

Faculté de philosophie, arts et lettres

Entre vérité et utilité : vers une ontologie mathématique issue de la pratique

Auteur : Claire
Poncelet
Promoteur(s) : Peter
Verdée
Année académique 2024-2025
Master de philosophie à finalité
approfondie

Introduction

Avant d'arriver à l'université, la question de la nature des mathématiques ne m'avait jamais traversé l'esprit. Les mathématiques de l'école consistent en effet à appliquer de manière répétitive des formules, permettant de résoudre des problèmes. C'est lors d'un de mes premiers cours de philosophie qu'un de mes professeurs a abordé cette question, s'étonnant précisément du fait que les mathématiques ne soient pas présentées aux étudiants de secondaire comme la découverte d'un monde indépendant, ce qui rendrait l'étude des mathématiques plus intéressante que l'application d'algorithmes de calcul.

Happée par l'aspect presque magique de cette réalité mathématique qui existe indépendamment de nous, de la manière dont nous parvenons à en rendre compte et même de la connaissance que nous en développons, j'ai adopté ce prisme ontologique, comme seule manière de comprendre vraiment ce que sont les mathématiques. Cette vision, dans la mesure où elle présente les mathématiques comme le résultat de l'exploration d'une réalité extérieure qui existe, m'a notamment permis d'aborder mes cours de mathématiques avec plus de fascination. J'avais envie d'en savoir plus sur cette réalité qui s'offrait alors à moi.

De manière assez amusante, c'est lorsque j'ai commencé mes études de philosophie que j'ai été pour la première fois confrontée à la manière dont fonctionnaient les théories mathématiques. On m'a enseigné le fonctionnement des systèmes formels, qui sont déterminés par leur langage, leurs règles de déductions, et leurs axiomes. Ces systèmes ont une interprétation, donnée par leur sémantique. Les axiomes de ces systèmes formels, m'avait-on dit, sont des propositions qu'on ne démontre pas, car ils sont évidents en eux-mêmes, et servent alors de base au développement de tous les théorèmes, permettant ainsi de propager leur vérités par les règles de déduction formelle.

Dans ce cadre, le système d'axiomes d'Euclide pour la géométrie m'a été présenté, ainsi que le débat sur l'axiome des parallèles : des axiomes de la géométrie euclidienne, c'était le seul qui ne semblait pas intrinsèquement évident. J'ai alors appris que des mathématiciens avaient pendant longtemps considéré que son manque d'évidence était sans doute lié au fait qu'il puisse être démontré à partir des autres, et tenté de prouver ce résultat, sans succès. J'ai découvert l'existence de géométries non-euclidiennes, développées à la suite de ce problème du cinquième axiome de la géométrie d'Euclide. La possibilité de développer une autre géométrie en prenant un ensemble d'axiomes différents m'a particulièrement interloquée : si la réalité mathématique existe indépendamment de nous, comment est-il possible d'avoir à la fois une géométrie ayant

l'axiome des parallèles dans l'ensemble de ses axiomes, et une géométrie avec exactement le même ensemble d'axiomes, à l'exception de l'axiome des parallèles, qui est remplacé par son inverse ? L'existence de deux ces théories mathématiques semble contradictoire : s'il existe une réalité mathématique, quelle est la vraie théorie ?

En réaction à cette découverte, j'ai adopté une forme de pluralisme mathématique dans une ontologie tirant vers le formalisme. Les théories mathématiques ne représentent pas une quelconque réalité mathématique, mais fonctionnent comme des jeux, où on développe, à partir d'axiomes fixés, différentes théories possibles, qui peuvent être toutes aussi intéressantes que les autres. Je dis que mon cadre ontologique tendait vers le formalisme, au sens où les propositions mathématiques n'étaient, pour moi, pas vides de sens, mais ce que ces propositions signifiaient ne référait à rien d'existant réellement. Je voyais à ce moment-là les mathématiques comme le développement de systèmes entièrement déterminés par leurs règles de déduction et leurs axiomes. Que les propositions mathématiques parlent de points ou de tables était pour moi totalement indifférent. Ce qui importait, c'est la définition des termes, et la manière dont il est possible de les manipuler.

J'ai ensuite appris l'existence des paradoxes de la théorie des ensembles, de la « crise » des fondements, et de ses tentatives de résolution, par le projet logiciste de Frege et Russell, l'intuitionnisme de Brouwer et le formalisme de Hilbert. Puis sont arrivés Gödel et ses théorèmes d'incomplétude. J'ai découvert Ladrière, et la manière dont il articule intuition et formalisme tout en conservant une forme de réalisme. Les résultats de Gödel, montrant qu'il existe des « propositions mathématiques vraies qui ne sont pas démontrables », ont été pour moi ce qui a permis de relancer mon attrait pour le platonisme mathématique. En effet, je me souvenais de cette sensation ressentie lors de l'étude de mes cours de mathématiques, où soudainement, j'avais l'impression de comprendre enfin un concept, non pas par l'étude formelle de sa définition et des manipulations qu'il permettait, mais comme si je « voyais » ce dont il était question. La définition venait ensuite éclairer cette intuition.

C'est plus tard, lorsque j'ai recommencé à faire des mathématiques, que s'est reposée la question, cette fois d'une autre manière. Il ne s'agissait plus de savoir si la réalité mathématique existait ou non, mais de comprendre comment nous pouvions avoir une prise sur les mathématiques. Il ne me semblait plus que faire des mathématiques permettait de découvrir une réalité mathématique indépendante, mais il ne me semblait pas non plus que cette réalité n'existait pas. J'avais la conviction que les mathématiques n'étaient pas découvertes, mais construites, ce qui n'enlevait rien à l'existence de la réalité mathématique, qui devait forcément exister d'une certaine manière. Je me suis

alors intéressée à la position intuitionniste de Brouwer, ainsi qu'aux mathématiques constructives. Que l'existence d'un objet mathématique dépende de notre capacité à le construire me semblait être un compromis acceptable entre l'existence d'une réalité mathématique et le fait que cette réalité soit construite par les mathématiciens.

Le problème de cette approche est qu'elle ne rend pas compte des mathématiques classiques, qui sont celles enseignées à l'université. Je me suis alors retrouvée face à un nouveau problème : comment concilier ma recherche d'une ontologie avec la pratique des mathématiques, comme elle se fait de manière générale ? Certes, le constructivisme a ses avantages et fonctionne plutôt bien, mais demander une réécriture de tout ce qui s'est fait en mathématiques ne me semblait pas la solution idéale à mon problème. Ce qui m'intéressait, c'était la recherche d'une ontologie qui fonctionnait pour les mathématiques, en accord avec la pratique des mathématiques, et même plus, l'ontologie des mathématiques me semblait devoir venir elle-même de la pratique des mathématiques, parce que la seule manière de savoir ce que sont les mathématiques, c'est précisément d'en faire.

Après cet abandon du constructivisme, qui bien que me semblant être une position acceptable, ne permettait pas de rendre compte de la pratique des mathématiques telle que je le faisais à l'université, je me suis retrouvée à nouveau à la case départ, celle de la question d'une ontologie mathématique satisfaisante. Il n'était plus possible de me tourner vers le platonisme : je ne pensais plus que la réalité mathématique existait indépendamment de nous. Admettre l'existence d'une réalité mathématique dépendante de nous sans passer par le constructivisme ne me semblait pas convaincant. J'ai vaguement pensé au structuralisme non-éliminatif, mais prétendre régler le problème de l'existence de la réalité mathématique en changeant l'objet du discours mathématique des objets mathématiques aux structures me semblait être une manière de détourner le problème : si la réalité mathématique, composée de ce dont parlent les mathématiques, à savoir, d'objets mathématiques n'existait pas, en quoi supposer que la réalité mathématique, composée de ce dont quoi parlent les mathématiques, à savoir, de structures mathématiques, existe n'est pas un renouvellement de la question ?

C'est alors plutôt naturellement que je me suis tournée vers le nominalisme. En repartant du constructivisme, et du fait que les objets mathématiques sont construits, je me suis demandé ce qui justifiait leur existence. Même construits, les objets mathématiques restent des objets abstraits. Ce qu'on fait quand on fait des mathématiques, c'est manipuler des concepts, et à partir de ces concepts, créer de nouveaux concepts, en relation les uns aux autres. Or, les concepts sont des moyens inventés par les humains leur permettant d'avoir une emprise sur le monde. Les objets

mathématiques n'échappent pas à cette catégorie. Ainsi, de la même manière qu'un concept est un outil, mais n'existe pas, j'en ai conclu que les objets mathématiques n'existaient pas non plus.

Cette approche ne me semblait pas totalement satisfaisante non plus. Nier totalement la vérité des propositions mathématiques en tant qu'elles réfèrent à des objets abstraits qui n'existent pas ne me paraissait pas rendre compte de la pratique mathématique. En effet, en faisant des mathématiques, on parle de propositions vraies, et de propositions fausses. Certes, le nominalisme ne peut pas affirmer pleinement la vérité des propositions considérées comme vraies en mathématiques, mais affirmer la fausseté des propositions mathématiques vraies n'est, encore une fois, pas représentatif de la manière dont sont faites les mathématiques.

Comme mentionné précédemment, en trame de fond de mon exploration philosophique des positions ontologiques en mathématiques, est venue s'ajouter une dimension venant de ma propre pratique des mathématiques. En effet, au plus j'avancais dans ma pratique des mathématiques, au plus je me rendais compte qu'elle était absente des réflexions ontologiques, qui semblaient toutes être développées à partir d'opinions philosophiques sur le sujet. Pourtant, peu importe l'ontologie considérée, le seul accès aux mathématiques est de faire des mathématiques.

Nous commencerons par développer plusieurs positions ontologiques, à savoir le platonisme, le structuralisme, le fictionnalisme, le constructivisme et le formalisme, en exposant leurs limites et leurs forces. Ensuite, nous élaborerons trois critères permettant d'analyser ces différentes positions. Une ontologie mathématique doit pouvoir rendre compte des pratiques des mathématiques. Elle doit également pouvoir expliquer le succès de l'utilisation des mathématiques dans leurs applications. Nous aborderons en particulier la physique et l'informatique. Enfin, elle doit venir de la pratique mathématique, au sens où elle ne doit pas venir d'un préjugé métaphysique externe. Après avoir développé ces critères, nous les utiliserons pour analyser les positions exposées au début de ce mémoire. Nous développerons ensuite les deux ontologies présentées par Maddy, dans l'optique de partir de notre troisième critère pour définir une ontologie. Nous terminerons en proposant une ontologie adéquate à la pratique, fondée non pas sur le critère de vérité, mais sur celui d'utilité. Nous verrons en quoi le fictionnalisme est particulièrement pertinent pour répondre à ces interrogations.

Présentation des positions ontologiques

Réalisme mathématique¹

Le réalisme est une position ontologique qui affirme l'existence des objets dont parle un discours. Le réalisme mathématique est donc simplement l'application de cette position aux mathématiques, autrement dit, le réalisme mathématique affirme l'existence d'objets mathématiques abstraits.

