. Jones, « Simple boundary correction for kernel density estimation », *Statistics and Computing*, vol. 3, n° 3, p. 135-146, sept. 1993, doi: 10.1007/BF00147776.

A LE THÉORÈME INTÉGRAL DE KIRCCHOFF

Pour rappel, l'équation d'Helmholtz s'écrit comme suit :

$$(\vec{\nabla}^2 - k^2 n^2)U(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{A})$$

Pour la résoudre et obtenir l'Eq. 52, nous pouvons utiliser le **théorème de Green-Ostrogradski**, exprimant l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume V et le flux traversant la surface de V (notée ∂V) [6, p 680]. Il s'exprime comme suit :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} \quad (\text{B})$$

En posant, pour deux champs scalaires U_1 et U_2 :

$$\vec{F} = U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1 \quad (\text{C})$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) = U_1 \vec{\nabla}^2 U_2 - U_2 \vec{\nabla}^2 U_1, \quad (\text{D})$$

nous réécrivons le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V (U_1 \vec{\nabla}^2 U_2 - U_2 \vec{\nabla}^2 U_1) \, dV = \oint_S (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) \cdot \overrightarrow{dS} \quad (\text{E})$$

Si U_i est solution de l'équation d'Helmholtz, alors :

$$\vec{\nabla}^2 U_i - k^2 n^2 U_i(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{F})$$

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \iiint_V (U_1 k^2 n^2 U_2 - U_2 k^2 n^2 U_1) \, dV &= \oint_S (U_1 \vec{\nabla} U_2 - U_2 \vec{\nabla} U_1) \cdot \overrightarrow{dS} \\ 0 &= \end{aligned} \quad (\text{G})$$

Posons $U_1 = U(r)$, la dépendance spatiale du champ $U_P(r, t)$, et $U_2 = \frac{e^{jkr}}{r}$ avec r mesuré depuis un point P . Par ailleurs, notons que toutes deux sont bien solutions de l'équation d'Helmholtz. Exprimons ensuite l'Eq. G dans un volume compris entre la surface S et une petite sphère S' sur P incluse dans S :

$$\oint_S \left[U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) - \frac{e^{jkr}}{r} \vec{\nabla} U \right] \cdot \overrightarrow{dS} + \oint_{S'} \left[U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) - \frac{e^{jkr}}{r} \vec{\nabla} U \right] \cdot \overrightarrow{dS'} = 0 \quad (\text{H})$$

En se rappelant l'expression de l'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées sphériques (définies sur la Fig. 60)*, nous pouvons écrire :

*En coordonnées sphériques, l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) &= \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \\
&= \hat{r} e^{jkr} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right)
\end{aligned}
\tag{J}$$

En coordonnées sphériques, le volume élémentaire s'écrit :

$$\begin{aligned}
dV &= dx dy dz = \det [J_{\Phi}(r, \theta, \varphi)] dr d\theta d\varphi \\
&= r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi
\end{aligned}
\tag{K}$$

avec $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$ et $\det [J_{\Phi}(r, \theta, \varphi)]$, le déterminant de la matrice jacobienne de la transformation de repère, s'exprimant comme :

$$\begin{aligned}
\det [J_{\Phi}(r, \theta, \varphi)] &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| \\
&= r^2 \sin(\theta)
\end{aligned}
\tag{L}$$

Similairement, la surface élémentaire s'exprime aussi en fonction du déterminant de la matrice jacobienne :

$$dS = \frac{dV}{r} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \tag{M}$$

Le vecteur de surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ est orienté vers le centre de la sphère, le point P . Il s'écrit :

$$\overrightarrow{dS} = -\hat{r} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \tag{N}$$

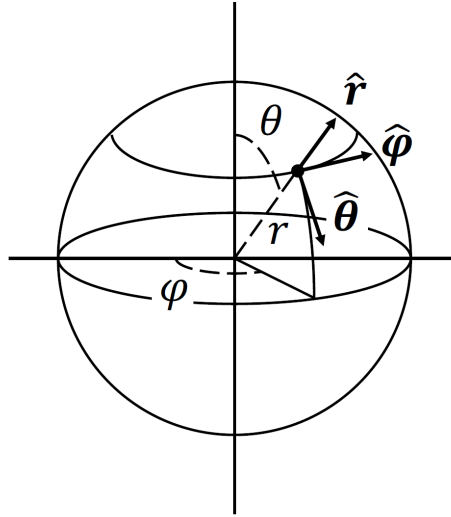


Fig. 60. – Système de coordonnées sphériques utilisé avec le rayon r , θ la colatitude (ou l'angle zénithal) et φ la longitude

En reprenant l'Eq. H, tout en sachant que $\hat{r} \cdot -\hat{r} = -1$, l'intégrale sur S' se réduit, grâce à l'Eq. I, à l'Eq. J et à l'Eq. N, à :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \tag{I}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_S \left[U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) - \frac{e^{jkr}}{r} \vec{\nabla} U \right] \cdot \overrightarrow{dS} + \\
& \oint_{S'} e^{jkr} \left(U - U jkr + r \frac{\partial}{\partial r} U \right) \sin(\theta) d\theta d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{O}$$

En faisant tendre r vers 0, la sphère S tend vers le point P de sorte que $U = U(P)$ avec $e^{jkr} \rightarrow 1$ et $r \rightarrow 0$, le deuxième membre se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}
\oint_{S'} e^{jkr} \left(U - U jkr + r \frac{\partial}{\partial r} U \right) \sin(\theta) d\theta d\varphi & \rightarrow \oint_{S'} U(P) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
& \rightarrow \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} U \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
& \rightarrow 4\pi U(P)
\end{aligned} \tag{P}$$

Finalement, en isolant $U(P)$, de l'Eq. O, nous retrouvons bien le **théorème intégral de Kirchhoff** :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{jkr}}{r} \vec{\nabla} U - U \vec{\nabla} \left(\frac{e^{jkr}}{r} \right) \right] \cdot \overrightarrow{dS} \tag{Q}$$