Il semblerait que le réalisme soit une ontologie naturelle à adopter en mathématiques. En effet, aussi bien les applications fructueuses des mathématiques que la cohérence générale des mathématiques donnent l'impression de découvrir des objets qui existent déjà. D'autant plus que « quiconque ayant essayé de résoudre un problème [mathématique a une certitude instinctive] qu'il pense à des "objets réels", qu'il s'agisse d'ensembles, de nombres, ou autres; et que ces objets ont des propriétés intrinsèques qui dépassent les axiomes spécifiques sur lesquels il base sa réflexion sur le moment »². Il est également adopté par de nombreux mathématiciens. Par exemple, Dieudonné exprime « la sensation qu'a chaque mathématicien de travailler avec quelque chose de réel »³.

Cette position, qui paraît naturelle au premier abord, révèle plusieurs difficultés dès qu'elle est examinée plus attentivement. Il n'est en effet pas évident d'expliquer philosophiquement la nature de la réalité mathématique :

That is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account on this reality, he finds it easier to pretend that he does not believe in it after all.⁴

Deux problèmes majeurs apparaissent. D'une part, un problème épistémologique : si les objets mathématiques sont abstraits, et donc hors de toute chaîne causale, comment est-il possible d'acquérir de la connaissance à leur sujet? Pour répondre à ce problème, il faut donner une explication claire quand à la manière dont nous pouvons avoir accès aux objets mathématiques. Certains, comme Gödel, y répondent en faisant appel à l'intuition, une faculté similaire à la perception qui nous permettrait de « percevoir » la réalité

¹ Cette section ainsi que celle consacrée au platonisme mathématique proviennent partiellement d'un travail de mathématiques réalisé par mes soins antérieurement dans le cadre du cours LMAT1381 en 2025.

² "the instinctive certainty of most everybody who has ever tried to solve a problem that he is thinking about "real objects", whether they are sets, numbers, or whatever; and that these objects have intrinsic properties above and beyond the specific axioms about them on which he is basing his thinking for the moment." Y. N. MOSCHOVAKIS, *Description Set Theory*, ed. J. Barwise – D. Kaplan – H.J. Keisler – P. Suppes – A.S. Troelstra, Amsterdam – New-York – Oxford, North-Holland Publishing Company, 1980 (Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, 100), p. 605.

³ « the feeling each mathematician has that he is working with something real » P. J. DAVIS, and R. HERSH, *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhauser, 1981, p. 321, cité dans P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Oxford – New-York, Clarendon Press, 1990, p. 3.

⁴ *Ibid.*, p. 3.

mathématique, de la même manière que la perception ordinaire nous permet de percevoir la réalité physique.

D'autre part, le réalisme fait face à un problème métaphysique : l'existence d'objets abstraits est en elle-même discutable. Or, comme en atteste Moschovakis, défendre un réalisme mathématique se fait en affirmant l'existence d'objets abstraits.⁵

Il existe différentes formes de réalisme en mathématiques, notamment le platonisme mathématique et certaines formes de structuralisme, comme nous le verrons plus tard.

Nominalisme mathématique

Le nominalisme mathématique est la position opposée au réalisme mathématique. Il s'agit en effet d'une position anti-réaliste en mathématique. Cette ontologie refuse l'existence des objets mathématiques, en tant qu'il s'agit d'objets abstraits. Autrement dit, le nominalisme mathématique est la position ontologique selon laquelle les objets mathématiques n'existent pas, ou n'existent pas en tant qu'objet abstrait.⁶ Remarquons que les structures mathématiques sont également des objets abstraits, et donc d'un point de vue nominaliste, n'existent pas non plus, comme nous le verrons plus en détail par après. Étant donné que les objets sur lesquels elles portent n'existent pas, dans ce cadre, les propositions mathématiques sont fausses.

Il existe diverses formes de nominalisme, telles que le fictionnalisme, qui propose que les propositions des mathématiques sont vraies au même sens que celles d'un récit fictionnel, ou certaines formes de structuralisme, telles que le structuralisme modal de Hellman, qui développe un « structuralisme sans structures » fondé sur la logique modale, dans lequel les énoncés mathématiques sont formulés comme des énoncés conditionnels nécessaires. Nous développerons ces deux ontologies plus tard.

À l'instar du réalisme, le nominalisme mathématique présente des problèmes, non pas épistémologiques et métaphysiques, mais liés au succès de l'utilisation des mathématiques dans les sciences, et à la sémantique des mathématiques. Commençons par le problème du succès des applications des mathématiques dans les sciences. Si les objets mathématiques n'existent pas, et que les propositions mathématiques sont fausses, comment expliquer le succès des sciences qui reposent sur elles ? Putnam affirme à ce sujet que la seule interprétation des mathématiques qui ne fait pas des sciences un miracle

⁵ "Nevertheless, most attempts to turn these strong [realist] feelings into a coherent foundation for mathematics invariably lead to vague discussions of 'existence of abstract notions' which are quite repugnant to a mathematician." Y. N. MOSCHOVAKIS, *Description Set Theory*, *op. cit.*, p. 605-606.

⁶ O. BUENO, « Nominalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2020 Edition), ed. Edward N. Zalta, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>>.

est une interprétation réaliste⁷. Une réponse pourrait être que les mathématiques ne sont pas indispensables aux sciences, position qui est défendue par Field⁸, qui affirme qu'il est possible d'éliminer les mathématiques des sciences. Une autre, proposée par Maddy, est que les scientifiques ne sont pas concernés par la véracité des outils qu'ils utilisent, mais uniquement par leur utilité dans la situation concernée⁹.

Le nominalisme mathématique pose aussi un problème sémantique. Dans son article *Mathematical Truth*¹⁰, Benacerraf expose deux conditions qui lui semblent nécessaires pour une bonne explication de la connaissance mathématique. L'un d'eux est le fait d'avoir une sémantique homogène pour le langage des mathématiques et le reste du langage¹¹. Autrement dit, la notion de vérité devrait être la même pour les mathématiques et pour le langage courant. Ceci ne pose pas problème dans une ontologie réaliste, au sens où les conditions de vérité d'une proposition mathématique sont liées, comme pour le langage courant, aux objets auxquelles elle se réfère et à leurs propriétés. En un sens, ceci ne pose pas vraiment de problème, où la même sémantique s'applique dans un cadre nominaliste, mais à la différence du platonisme, les objets auxquels se réfèrent les propositions mathématiques n'existant pas, ces propositions sont fausses. Néanmoins, certaines ontologies mathématiques nominalistes nécessitent une réécriture du langage mathématique. Par exemple, comme nous le verrons dans la section qui lui est consacrée, le structuralisme modal de Hellman introduit des opérateurs modaux, ce qui modifie le langage mathématique. Obtenir une sémantique homogène impliquerait alors une modification de la sémantique des propositions mathématiques, qui ne s'interprètent alors plus comme les propositions du reste du langage.

L'interprétation des propositions mathématiques en elle-même est aussi problématique. Si les objets mathématiques n'existent pas, comment interpréter une proposition mathématique, qui pourtant semble parler d'objets ? Dans une ontologie réaliste, le discours mathématique peut être pris littéralement : la proposition « il existe une infinité de nombres premiers » décrit l'existence d'une infinité de nombres premiers.

⁷ H. PUTNAM, "What is mathematical truth ?", in *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, Cambridge, Cambridge University Press, 1979, p. 73.

⁸ H. FIELD, *Realism, Mathematics, and Modality*, Oxford, Basil Blackwell Ltd, 1989 (Philosophia Mathematica), p.6.

⁹ M. COLYVAN, « Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2024 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/mathphil-indis/>>.

Parce que j'ai pas mieux. Les arguments sur le succès de l'utilisation des mathématiques dans les sciences seront développés plus en détail dans la section **Cohérence avec les applications des mathématiques dans les sciences**.

¹⁰ P. BENACERRAF, « Mathematical truth », *The Journal of Philosophy*, 19 (1973), p. 113-133.

¹¹ Benacerraf fait l'hypothèse que le reste du langage dispose déjà d'une sémantique homogène (cf. *Ibid.*, p. 661.).

À l'inverse, dans une ontologie mathématique nominaliste, ces phrases ne peuvent pas s'interpréter littéralement, étant donné que les objets dont elles parlent n'existent pas. Pour que ces phrases fassent sens dans une ontologie nominaliste, il est souvent nécessaire de modifier la syntaxe ou la sémantique du langage mathématique¹². Par exemple, dans une ontologie fictionnaliste, comme nous le verrons plus tard, un opérateur fictionnel permettant de parler de vérité mathématique au sein des mathématiques est introduit, donnant un sens aux propositions à l'intérieur des mathématiques.

Platonisme mathématique

Le platonisme mathématique est la position réaliste la plus évidente. C'est la position ontologique qui satisfait les trois conditions suivantes : (i) les objets mathématiques existent ; (ii) ce sont des objets abstraits, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas situés dans l'espace et le temps, et n'interviennent pas dans des relations causales ; (iii) ils sont indépendants de nous, nos pensées, notre langage et nos pratiques¹³. Il s'agit d'une ontologie réaliste qui affirme l'indépendance de la réalité mathématique. La vérité ou la fausseté de propositions au sujet d'objets mathématiques ne dépend ainsi que de propriétés que ces objets possèdent ou non, indépendamment de nos capacités à l'établir. Cette ontologie est adoptée par de nombreux mathématiciens, tels que Gödel et Grothendieck. Kant relate le témoignage suivant :

“[W]e are actually describing a reality, which is the mathematical world or set-theoretic world, which is real, as real as the physical world. We are acquiring real knowledge about something, which we don't know quite yet what it is but/.”¹⁴

Pour donner un exemple très récent, lors de ma défense de mémoire de bachelier en mathématiques, l'un des professeurs présents a affirmé adopter une ontologie platoniste des mathématiques, et croire en l'existence d'une réalité mathématique abstraite indépendante de nous.

Grothendieck envisage la pratique mathématique comme l'exploration et la cartographie de la vaste étendue du monde mathématique :

explorer ce monde immense et inconnu, appréhender ses contours jusqu'aux frontières les plus lointaines ; et aussi, parcourir en tous sens et inventorier avec un soin tenace et méthodique les

¹² O. BUENO, « Nominalism in the Philosophy of Mathematics », *op. cit.*

¹³ Ø. LINNEBO, « Platonism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2024 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/platonism-mathematics/>>.

¹⁴ D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », in *The Palgrave Companion to the Philosophy of Set Theory*, ed. Carolin Antos – Neil Barton – Giorgio Venturi, Palgrave Macmillan Cham, 2025 (Palgrave Companions), p. 15.

provinces les plus proches et les plus accessibles, et en dresser des cartes d'une fidélité et d'une précision scrupuleuse, où le moindre hameau et la moindre chaumière auraient leur place...¹⁵

Le travail du mathématicien est de découvrir, d'explorer et de décrire dans tous ses aspects la réalité mathématique vers laquelle il se sent poussé, tel un explorateur « parti à la découverte et à l'exploration de mondes inconnus et sans nom, [l]'appelant sans cesse pour [qu'il] les connaisse et les nomme »¹⁶.

C'est le travail d'exploration qui donne au cartographe ses tâches, qui apparaissent pour Grothendieck, comme « (une fois vu l'essentiel) [...] de l'intendance »¹⁷, et qui lui prennent la plupart de son temps. C'est parce qu'il observe la réalité mathématique que le mathématicien peut faire ce travail de fondements. Ce travail de fondements est, pour Grothendieck, un travail de bâtisseur qui construit des maisons. Il l'assimile à du travail sur pièces. Il s'agit de façonner et assembler toutes les pièces requises pour la « construction de toutes pièces des maisons qu'une voix (ou un démon...) intérieure m'enjoignait de bâtir, selon un maître d'œuvre qu'elle me soufflait au fur et à mesure que le travail avançait »¹⁸. Même dans la construction des théories mathématiques, le mathématicien ne fait que refléter la réalité mathématique qu'il a vue.

Gödel est également un partisan du platonisme. Il soutient que les mathématiques nous donnent des éléments en faveur d'une telle position : ses théorèmes d'incomplétude. Sans rentrer dans trop de formalisme¹⁹, ce qui n'est pas l'objet de ce mémoire, le premier théorème d'incomplétude de Gödel montre que toute théorie mathématique satisfaisant des conditions raisonnables est soit incohérente, soit incomplète. Autrement dit, en supposant qu'une telle théorie soit cohérente, au moins une proposition vraie exprimable dans la théorie n'est pas démontrable : vérité et démontrabilité ne sont pas synonymes. Cette limitation des théories mathématiques est présente déjà dans l'arithmétique de base. Pour pallier ce problème, il pourrait être tentant d'ajouter la proposition vraie aux axiomes de la théorie, afin de la « compléter ». Cette solution ne fonctionne pas, car la démonstration de Gödel fournit une procédure permettant de construire une proposition qui n'est pas démontrable dans n'importe quelle théorie cohérente qui contient l'arithmétique de base. En un mot, les théories mathématiques « suffisamment puissantes » sont *essentiellement* incomplètes. Pour reprendre la formulation de

¹⁵ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles*, Paris, Gallimard, 1971, p. 79.

¹⁶ *Ibid.*

¹⁷ *Ibid.*

¹⁸ *Ibid.*, p. 39.

¹⁹ Cf.: P. SMITH, *An introduction to Gödel's theorems*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013 (Cambridge Introductions to Philosophy), 2nd ed.

Ladrière²⁰, il y a des limitations internes aux formalismes : il est impossible pour un système formel de contenir l'ensemble des vérités arithmétiques qu'il vise à décrire.

Gödel interprète ses résultats d'incomplétude en ce sens. Pour lui, le fait que les théories mathématiques ne puissent pas démontrer toutes les propositions qu'elles peuvent exprimer est une preuve de l'existence de la réalité mathématique : si les mathématiques sont toujours plus vastes que ce qu'une théorie mathématique permet de décrire, c'est que cette réalité dépasse le cadre des théories mathématiques et en ce sens en est indépendante. Déterminer la véracité de telles propositions nécessite de « regarder » dans la réalité mathématique ce qu'il en est. Les mathématiques elles-mêmes donnent donc des éléments permettant de conclure en l'existence de la réalité mathématique :

It has turned out that (under the assumption that modern mathematics is consistent) the solution of certain arithmetical problems requires the use of assumptions essentially transcending arithmetic, i.e. the domain of the kind of elementary indisputable evidence that may be most fittingly compared with sense perception.²¹

La réalité mathématique dépasse nos théories mathématiques, en supposant que celles-ci soient consistantes, en un mot, elle est « inépuisable », au sens où pour chaque théorie mathématique qu'il est possible de construire, supposant qu'elle soit suffisamment puissante et complète, il sera toujours possible de trouver une proposition qui ne soit pas démontrable dans la théorie. Comme la réalité mathématique n'est jamais totalement saisissable par une théorie mathématique, elle est, pour Gödel, indépendante des théories mathématiques.

Quant aux objets mathématiques, ils ont le même statut que les objets physiques, et à ce titre, existent également :

It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory system of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions.²²

L'analogie entre les mathématiques et la physique ne s'arrête pas au statut des objets. Gödel, reprenant les arguments de Russell, établit un parallèle entre les axiomes des mathématiques et les lois de la nature.

²⁰ J. LADRIERE, *Les limitations internes des formalismes : étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentes dans la théorie des fondements des mathématiques*, Louvain – Paris, Nauwelarts – Gauthier-Villars, 1957 (Collection de logique mathématique).

²¹ K. GÖDEL, « Russel's mathematical logic (1944) », in *Collected works: Volume II: Publications 1938-1974*, Oxford, Oxford University Press, 1990, éd. révisée, p. 121.

²² *Ibid.*, p. 128.

Il nous reste alors à comprendre comment nous pouvons accéder à la réalité mathématique. En analogie avec la perception scientifique, Gödel suppose l'existence d'une faculté, l'intuition, qui permet d'accéder à la réalité mathématique, renforçant sa position platoniste. À l'aide de l'intuition mathématique, nous pouvons, d'une certaine manière, percevoir la réalité mathématique, ce qui permet notamment de constater la véracité des propositions. Par exemple, l'intuition permet, pour lui, de voir dans la réalité mathématiques que les axiomes sont évidents :

But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true.²³

Cette faculté permet de distinguer entre propositions mathématiques vraies et fausses, en tant qu'elle nous permet d'accéder à la réalité mathématique, exactement de la même manière que la perception nous permet d'accéder au monde physique et par là, de distinguer entre assertions vraies et fausses à son sujet.

L'intuition ne donne pas immédiatement accès à la connaissance mathématique. Elle sert plutôt de guide menant à la connaissance. Parsons la définit comme un « jugement perceptif, qui tend vers une forte présomption de vérité, mais qui peut en principe être faux »²⁴. Tout comme la perception du monde physique peut ne pas parfaitement rendre compte de la réalité physique, l'intuition peut mener à des erreurs quant à la compréhension du monde mathématique. Gödel montre tout de même une confiance en la capacité de l'intuition mathématique à mener vers la connaissance, de la même manière que la perception nous mène vers la connaissance physique.

I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e.. in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them, and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.²⁵

Comme les objets mathématiques et les objets physiques ont le même statut, il est logique que la manière dont nous puissions les connaître soit similaire.

C'est donc en tant que faculté similaire à la perception que l'intuition, sondant la réalité mathématique, permet de déterminer l'évidence des axiomes, qui, comme nous l'avons vu précédemment, « s'imposent à nous comme étant vrais »²⁶. Elle n'est

²³ K. GÖDEL, « What is Cantor's continuum problem ? (1964) », in *Collected works: Volume II: Publications 1938-1974*, Oxford, Oxford University Press, 1990, éd. révisée, p. 268.

²⁴ "It is rather more like making a perceptual judgment, which may have a strong presumption of truth but which can in principle be false." C. PARSONS, "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1 (1995), p. 61.

²⁵ K. GÖDEL, « What is Cantor's continuum problem ? (1964) », *op. cit.*, p. 268.

²⁶ "the axioms force themselves upon us as being true." *Ibid.*, p. 268.

cependant pas infaillible, et il peut arriver que l'intuition de certaines propositions ne soit pas claire, ce qui ne permet pas de déterminer si elles sont vraies ou non. C'est le cas, par exemple de l'hypothèse du continu, où, pour Gödel, notre compréhension du concept d'ensemble n'est pas suffisamment claire que pour permettre de résoudre la question de sa véracité²⁷. Dans le cas où l'intuition ne suffirait pas pour déterminer qu'un axiome est vrai, la véracité de cet axiome peut se déterminer de manière extrinsèque, en vertu de leurs conséquences vérifiables. Une conséquence vérifiable d'un axiome est une proposition qui était démontrable dans une théorie sans cet axiome, mais dont la démonstration peut également être faite à partir des axiomes de la théorie complétés par l'axiome en question, qui permet, par exemple, de simplifier la démonstration. La justification extrinsèque des axiomes n'enlève rien à leur justification intrinsèque. Étant donné que, pour Gödel, les axiomes des mathématiques ont une valeur de vérité objective, leur validité dépend de la réalité mathématique qu'ils expriment. Dans le cas de l'hypothèse du continu et de la théorie des ensembles, comme la théorie des ensembles décrit une réalité objective, qui existe, l'hypothèse du continu a une valeur de vérité déterminée par cette réalité, bien qu'il soit indépendant de ZFC²⁸. Il ne suffit pas, dans une ontologie platoniste des mathématiques, de dire que $CH \vee \neg CH$ est un théorème de ZFC, en vertu du principe du tiers exclu. En effet, le platoniste des mathématiques requiert plus que ce que nous dit la logique et les principes de la théorie des ensembles. L'appel à la logique classique n'est pas suffisant, car il n'y a pas de preuves du fait qu'elle suive effectivement la réalité mathématique, et en ce sens, il est possible que le théorème $CH \vee \neg CH$ soit incorrect²⁹. La question sur la valeur de vérité de l'hypothèse du continu a, dans une ontologie platoniste des mathématiques, une réponse objectivement déterminée dans la réalité mathématique.

Selon Ladrière³⁰, l'intuition permet de saisir les objets mathématiques, et avec eux, un horizon de potentialités qu'ils impliquent. De là, nous progressons, repoussant ainsi de plus en plus l'horizon mathématique, à mesure que nous découvrons la réalité mathématique, guidés par l'intuition. Ce travail d'exploration se poursuit, jusqu'à ce que nous tentions de saisir l'horizon en lui-même, la totalité des objets mathématiques, l'infini comme objet. Nous sommes alors confrontés à des paradoxes, tel celui de Russell, portant sur la notion d'ensemble : si nous prenons comme définition d'ensemble la notion

²⁷ C. PARSONS, "Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought", *op. cit.*, p. 71.

²⁸ "it follows that the set-theoretical concepts and theorems describe some well-determined reality, in which Cantor's conjecture must be either true or false." K. GÖDEL, « What is Cantor's continuum problem ? (1964) », *op. cit.*, p. 260.

²⁹ P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2011, p. 63.

³⁰ J. LADRIERE, *Les limitations internes des formalismes : étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentes dans la théorie des fondements des mathématiques*, *op. cit.*.

intuitive de collection d'objets, la simple assumption que toute propriété caractérise un ensemble, c'est-à-dire permet de déterminer les objets qui font partie de cet ensemble, pose problème. En effet, considérons la propriété « être un ensemble qui ne soit pas membre de lui-même ». S'il est facile de déterminer pour certains ensembles s'ils satisfont ou non cette propriété, comme l'ensemble des tables qui n'est pas une table et donc la satisfait, ou l'ensemble des ensembles, qui est un ensemble et donc ne la satisfait pas, que dire de l'ensemble des ensembles qui ne sont pas membres d'eux-mêmes? S'il satisfait la propriété de ne pas être membre de lui-même, alors il devrait être membre de lui-même, et donc ne la satisfait plus; et s'il ne la satisfait pas, alors il n'est pas membre de lui-même et donc devrait la satisfaire.

Le formalisme intervient alors comme outil permettant de clarifier les mathématiques intuitives, et d'éviter les paradoxes. Cependant, les théories formelles sont soumises à des limitations internes, comme le montrent les théorèmes d'incomplétude de Gödel : une théorie formelle suffisamment puissante et cohérente ne permet pas de démontrer la totalité des propositions qu'elle peut exprimer. Ainsi, la réalité mathématique déborde des théories formelles, qui ne peuvent la saisir dans son intégralité.

Ainsi, la méthode intuitive est insuffisante, car elle mène à des paradoxes, et la méthode formelle l'est également : il y a des limitations internes aux formalismes. Aucune de ces méthodes ne suffit seule. Il y a en effet deux faces au travail mathématique. Grothendieck les appelle respectivement l'explorateur et le bâtisseur. L'explorateur découvre la réalité mathématique, tandis que le bâtisseur construit les théories, formalisant ce que l'explorateur a découvert.

Ces deux « modes » de découverte, ou pour mieux dire, ces deux aspects d'un même processus ou d'un même travail, sont indissociablement liés. Ils sont essentiels l'un et l'autre, et complémentaires.

Dans mon travail mathématique, je discerne un mouvement de va-et-vient constant entre ces deux modes d'approche, ou plutôt, entre les moments (ou les périodes) où l'un prédomine, et ceux où prédomine l'autre. Mais il est clair aussi qu'en chaque moment, l'un et l'autre mode est présent.³¹

Le formalisme vient donc de l'intuition, en tant qu'il permet de décrire les vérités aperçues par l'intuition. Il s'agit donc de moments différents, mais complémentaires, de la démarche mathématique.

Selon Ladrière³², dont nous suivons ici le raisonnement, les objets mathématiques ne sont ni donnés par la perception, ni donnés immédiatement depuis un monde purement

³¹ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, op. cit., pp. 81-82.

³² J. LADRIERE, *Les limitations internes des formalismes : étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentes dans la théorie des fondements des mathématiques*, op. cit., p. 406.

intelligible. Ils sont accessibles à partir de constructions, utilisant des données perceptives, médiatisant des évidences. Ces évidences s'enchainent dans un ordre déterminé : d'une part, la démonstration nous permet de passer d'une évidence à une autre, et d'autre part, c'est en passant d'une évidence à une autre qu'il est possible de découvrir de nouvelles théories, ce que Grothendieck exprime de la manière suivante :

Ainsi sommes-nous amenés à constamment “inventer” le langage apte à exprimer de plus en plus finement la structure intime de la chose mathématique, et à “construire” à l'aide de ce langage, au fur et à mesure et de toutes pièces, les “théories” qui sont censées rendre compte de ce qui a été appréhendé et vu. Il y a là un mouvement de va-et-vient continu, ininterrompu, entre l'appréhension des choses, et l'expression de ce qui est appréhendé, par un langage qui s'affine et se recrée au fil du travail, sous la constante pression du besoin immédiat.³³

En effet, l'étude de certaines propriétés et structures mathématiques nous mène à la découverte de nouvelles propriétés et structures. Ensuite, il faut détacher la nouvelle théorie de l'ancienne dont elle est issue historiquement, en n'utilisant pour la constituer que des évidences élémentaires, afin d'en assurer le contenu.

C'est à ce niveau que le recours à la formalisation montre son importance. En effet, la rigueur du système formel permet de clarifier la théorie mathématique et d'y éviter les contradictions et les paradoxes. La formalisation est donc un outil permettant aux mathématiques de progresser, car elle permet de déceler les erreurs du raisonnement naturel et de découvrir de nouveaux théorèmes qui ne semblaient pas apparents au premier abord dans le champ intuitif. Le système formel est ainsi à la fois l'instrument de la pensée mathématique en tant qu'il permet de la corriger et de la développer, et son objet en tant qu'il représente la théorie mathématique considérée.

Par le processus de formalisation, le sens des objets formels se détache du sens intuitif d'où il provient : ils ont une signification au sein du système formel. Une fois formalisé, le système est totalement coupé de l'intuition qui a permis son émergence, et l'analyse des systèmes formels s'intéresse à leurs propriétés internes, et ne concerne pas ce qui est antérieur à la formalisation.

Structuralisme

Le structuralisme défend le fait que les théories mathématiques ne réfèrent pas à des objets, mais à des structures abstraites³⁴. Par exemple, l'arithmétique caractérise la

³³ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, op. cit., pp. 51-52.

³⁴ O. BUENO, « Nominalism in the Philosophy of Mathematics », op. cit..

structure des nombres naturels, l'analyse, celle des nombres réels, etc. Cette position a initialement été développée par Benacerraf³⁵ et Putnam³⁶.

Structuralisme non-éliminatif

Le point de départ est l'idée que la théorie axiomatique des ensembles fournit une fondation pour les mathématiques, et en ce sens, les objets mathématiques peuvent être identifiés à des ensembles. Benacerraf défend l'idée que la théorie des ensembles vue comme fondation des mathématiques cache le caractère structurel des mathématiques. Cela s'illustre notamment par le fait qu'il est possible de définir un objet mathématique de plusieurs manières différentes. Par exemple, les nombres naturels peuvent être décrits par les ordinaux finis de von Neumann ou par les ordinaux finis de Zermelo. Selon lui, les objets mathématiques ne devraient pas être identifiés avec des ensembles, et même, ne devraient pas être traités comme des objets, mais comme des positions dans des structures :

Therefore, numbers are not objects at all, because in giving the properties (that is, necessary and sufficient) of numbers you merely characterize an abstract structure-and the distinction lies in the fact that the "elements" of the structure have no properties other than those relating them to other "elements" of the same structure.³⁷

Par exemple, le nombre naturel 2 ne devrait pas être identifié comme un objet, mais comme une position dans la structure des nombres naturels.

Les théories mathématiques ne parlent donc pas d'objets particuliers, mais de structures abstraites. En ce sens, « l'arithmétique est la science qui élabore la structure abstraite commune à toutes les progressions du simple fait qu'elles sont des progressions. Il ne s'agit pas d'une science qui s'intéresse à des objets particuliers, à savoir les nombres »³⁸. Quel est alors le statut de ces structures ? Benacerraf reste évasif à ce sujet, mais ne semble pas vouloir réifier les structures.

Shapiro clarifie l'idée de position dans une structure. Il distingue deux manières de se rapporter à cette notion : d'une part, les positions sont envisagées comme des emplacements qui peuvent être occupés par différents objets, et d'autre part, elles peuvent être envisagées, tout comme les structures, comme des objets. Les structures ont donc une double nature : d'une part, universelle, au sens où une structure peut être instanciée par différents systèmes, et d'autre part, particulière, car elles peuvent être considérées

³⁵ P. BENACERRAF, « What Numbers Could not Be », *The Philosophical Review*, 1 (1965), p. 47-73.

³⁶ H. PUTNAM, "Mathematics without foundations", *The Journal of Philosophy*, 1 (1967).

³⁷ P. BENACERRAF, « What Numbers Could not Be », *op. cit.*, p. 70.

³⁸ "Arithmetic is therefore the science that elaborates the abstract structure that all progressions have in common merely in virtue of being progressions. It is not a science concerned with particular objects-the numbers." *Ibid.*.

elles-mêmes comme des objets. De plus, les structures n'existent pas uniquement par leurs instanciations : elles existent avant et séparément de celles-ci. Shapiro défend donc un structuralisme « *ante rem* ».

Le structuralisme de Shapiro affirme donc l'existence des structures en tant qu'objets abstraits. Il s'agit d'une forme réaliste de structuralisme. Ce type de structuralisme est appelé structuralisme non-éliminatif, appellation introduite par Parsons, en raison du fait que ce type de structuralisme postule des structures qui sont des objets abstraits.

Structuralisme éliminatif

Putnam part du même point de départ que Benacerraf, à savoir que la vision de la théorie des ensembles comme fondement des mathématiques, où tout objet mathématique peut être identifié à un ensemble, cache le caractère structurel des mathématiques. Il défend que les mathématiques n'ont pas besoin du fondement qu'apporte la théorie des ensembles, et que la caractéristique principale des propositions mathématiques est leur propension à être exprimées par un grand nombre de propositions équivalentes :

what I mean is rather that in mathematics the number of ways of expressing what is in some sense the same fact (if the proposition is true) while apparently not talking about the same objects is especially striking.³⁹

Putnam suggère alors de travailler avec la logique modale, et développe une forme de if-then-isme. En prenant comme exemple l'arithmétique des axiomes de Dedekind et Peano, un théorème de l'arithmétique tel que « $2+3=5$ » est compris comme ayant la forme « Pour tout système relationnel M , si M est un modèle des axiomes de Dedekind et Peano, alors $2_M+3_M=5_M$ », où 2_M , 3_M et 5_M ont le rôle de 2, 3 et 5 dans le modèle M . Cette manière d'interpréter les propositions mathématiques peut être étendue dans toutes les théories.

Un problème lié au if-then-isme de Putnam est le problème de la non-vacuité. Les conditionnels, en logique classique, sont vrais notamment si rien ne satisfait l'antécédent. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, s'il n'y a pas de modèles des axiomes de Dedekind et Peano, la proposition « Pour tout système relationnel M , si M est un modèle des axiomes de Dedekind et Peano, alors $2_M+3_M=5_M$ » est trivialement vraie. Le problème est que dans ce cas, la proposition « Pour tout système relationnel M , si M est un modèles axiomes de Dedekind et Peano, alors $2_M+3_M=6_M$ » l'est également. Une réponse à ce problème serait de s'appuyer sur la théorie des ensembles qui assure l'existence de tels modèles. Cette solution ne convient pas dans l'optique de Putnam, car elle repose sur la vision fondamentaliste de la théorie des ensembles, que le if-then-isme essayait

³⁹ H. PUTNAM, "Mathematics without foundations", *op. cit.*, p. 7.

précisément d'éviter. De plus, cela fonctionne dans ce cas, car la théorie des ensembles donne des modèles des axiomes de Dedekind et Peano, mais dans le cas d'une proposition portant sur la théorie des ensembles, le même problème se pose : comment s'assurer de l'existence de modèles de la théorie des ensembles ? Putnam propose, sans développer, de travailler avec la logique modale, ce qui permettrait de résoudre le problème de non-vacuité.

Hellman part du if-then-isme de Putnam et en améliore l'aspect modal, développant ainsi un structuralisme modal. La proposition arithmétique « $2+3=5$ » s'interprète alors comme « Nécessairement, pour tout système relationnel M , si M est un modèle des axiomes de Dedekind et Peano, alors $2_M+3_M=5_M$ », et « Possiblement, il existe M tel que M est un modèle des axiomes de Dedekind et Peano ». De cette manière, le problème de non-vacuité que présentait le if-then-isme de Putnam est évité.

Le structuralisme modal de Hellman est une position nominaliste : il élimine toute entité abstraite des mathématiques, aussi bien les objets que les structures. L'existence des structures de Shapiro est ainsi remplacée par l'aspect modal de sa théorie. Il ne s'agit pas de faire appel à des « objets possibles » qui existeraient sur un mode d'existence un peu obscur. En effet, il n'y a pas de réduction possible de la nécessité et de la possibilité du système de Hellman ; celles-ci viennent des lois de la logique modale, qui est pour Hellman une caractéristique irréductible des mathématiques. Ce type de structuralisme sans structures est appelé structuralisme éliminatif.

Problèmes du structuralisme

Un premier problème du structuralisme non-éliminatif est le problème de l'identité. Ce qui importe pour un objet mathématique dans cette perspective n'est pas ses propriétés intrinsèques, mais ses propriétés structurelles, c'est-à-dire sa position dans une structure. Les propriétés structurelles d'un objet mathématique sont donc ce qui définit l'identité des objets. Deux objets sont identiques s'ils ont les mêmes propriétés structurelles, c'est-à-dire s'ils occupent la même position dans la structure, autrement dit, s'ils sont structurellement indiscernables.

Or, dans certaines structures mathématiques, deux objets structurellement indiscernables peuvent être distincts. C'est par exemple le cas d'un graphe non étiqueté à deux vertices, sans arête. Dans ce cas, il n'y a pas de propriétés structurelles qui permettent de distinguer les deux vertices, qui, ayant la même position dans la structure, ont les mêmes propriétés structurelles. Un autre exemple est donné par le nombre complexe i et son conjugué complexe $-i$, qui sont structurellement indiscernables dans la structure des nombres complexes. En effet, il est possible de définir une application qui permet d'échanger i et $-i$, en préservant toutes les relations structurelles des nombres

complexes. Une telle application est appelée un automorphisme, c'est-à-dire un isomorphisme d'une structure sur elle-même : une bijection qui préserve la structure. Un automorphisme est une réorganisation des objets d'une structure, qui ne change pas ses relations internes. En quelque sorte, c'est une symétrie de la structure. L'exemple le plus simple d'automorphisme est l'application identité, qui envoie chaque élément d'un objet sur lui-même. La conjugaison complexe, application de l'ensemble des complexes dans lui-même, qui à chaque élément $z = a + bi \in \mathbb{C}$ associe son conjugué complexe $\bar{z} = a - bi$, est un automorphisme : il s'agit d'une application de l'ensemble des complexes dans lui-même qui en préserve la structure.

Le problème de l'identité est rencontré dans toute structure non rigide, c'est-à-dire toute structure qui admet des automorphismes non triviaux. Dans une telle structure, deux objets supposément distincts ne le sont plus, car comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, deux objets peuvent alors avoir des propriétés structurelles identiques. Comme le problème vient des structures non rigides, rigidifier la structure pourrait être une solution. Il s'agirait d'élargir le vocabulaire pour pouvoir fixer des éléments. Dans l'exemple précédent, cela voudrait dire qu'on ajoute le symbole i dans le langage, de telle sorte que i et $-i$ ne soient plus symétriques. L'objectif est de la rigidification est de briser les symétries des structures par l'introduction de noms explicites, afin de pouvoir distinguer des objets structurellement indiscernables. Cette solution n'est pas infallible, notamment dans le cas où le nombre d'éléments indiscernables est infini, comme par exemple, la droite réelle ordonnée.

Une autre solution est de poser l'identité comme primitive. Dans ce cadre, l'identité n'est pas déterminée par la position dans la structure, ce qui permet d'éviter le problème. Cette solution semble être en accord avec la pratique des mathématiques, au sens où, par exemple, i et $-i$ sont distincts sans justification structurelle, mais semble peu compatible avec le structuralisme en lui-même.

Les problèmes du structuralisme non éliminatif liés à la définition d'un objet par ses propriétés structurelles ne s'arrêtent pas là. Si les propriétés structurelles sont les seules que peut avoir un objet, les propriétés d'une position dans une structure ou d'une structure elle-même sont alors uniquement des propriétés structurelles. Dès lors, comment expliquer, par exemple, le fait que le nombre 8, comme position dans la structure des nombres naturels, soit également le nombre de planètes dans le système solaire ? Cette propriété n'est en effet pas une propriété structurelle de la position du nombre 8 dans la structure des naturels. En réponse à ce problème, il est possible de reformuler cette affirmation, en disant que les propriétés structurelles d'une position ou

d'une structure en sont les seules propriétés constitutives, mais qu'il est possible qu'elles aient d'autres propriétés.

Ceci nous amène à un troisième problème du structuralisme non éliminatif, à savoir la distinction entre les propriétés structurelles et les autres propriétés. Plusieurs réponses ont été proposées, telles que dire que les propriétés structurelles sont celles ayant un certain type de définition, ou celles préservées par certains morphismes.

Un quatrième problème du structuralisme non éliminatif vient du fait qu'une position est toujours une position dans une structure. Par exemple, le nombre 3 est une position dans la structure des naturels. Il semblerait qu'il y ait une dépendance ontologique du nombre 3 à la structure des naturels, qui doit lui préexister pour que celui-ci puisse être une position dans la structure. La manière dont cette dépendance ontologique doit être comprise n'est pas claire.

Le structuralisme non éliminatif, pose un cinquième problème, en tant que position réaliste. Comme nous l'avons vu dans la section sur le réalisme, l'existence d'objets abstraits pose un problème épistémologique d'accès à ces objets. Dans le cas du structuralisme non éliminatif, l'existence des structures en tant qu'objet abstrait demande une explication quant à la manière dont nous pouvons y accéder. La réponse à ce problème vient de la manière dont ont été introduites les structures. En effet, celles-ci ne sont pas « découvertes », comme c'est le cas des objets mathématiques dans une ontologie platonicienne, mais postulées dans nos théories. Le problème de l'accès aux objets abstraits est alors court-circuité, au sens où le structuralisme ne prétend pas accéder à des objets préexistants, mais les pose comme existants dans les théories, ce qui ne nécessite pas, à l'inverse d'une ontologie platonicienne, une perception des structures.

Dès lors, qu'est-ce qui justifie le postulat de structures ? La réponse du structuralisme non éliminatif est la cohérence de celles-ci avec nos théories, ce qui nous amène à un sixième problème, qui concerne à la fois le structuralisme non éliminatif et le structuralisme éliminatif : en quoi consiste cette cohérence, et comment l'établir ? Ce problème concerne les deux formes de structuralisme, car la cohérence supporte un point important dans chacune de ces positions : dans le structuralisme non éliminatif, la cohérence vient justifier l'existence des structures, et dans le structuralisme éliminatif, elle justifie leur possibilité.

Fictionnalisme

Le fictionnalisme est une version du nominalisme mathématique. Cette position ontologique rejette donc également l'existence des objets mathématiques, en tant qu'il s'agit d'objets abstraits, et affirme la fausseté des propositions mathématiques, car les

objets sur lesquelles elles portent n'existent pas. L'apport du fictionnalisme est qu'il permet tout de même de parler d'une certaine forme de « vérité » des propositions mathématiques. Les propositions mathématiques peuvent être vraies au même sens que les propositions au sujet d'un roman fictionnel, c'est-à-dire fausses en tant qu'elles ne font pas référence à des objets réels, mais vraies au sein d'un certain récit :

the sense in which a mathematical claim is true is pretty much the same as the sense in which « Oliver Twist lived in London » is true : the latter is true only in the sense that it is true according to a certain well-known story, and the former is true only in that it is true according to standard mathematics.⁴⁰

Pour pouvoir parler de la vérité des propositions mathématiques, Field introduit un opérateur fictionnel. Par exemple, la proposition « il existe une infinité de nombres premiers », qui est fausse dans le cadre du fictionnalisme, est vraie en ajoutant l'opérateur fictionnel. On obtient alors « dans le cadre de l'arithmétique, il y a une infinité de nombres premiers », qui est une proposition vraie dans le langage courant. Cet opérateur fictionnel répond au troisième problème du nominalisme, celui de l'interprétation des propositions mathématiques, exposé ci-dessus.

Concernant le problème du succès de l'application des mathématiques, Field considère que la vérité des théories mathématiques ne permet pas d'expliquer le succès de leurs applications. Il appuie son propos en développant une stratégie de nominalisation des sciences, c'est-à-dire une procédure permettant d'éliminer les mathématiques de l'explication scientifique, montrant ainsi que les mathématiques ne sont pas indispensables aux théories scientifiques. La nominalisation des sciences repose sur deux étapes indépendantes. D'une part, la modification de l'objectif des mathématiques : si les mathématiques ne produisent pas des énoncés vrais, quel est leur objectif ? D'autre part, donner des prémisses nominalistes.

Dans toute position nominaliste, les mathématiques produisent des énoncés faux, car les objets sur lesquels elles portent n'existent pas. Malgré l'ajout de l'opérateur fictionnel, c'est aussi le cas pour le fictionnalisme. La vérité n'est donc pas l'objectif des mathématiques, qui doit alors être redéfini. Pour Field, il s'agit de la conservativité. Pour être conservatrice, une théorie mathématique doit être « consistante avec chaque théorie consistante sur le monde physique »⁴¹, autrement dit, « une théorie mathématique M est conservatrice si et seulement si pour toute assertion A au sujet du monde physique et tout ensemble N d'assertions de ce type, N+M ne permet pas de déduire A à moins que

⁴⁰ P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, op. cit., p. 98.

⁴¹ “consistent with every internally consistent theory about the physical world” H. FIELD, *Realism, Mathematics, and Modality*, op. cit., p. 58.

N seul permette de déduire A »⁴². Une théorie mathématique conservatrice ajoutée à des faits physiques ne permet donc pas de conclure plus de choses sur le monde physique que ce que ne le permettait les faits physiques initiaux. Une telle théorie semble alors peu utile dans le cadre de l'étude du monde physique. Field défend que ce n'est pas le cas : les mathématiques permettent notamment de faciliter la déduction à partir des faits en écourtant les déductions.

Pour qu'une théorie mathématique couplée à des prémisses ne puisse pas déduire plus de choses que ne le permettaient les prémisses, il faut que ces prémisses soient nominalistes. En effet, la deuxième manière dont les mathématiques peuvent être utiles pour Field est en tant que prémisses d'une théorie. Si une théorie mathématique est ajoutée à des prémisses mathématiques (non nominalistes), il est possible d'obtenir plus des conclusions que les prémisses initiales ne permettaient pas d'obtenir. C'est là qu'intervient le deuxième point de la nominalisation des sciences : les prémisses des théories doivent être nominalistes. Field a fait ce travail dans le cas de la gravitation newtonienne, donnant ainsi une stratégie de nominalisation des sciences. Il reste à voir si cette stratégie est applicable pour d'autres théories physiques, et de manière plus large, pour d'autres théories scientifiques.

Le problème de la sémantique homogène, le deuxième problème des positions nominalistes exposé plus haut, consiste à avoir une sémantique homogène pour les propositions mathématiques et pour le reste du langage. En un sens, le fictionnalisme ne présente pas ce problème : les propositions des mathématiques sont évaluées de la même manière que les autres propositions. Elles portent sur des objets mathématiques, et leur valeur de vérité est obtenue en lien avec les propriétés de ces objets. Comme ils n'existent pas, les propositions à leur sujet sont fausses, sauf dans le cas des propositions universelles, qui sont trivialement vraies.

Néanmoins, afin de s'accorder aux valeurs de vérité données dans le cadre des mathématiques, un opérateur fictionnel est introduit. Un tel opérateur modifie la sémantique des propositions mathématiques, qui diffère alors de celle du reste du langage, et ainsi, ne permet pas de conserver une sémantique homogène entre les propositions des mathématiques et celles du reste du langage.

Constructivisme

Les mathématiques constructives sont basées sur l'interprétation de l'existence comme une construction. L'idée est qu'un objet n'existe que s'il est possible de le

⁴² "A mathematical theory M is conservative if and only if for any assertion A about the physical world and any body N of such assertions, A doesn't follow from N+M unless it follows from N alone." *Ibid.*.

construire. Ceci s'oppose à l'interprétation de la logique classique de l'existence, plutôt idéaliste. L'un des objectifs des mathématiques constructives est d'obtenir une interprétation computationnelle des mathématiques. En utilisant la logique intuitionniste plutôt que la logique classique, les mathématiques sont maintenues dans le domaine du constructible, sans que cela empêche le développement de mathématiques intéressantes. En effet, les travaux réalisés, notamment par Bishop, en mathématiques constructives, ont permis de développer une grande partie des mathématiques classiques à l'aide de méthodes constructives. Voyons maintenant ce que sont les méthodes constructives.

Dans la logique classique, la disjonction $P \vee Q$ s'interprète comme le fait qu'il soit contradictoire que P et Q soient faux en même temps, c'est-à-dire $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$, et l'existence $\exists x P(x)$ s'interprète de manière idéaliste comme le fait qu'il soit contradictoire que $P(x)$ soit faux pour tous les x , c'est-à-dire $\neg \forall x \neg P(x)$. Les mathématiques constructives utilisent à l'inverse une interprétation constructive des foncteurs logiques (interprétations BHK)⁴³ :

$\vee$ or	to prove $P \vee Q$ we must either have a proof of P or have a proof of Q .
$\wedge$ and	to prove $P \wedge Q$ we must have both a proof of P and a proof of Q .
$\rightarrow$ implies	a proof of $P \rightarrow Q$ is an algorithm that converts any proof of P into a proof of Q .
$\neg$ not	to prove $\neg P$ we must show that P implies $0 = 1$.
$\exists$ there exists	to prove $\exists x P(x)$ we must construct an object x and prove that $P(x)$ holds.
$\forall$ for each/all	a proof of $\forall x \in S P(x)$ is an algorithm that, applied to any object x and to the data proving that $x \in S$, proves that $P(x)$ holds.

Cette interprétation des foncteurs logiques implique le rejet du principe du tiers exclu. En effet, si dans la logique classique, $P \vee \neg P$ est toujours vrai, ce n'est pas le cas dans la logique intuitionniste. Pour que $P \vee \neg P$ soit vrai, il faut que nous ayons une preuve de P , c'est-à-dire que nous pouvons construire P , ou une preuve de $\neg P$, c'est-à-dire une preuve que P est contradictoire. Si nous n'avons ni l'une, ni l'autre, nous ne pouvons pas conclure que $P \vee \neg P$ est vrai.

Ceci a une influence sur les preuves par contradiction. En mathématiques classiques, pour montrer la proposition P , nous pouvons supposer la négation de P , $\neg P$, et en dériver une contradiction. En mathématiques constructives, cette contradiction n'est

⁴³ Le tableau vient de D. BRIDGES, E. PALMGREN, H. ISHIHARA, « Constructive Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2022 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/mathematics-constructive/>.

pas suffisante pour affirmer P ; ce qui a été démontré, c'est que $\neg P$ mène à une contradiction, autrement dit $\neg\neg P$. Par contre, ce type de preuve fonctionne dans le cas où nous souhaitons montrer la négation de P : pour démontrer $\neg P$, nous pouvons faire l'hypothèse de P , et en dériver une contradiction. Nous arrivons alors à la définition du foncteur $\neg$, comme présenté dans le tableau ci-dessus. Les preuves par contradictions sont tout de même admises dans les cas finis.

Formalisme

Le programme de Hilbert est l'objectif de formalisation des mathématiques sous la forme axiomatique, et la production d'une preuve de consistance de cette axiomatisation, réalisée uniquement à l'aide de méthode qu'Hilbert qualifie de « finitiste ». L'axiomatisation des mathématiques permettrait le développement des théories mathématiques sans avoir recours à l'intuition, qui est source d'erreur et mène à des paradoxes, tel que celui de Russel. Hilbert veut « rendre aux mathématiques leur ancienne prétention à une vérité inattaquable, que les paradoxes de la théorie des ensembles ont paru leur enlever »⁴⁴. Elle doit être accompagnée d'une preuve de sa consistance, qui pour Hilbert, doit être interne à la théorie, c'est-à-dire ne pas reposer sur celle d'un autre système, qu'il soit plus ou moins puissant, et n'utiliser que des méthodes « finitistes », que nous allons définir maintenant.

Le point de vue finitiste de Hilbert est un point de vue méthodologique sur les mathématiques les restreignant à l'utilisation de certains objets, qui sont « intuitivement présents comme expérience immédiate avant toute pensée »⁴⁵, et certaines méthodes et certains modes de raisonnement ne faisant pas appel à l'introduction de concepts abstraits. Hilbert l'exprime de la manière suivante :

[A]s a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to our faculty of representation, certain extralogical concrete objects that are intuitively present as immediate experience prior to all thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that can neither be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position

⁴⁴ D. HILBERT, cité dans J. LADRIERE, *Les limitations internes des formalismes : étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentes dans la théorie des fondements des mathématiques*, Gauthier-Villars, Louvain, Paris, 1957.

⁴⁵ “intuitively present as immediate experience prior to all thought” R. ZACH, « Hilbert's Program », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2023 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>>.

that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding, and communication.⁴⁶

Hilbert établit une distinction dans les mathématiques entre d'une part, une partie réelle, c'est-à-dire les mathématiques intuitives, consistant des formules décidables, sans variables, directement vérifiables, qui sont finitistes, et d'autre part, la partie idéale. Le programme de Hilbert consiste alors à « formaliser les mathématiques classiques dans un système incluant la formalisation de toutes les propositions directement vérifiables (par calcul) de l'arithmétique intuitive. La preuve de consistance montre que toutes les propositions réelles qui peuvent être montrées par des méthodes finitistes sont vraies, c'est-à-dire qu'elles peuvent être directement vérifiées par calcul fini »⁴⁷. Développons maintenant ce que sont les objets, méthodes et modes de raisonnement finitaires, acceptés par Hilbert.

Les objets dont parle Hilbert sont les signes. Dans le cas de l'arithmétique intuitive, les signes sont les chiffres, tels que 1, 11, 111, etc. Ces signes n'ont pas de signification, autrement dit, ils ne représentent pas des objets abstraits. La connaissance de leurs propriétés est intuitive. Ils ne sont pas physiques, comme, des lignes sur du papier, car il doit toujours être possible d'étendre un chiffre en ajoutant une ligne, ce qui impliquerait que l'espace physique soit infini. Leur forme doit être reconnaissable, indépendamment de l'espace, du temps, des conditions de production du signe et des potentielles différences dans le résultat final. Il ne s'agit pas non plus de constructions mentales, car leurs propriétés sont objectives, bien que leur existence dépende de leur construction intuitive. Ces signes sont logiquement primitifs, c'est-à-dire qu'ils ne participent pas à des relations logiques, ils ne peuvent pas être prédiqués de quelque chose. Ce ne sont ni des concepts ni des ensembles. Bernays décrit les objets finitistes comme des objets formels générés récursivement par répétition. En reprenant l'exemple des lignes, elles sont alors la représentation concrète d'objets formels.

Voyons maintenant quelles sont les propositions qui ont un sens d'un point de vue finitiste. Les propositions de base sont celles exprimant une égalité, une inégalité, une opération sur des objets finitaires, ou une propriété décidable. Un exemple d'opération est la concaténation : la concaténation des signes 11 et 111 est exprimée par « 2+3 ». Les

⁴⁶ D. HILBERT, 1926, p. 376, cité dans R. ZACH, « Hilbert's Program », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>>, traduction dans VAN HEIJENOORT, Jean, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967, p. 119–124.

⁴⁷ “Classical mathematics is to be formalized in a system which includes formalizations of all the directly verifiable (by calculation) propositions of contentual finite number theory. The consistency proof should show that all real propositions which can be proved by ideal methods are true, i.e., can be directly verified by finite calculation.” *Ibid.*

opérations acceptées sont celles qui peuvent être définies par récursion primitive. La propriété « être un nombre premier » est un exemple de propriété décidable. Les propriétés acceptables d'un point de vue finitiste sont celles dont la fonction caractéristique est finitiste. Pour l'exemple précédent, la fonction qui associe à chaque nombre 1 si il est premier et 11 sinon, peut être définie de manière primitive récursive, et est donc finitiste. Les propositions peuvent être combinées par les opérations logiques usuelles, la conjonction, la disjonction et la négation, ainsi que par quantification bornée. L'exemple donné par Hilbert est le suivant : la proposition « il existe un nombre premier entre $p+1$ et $p!+1$ » où p est un grand nombre premier est acceptable, car elle abrégie la proposition « $p+1$, ou $p+2$, ou $p+3$, ou ..., ou $p!+1$, est premier »⁴⁸.

Certaines propositions finitistes posent problème. Ce sont les propositions exprimant des faits généraux sur des nombres. Ces propositions sont problématiques en tant qu'il est impossible de les nier dans un point de vue finitiste. En effet, « on ne peut pas, après tout, essayer tous les nombres »⁴⁹. Hilbert affirme que les propositions générales finitistes ne doivent pas être comprises comme des conjonctions infinies, mais « seulement comme des jugements hypothétiques qui vient affirmer quelque chose lorsqu'un nombre est donné »⁵⁰. Ces propositions, bien qu'elles soient problématiques, sont importantes, car ce type de proposition intervient dans les démonstrations de consistance. En effet, la proposition affirmant la consistance d'un système formel S a la forme « pour toute suite de formules P , P n'est pas une dérivation d'une contradiction dans S ».

Hilbert ne donne pas de description générale des opérations et des principes de démonstrations acceptés d'un point de vue finitiste, mais seulement des exemples d'opérations et de méthodes d'inférence dans son arithmétique intuitive qu'il accepte comme finitiste. Les opérations définies de manière primitive récursive et les preuves par induction y sont acceptées, mais ni Hilbert ni Bernays n'affirment que ce sont les seules

⁴⁸ D. HILBERT, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95, p. 161-190, cité dans Zach, Richard, "Hilbert's Program", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), ed. Edward N. Zalta - Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>>, traduction dans VAN HEIJENOORT, Jean, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967, p. 119-124.

⁴⁹ D. HILBERT, 1928, p. 470, cité dans R. ZACH, « Hilbert's Program », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), ed. Edward N. Zalta - Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>>, traduction dans VAN HEIJENOORT, Jean, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967, p. 119-124.

⁵⁰ D. HILBERT, 1928, p. 470, cité dans R. ZACH, « Hilbert's Program », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2023 Edition), ed. Edward N. Zalta - Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>>, traduction dans VAN HEIJENOORT, Jean, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967, p. 119-124.

qui le sont. Ils font d'ailleurs usage de méthodes qui ne sont pas primitives récursives dans des preuves de consistance finitistes.

Une interprétation courante des idées de Hilbert est une position instrumentaliste : le contenu des mathématiques serait remplacé par un jeu sans sens de formules vides. Le point de vue de Hilbert n'est cependant pas métaphysique sur le statut des mathématiques, mais méthodologique : une réussite du programme de Hilbert n'impliquerait pas que les mathématiques sont vides de sens, mais qu'il est possible de faire des mathématiques *comme si* elles étaient vides de sens.

Comme nous l'avons vu, la posture formaliste de Hilbert est méthodologique, et n'est pas une posture ontologique en elle-même, bien que certains l'interprètent comme telle. Il existe une autre forme de formalisme non hilbertien, qui à l'inverse, est une posture ontologique. À la différence du formalisme de Hilbert, ce formalisme prend les mathématiques dans leur ensemble. Ce formalisme⁵¹ fait l'analogie entre les mathématiques et les jeux ; faire des mathématiques n'impliquerait pas plus d'engagement ontologique que jouer aux échecs⁵².

Le formalisme considère donc que les énoncés mathématiques sont dénués de sens. Les termes auxquels ils réfèrent sont vides, et ne désignent pas des objets ni des propriétés. Les mathématiques sont alors un enchaînement de symboles vides manipulés selon des règles fixées. Cette position est parfois défendue par les mathématiciens ; Dieudonné affirme que bien que « [les mathématiciens croient] en la réalité des mathématiques, [...] quand les philosophes [les] attaquent avec leurs paradoxes, [ils se précipitent] pour se cacher derrière le formalisme et dire 'Les mathématiques ne sont qu'une combinaison de symboles dénués de sens' »⁵³. Davis et Hersh défendent que les mathématiciens croient en la réalité mathématique, mais que lorsqu'on leur demande de donner une description philosophique de cette réalité, il leur semble plus facile d'affirmer qu'ils n'y croient pas, et de défendre une ontologie formaliste.

Le formalisme entraîne des problèmes. D'une part, si les mathématiques sont simplement des suites de symboles vides dénuées de sens, comment justifier le succès de ses applications, notamment en sciences ? D'autre part, le statut des métamathématiques pose problème. Les métamathématiques permettent de décrire le langage des

⁵¹ En anglais, *game formalism*.

⁵² A. WEIR, « Formalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2025 Edition), ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/formalism-mathematics/>>.

⁵³ “we believe in the reality of mathematics, but of course when philosophers attack us with their paradoxes we rush to hide behind formalism and say ‘Mathematics is just a combination of meaningless symbols’.” P. J. DAVIS, and R. HERSH, *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhauser, 1981, p. 321, cité dans P. MADDY, *Realism in mathematics*, op. cit., p. 2.

mathématiques, les règles de déductions utilisées, etc. Comme le souligne Frege, « la théorie du jeu doit être distincte du jeu lui-même »⁵⁴. Or, les métamathématiques sont une partie des mathématiques elles-mêmes. Ce qui est étudié par les mathématiques, dans une ontologie formaliste, ce sont les signes concrets, qui sont finis. Cependant, les métamathématiques s'intéressent à des objets abstraits. En effet, bien que chacune des expressions des mathématiques, par exemple, s'exprime sous forme concrète et est finie, il y a une infinité d'expressions, et parler de manière générale des expressions implique de les prendre comme des objets abstraits. Les métamathématiques concernent donc une infinité d'objets abstraits, en contradiction avec ce que prône le formalisme.

Comment choisir ?

⁵⁴ 'Let us remember that the theory of the game must be distinguished from the game itself' G. FREGE, cité dans A.WEIR, « Formalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/formalism-mathematics/>>.

Exigences pour une ontologie des mathématiques

L'objectif de cette section est de développer les exigences qui sont attendues d'une ontologie des mathématiques. Il nous semble important de commencer par établir ces exigences, afin de baser les critères nécessaires non seulement à la construction d'une bonne ontologie mathématique, mais également à l'analyse des ontologies existantes. En effet, analyser les positions existantes sans avoir une idée précise de ce que nous attendons d'une ontologie mathématique ne nous permettrait pas de mettre en évidence leurs avantages et leurs lacunes. Les critères qui nous semblent importants pour une bonne ontologie mathématique sont la compatibilité de cette ontologie avec la pratique des mathématiciens, sa cohérence avec les applications des mathématiques et le fait qu'elle soit issue des mathématiques elles-mêmes et pas appliquée dessus de l'extérieur. Nous allons maintenant développer ces trois critères.

Adéquation à la pratique des mathématiciens

Une bonne ontologie mathématique se doit de rendre compte des pratiques des mathématiciens, de la manière dont ils font effectivement des mathématiques. L'objectif n'est en effet pas d'imposer une ontologie déterminée a priori sur les mathématiques en ignorant la pratique des mathématiciens, mais plutôt d'analyser ces pratiques, c'est-à-dire leurs méthodes, intuitions et raisonnements, afin d'en tirer une ontologie en accord avec elles, et par là, en accord avec ceux qui les font.

Pour développer ce critère, nous exposerons certains éléments de la pratique des mathématiques, à savoir l'introduction de nouveaux objets mathématiques, la justification du choix des axiomes, le décalage entre la pratique des mathématiques et les publications, la dimension collective des mathématiques et les démonstrations, ainsi que les exigences ontologiques qu'ils impliquent. Nous verrons aussi ce que relatent les mathématiciens au sujet de leurs vues sur l'ontologie, notamment quant à l'expérience de l'intuition et l'impression de découverte de la réalité mathématique. Pour Maddy, cependant, les dires des mathématiciens concernant l'ontologie sont trop divers, ne permettant pas de considérer qu'il s'agit de données fiables quant à la recherche d'une ontologie mathématique⁵⁵. Ils peuvent servir de guide heuristique, mais en tant qu'il n'y

⁵⁵ "Given the wide range of views mathematicians tend to hold on these matters, it seems unlikely that the many analysts, algebraists, and set theorists ultimately led to embrace sets would all agree on any single conception of the nature of mathematical objects in general, or of sets. This is the line of thought developed in [1997], §III.6. 32 I set intrinsic justifications aside until Chapter V. in particular; the Second Philosopher concludes that such remarks should be treated as colorful asides or heuristic aides, but not as part of the evidential structure of the subject. What matters for her methodological purposes is that all concerned do feel the force of the kinds of considerations we've been focusing on here; these are the shared convictions that actually drive the practice." P. MADDY, *Defending the Axioms*, op. cit., pp. 52-53.

a pas de consensus, ne permettent pas de donner des preuves en faveur d'une quelconque position ontologique.

Introduction de nouveaux objets

Commençons par l'introduction des ensembles en mathématiques. Maddy analyse dans *Defending the axioms* l'introduction des ensembles par Cantor et Dedekind. Aussi bien l'un que l'autre, lorsqu'ils introduisent le concept d'ensemble, le font pour répondre à une question particulière dans le cadre de leur recherche.

Cantor introduit les ensembles en tant qu'objets mathématiques dans le cadre de la généralisation d'un théorème de représentation de fonctions par des séries trigonométriques. Dans un premier temps, il démontre l'unicité d'une telle représentation, si la série converge en chaque point du domaine. Dans un second temps, il démontre que cette unicité était préservée, même dans le cas où il y a un nombre fini de points exceptionnels, où la série ne converge pas vers la valeur de la fonction représentée, et dans celui où il y a une infinité de points exceptionnels qui se trouvent autour d'un unique point limite. Cantor étend encore ce résultat. Il définit une opération sur l'ensemble des points limites, qui permet de former son ensemble dérivé. Il montre alors que si le n -ième ensemble dérivé de l'ensemble des points limites est vide, pour un naturel n , alors la représentation est unique. Parler d'ensembles de points se faisait déjà à cette époque, mais ce qui est novateur dans la manière dont Cantor mobilise les ensembles dans sa recherche, c'est qu'il définit une opération sur les ensembles : il définit une opération qui consiste à prendre la dérivée de cet ensemble. Les ensembles sont de cette manière considérés comme des objets mathématiques à part entière, sur lesquels il est possible de définir des opérations. L'introduction des ensembles en tant qu'objets mathématiques se fait donc dans l'objectif de répondre à un besoin mathématique concret et explicite, à savoir étendre la compréhension des représentations trigonométriques⁵⁶.

En ce qui concerne Dedekind, il introduit également les ensembles dans la perspective de répondre à une question mathématique particulière, en algèbre, dans sa théorie des idéaux. Il utilise la notion d'ensemble pour remplacer le nombre idéal de Kummer, qui n'est jamais défini explicitement, mais seulement connu par son rôle de diviseur d'autres nombres. Dedekind identifie le nombre idéal avec l'ensemble des nombres que Kummer aurait divisés. Le nombre idéal est donc un ensemble, qui est alors traité comme un objet mathématique. Le fait d'utiliser les ensembles comme objets mathématiques en tant que tels permet de parler d'ensembles arbitraires et de définir des

⁵⁶ "From a methodological point of view, what's happened is that a new type of entity – a set – has been introduced as an effective means toward an explicit and concrete mathematical goal: extending our understanding of trigonometric representations." *Ibid.*, p. 42.

opérations dessus indépendamment de la manière dont ils sont représentés. L'un des objectifs de Dedekind est de développer des arguments généraux avec des termes sans représentations, ce qui permettrait d'expliquer pourquoi les calculs avec des objets mathématiques et les propriétés de ces objets sont indépendantes du choix de leur représentation. Il introduit également les ensembles dans d'autres domaines, à chaque fois avec des objectifs mathématiques explicites : en analyse, donner une caractérisation rigoureuse de la continuité servant de fondement à l'analyse et à une étude plus générale des structures continues, et en arithmétique, donner une caractérisation rigoureuse des nombres naturels ainsi que la fondation de l'arithmétique qui en résulte⁵⁷.

En supposant, comme le fait Maddy, que ces exemples sont typiques de la pratique mathématique, nous pouvons conclure que les ensembles sont introduits comme moyens permettant de répondre à des objectifs mathématiques particuliers⁵⁸.

Justification des axiomes

Partons d'un exemple, celui de l'axiomatisation de la théorie des ensembles, et en particulier, la question de la justification de l'axiome du choix. Zermelo défend cet axiome à l'aide de ces deux aspects. D'une part, il affirme son évidence intrinsèque :

That this axiom [...] has frequently been used, and successfully at that, in the most diverse fields of mathematics, especially in set theory, by Dedekind, Cantor, F. Bernstein, Schoenflies, J. König, and other is an indisputable fact [...] Such an extensive use of a principle can be explained only by its *self-evidence* [...] No matter if this self-evidence is to a certain degree subjective – it is surely a necessary source of mathematical principles.⁵⁹

D'autre part, il insiste sur la dimension de fécondité, en listant une série de problèmes pouvant être résolus en acceptant l'axiome du choix. Le fait que l'axiome du choix permette de résoudre des problèmes impossibles à résoudre autrement justifie pour lui son choix en tant qu'axiome :

So long as the relatively simple problems mentioned here remain inaccessible [without Choice], and so long as, on the other hand, the principle of choice cannot be definitely refuted, no one has the right to prevent the representatives of productive science from continuing to use this 'hypothesis' as one may call it for all I care – and developing its consequences to the greatest extent, especially since any possible contradiction inherent in a given point of view can be discovered only in that way

⁵⁷ *Ibid.*, p. 45.

⁵⁸ *Ibid.*, p. 52.

⁵⁹ E. ZERMELO [1908a], p. 187, cité dans P. MADDY, *Defending the Axioms*, *ibid.*, p. 46.

[...] principles must be judged from the point of view of science, and not science from the point of view of principles fixed once and for all.⁶⁰

L'efficacité d'un axiome et ce qu'il permet d'un point de vue mathématique sont donc des éléments importants pour justifier le choix d'un axiome.

Comme nous l'avons vu précédemment, l'évidence des axiomes est défendue notamment par Gödel, qui affirme qu'ils « s'imposent comme vrais »⁶¹. Cette évidence intrinsèque est néanmoins critiquée :

assumptions once thought to be self-evident have turned out to be debatable, like the law of the excluded middle, or outright false, like the idea that every property determines a set. Conversely, the axiomatization of set theory has led to the consideration of axiom candidates that no one finds obvious, not even their staunchest supporters.⁶²

Ceci peut s'expliquer pour Gödel par les faits que notre intuition sur de telles assumptions peut ne pas être claire, et que l'intuition n'est pas une source infaillible de connaissance, mais simplement un guide vers celle-ci. L'exemple de l'axiome des parallèles de la géométrie euclidienne est un autre exemple des failles de l'évidence des axiomes. En effet, cet axiome a longtemps été considéré comme peu évident.

Easwaran expose quatre caractéristiques menant à l'adoption d'un axiome : être largement acceptable, permettre de prouver des conséquences intéressantes, éviter les problèmes philosophiques et être indépendant des autres axiomes⁶³. L'évidence intrinsèque des axiomes n'est pas un critère de choix. Ce qui permet de choisir un axiome n'est pas leur évidence, mais leur rôle pragmatique, au sens où ils permettent de mettre fin à des controverses au sujet de résultats controversés. Comme le résume Easwaran,

it seems that axioms are not chosen because they are inherently certain and let us make an uncertain result certain – they can certainly play this role, but that is not how or why they are chosen. Rather, they are uncontroversial and we use them to make a controversial result uncontroversial. I would like to suggest that this is the real role of axioms in mathematics: to stop arguing about our disagreements, and just work together on proving theorems.⁶⁴

Le troisième critère est interprété par Kant comme le fait qu'un même axiome peut être accepté par des mathématiciens avec des opinions philosophiques différentes, pour des raisons différentes liées à leurs convictions philosophiques.

⁶⁰ Voir E. ZERMELO [1908a], p. 189, cité dans P. MADDY, *Defending the Axioms*, *ibid.*, p. 47.

⁶¹ K. GÖDEL, « Russel's mathematical logic (1944) », *op. cit.*

⁶² P. MADDY, "Believing the axioms. I." *Journal of Symbolic Logic*, 53(2), 1988, p. 481, cité dans D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », in *The Palgrave Companion to the Philosophy of Set Theory*, ed. Carolin Antos – Neil Barton – Giorgio Venturi, Palgrave Macmillan Cham, 2025 (Palgrave Companions), p. 3.

⁶³ *Ibid.*, p. 3.

⁶⁴ [EASWARAN 2008, p. 385] cité dans D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », *ibid.*, pp. 3-4.

Décalage entre pratique et rédaction

Kant défend le fait que les axiomes jouent un plus grand rôle dans la pratique des mathématiques que la seule question de leur choix. Elle affirme que le rôle et la fonction des axiomes ne sont pas inhérents au système axiomatique mais qu'ils dépendent de celui qui l'utilise :

the power of axiom systems stems from the possibility of changing our perspective and using them in different ways. [...] Putting forward an axiomatization does not commit mathematicians to one particular perspective.⁶⁵

Elle illustre cela par l'utilisation d'axiomes cachés en mathématiques.

Par utilisation d'un axiome dans la pratique mathématique, Kant entend « toute action (mentale) significative d'un mathématicien incluant cet axiome »⁶⁶. Elle distingue quatre utilisations des axiomes dans la pratique des mathématiques : son apparition comme prémisses dans une démonstration, son apparition dans la conclusion d'un théorème, son utilisation dans le processus de découverte d'une preuve, et l'étude des axiomes en eux-mêmes et non comme outils. Ce qu'elle appelle utilisation cachée des axiomes en mathématiques est un exemple du troisième point. En effet, l'axiome n'a été utilisé que pour découvrir la preuve, et est ensuite effacé dans la preuve elle-même qui n'en a pas besoin.

L'usage caché d'axiomes intervient notamment comme guide méthodologique. Un autre axiome que ceux de ZFC peut ainsi être utilisé comme guide dans la recherche d'une preuve, ou permettre plus de puissance pour prouver un résultat, avant d'être éliminé de la rédaction de la preuve :

So, the idea of the hidden use of a new axiom is that it is used in the discovery process of a theorem and not in the final proof and that it guides the search for a proof but can be eliminated in the end. Described like this, of course, it is very hard to find instances of the hidden use, unless one asks the practitioners for examples. Since the final proof does not mention the new axiom, as a reader of a final ZFC-proof, we do not learn about the new axiom's use before.⁶⁷

Grothendieck mentionne également ce phénomène. Il affirme que la démarche de la recherche n'apparaît jamais dans les textes ou discours chargés de transmettre et communiquer ce qui a été trouvé. Ceux-ci ne font que consigner le résultat de la recherche, qui se retrouve réorganisée de manière à démontrer proprement le théorème. Le travail de rédaction efface alors toute l'essence de la recherche, dans ses tâtonnements et ses erreurs, comme si le savoir « était sorti habillé de pied en cap des géniaux cerveaux

⁶⁵ [SCHLIMM, 2013, p. 81] cité dans D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », *ibid.*, p. 4.

⁶⁶ “any significant (mental) action of a mathematical practitioner including this axiom” *Ibid.*, p. 4.

⁶⁷ *Ibid.*, p. 11.

qui l'ont consigné pour notre bénéfice »⁶⁸. La reconstruction rationnelle du résultat ainsi consigné ne laisse plus entrevoir le travail dont il est le produit. L'ontologie doit prendre en compte aussi le travail caché du mathématicien.

Dimension collective

Kitcher défend le fait que la majeure partie de nos connaissances ont un caractère social et ne sont pas construites individuellement. La production de connaissance se fait de manière communautaire, au sens où les techniques utilisées et les hypothèses de départ sont approuvées par la communauté. Les mathématiques ne sont pas une exception. Il défend une théorie évolutionniste de la connaissance mathématique :

I propose that a very limited amount of our mathematical knowledge can be obtained by observations and manipulations of ordinary things. Upon this small basis we erect the powerful general theories of modern mathematics.⁶⁹

La connaissance des individus se base ainsi sur les connaissances de leurs prédécesseurs, et sert de base à la connaissance de leurs successeurs. La connaissance mathématique est donc une connaissance communautaire, qui est le produit d'une succession de connaissances communautaires étendant la connaissance des communautés précédentes, et dont le point de départ est la connaissance mathématique issue de la simple observation.

Cette position est issue des trois observations suivantes⁷⁰. La première est qu'une grande partie de notre connaissance mathématique est issue de l'enseignement. Par l'autorité que cela procure, nous acceptons ainsi des principes de base et des conceptions quant à la nature du raisonnement mathématique. La deuxième est qu'une partie de notre connaissance mathématique peut être obtenue à l'aide de la perception. Nous apprenons à compter avec nos doigts, nous utilisons des objets matériels pour apprendre certaines connaissances de base, d'autres peuvent être illustrées par des schémas. La troisième est que la connaissance mathématique actuelle est influencée par la connaissance mathématique du passé. Les mathématiques évoluent en réponse aux problèmes antérieurement posés ainsi qu'aux réponses qui leur sont apportées. L'histoire des mathématiques joue un rôle dans nos connaissances. Kitcher défend donc que la connaissance mathématique d'un individu est le résultat de la transmission de la connaissance de la société à cet individu, et que la connaissance de la société est le résultat

⁶⁸ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, op. cit., p. 210.

⁶⁹ P. KITCHER, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New-York – Oxford, Oxford University Press, 1984, p. 96.

⁷⁰ *Ibid.*, pp. 91-92.

de la transmission de connaissance des sociétés à leurs successeuses, où la connaissance du premier maillon de la chaîne est obtenue par l'expérience et l'observation⁷¹.

Bien que les autorités communautaires soient la source première de connaissance individuelle, cette source primaire est complétée par des justifications locales, de manière à ce que les principes mathématiques apparaissent comme évidents, donnant l'illusion que les connaissances fondamentales sont acquises par des moyens indépendants et individuels⁷².

Une objection à cette vision de la connaissance est soulevée par les énoncés qui n'ont pas été explicitement enseignés. L'objection est résolue d'elle-même en examinant ce qu'est un énoncé pas explicitement enseigné. Il s'agit bien souvent d'un énoncé obtenu à partir d'énoncés enseignés explicitement, en appliquant des règles enseignées explicitement. Pour que la connaissance puisse être transmise, il faut que l'autorité qui la transmet ait elle-même cette connaissance, ce qui s'explique par le fait qu'elle lui