B LE CORRÉLOGRAMME DES DIFFÉRENTES MÉTRIQUES

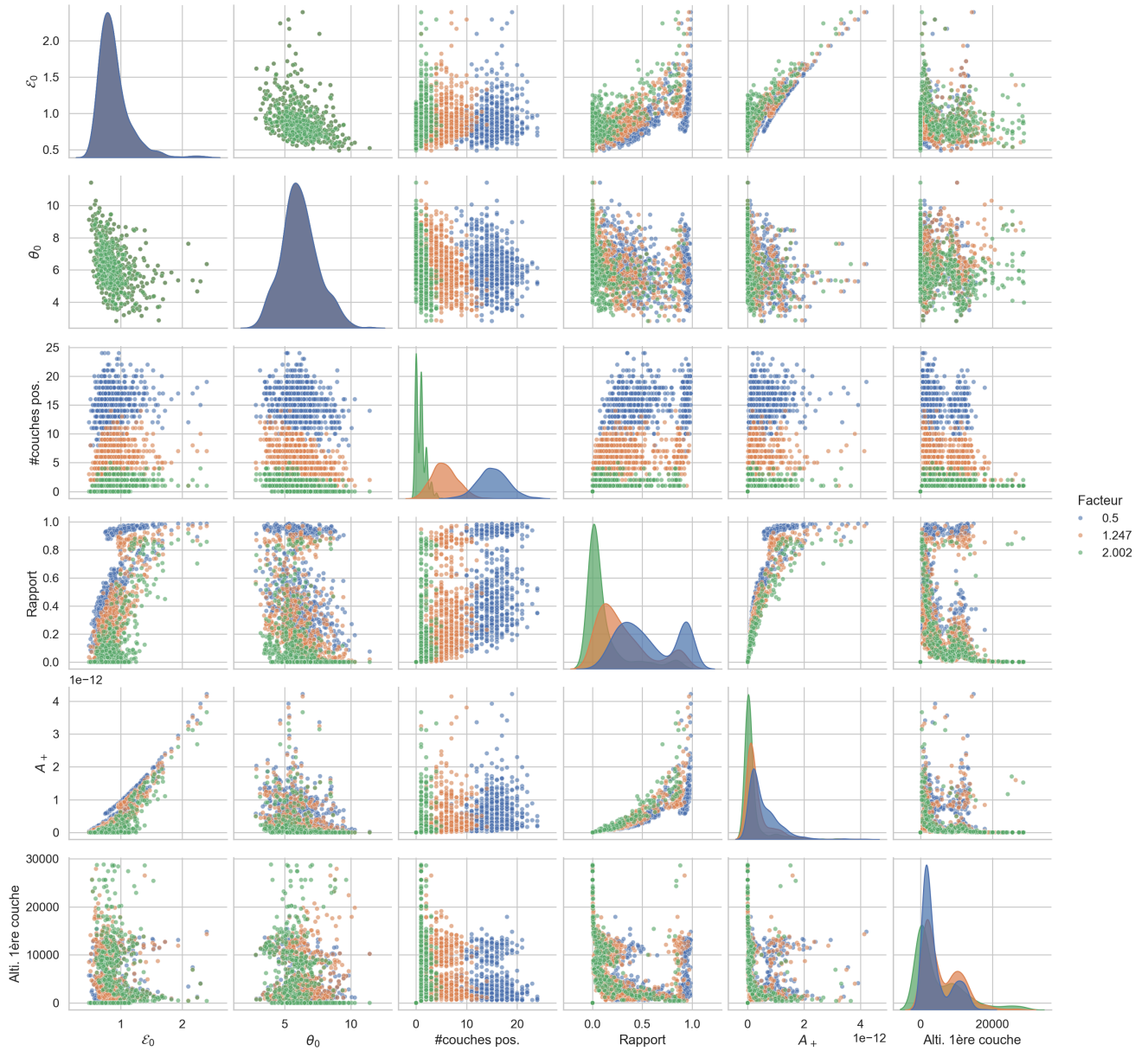


Fig. 61. – Corrélogramme représentant les relations croisées entre différentes métriques pour $f = \{0.5; 1.247; 2.002\}$: la qualité de la visibilité $\mathcal{E}_0$, l'angle isoplanatique θ_0 , le nombre de couches turbulentes positives (#couches pos.), le rapport des aires (rapport), l'aire des couches turbulentes positives (A_+) et l'altitude de la couche la plus turbulente (Alti. 1ère couche)

TABLES DES MATIÈRES

Résumé	i
Sommaire	ii
1 Introduction	1
2 Cadre théorique	3
2.1 L'atmosphère terrestre neutre et ionisée	3
2.2 Les processus stochastiques	5
2.3 Les turbulences atmosphériques	7
2.3.1 La théorie de la cascade d'énergie	8
2.3.2 La fluctuation de la vitesse du vent	9
2.3.3 La fluctuation de la température	9
2.3.4 La fluctuation de l'indice de réfraction	10
2.3.5 La densité spectrale de puissance	11
2.4 La propagation en espace libre	13
2.4.1 L'équation d'Helmholtz	13
2.4.2 Les diffractions de Fresnel et de Fraunhofer	14
2.4.3 La méthode du spectre d'ondes planes	17
2.4.4 Le faisceau gaussien	18
2.5 Les profils de C_n^2	20
2.5.1 Les modèles	20
2.5.2 Les quelques paramètres intégraux	21
2.6 La fibre optique	22
2.7 Les polynômes de Zernike	26
3 Étude statistique des profils de turbulence	28
3.1 Le jeu de données	28
3.2 Le profil moyen de référence	30
3.3 La détection de couches turbulentes	31
3.4 La corrélation avec $\mathcal{E}_0$ et θ_0	34
3.5 La matrice de corrélation	39
3.6 Les distributions relatives aux trois premières couches turbulentes	41
4 Reconstruction de profils de turbulence	43
4.1 Les distributions conjointes	43
4.2 La méthodologie	47
4.2.1 Une première reconstruction	48
4.2.2 Une contrainte sur l'aire totale positive	48
4.2.3 Une contrainte sur l'aire totale positive et le rapport des aires	49
5 Simulation	51
5.1 La grille d'entrée	51
5.2 La propagation par écrans de phase	52
5.2.1 La création d'écrans de phase	54

5.2.2 Les écrans de phase à partir d'un profil de Cn^2	58
5.3 Les paramètres de la simulation	61
5.4 L'injection dans la fibre optique	61
6 Validation	64
6.1 Les paramètres intégraux	64
6.2 L'éclairement énergétique reçu	65
7 Conclusion	68
Références	69
Annexes	iii
A Le théorème intégral de Kircchoff	iii
B Le corrélogramme des différentes métriques	vi
Tables des matières	vii

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl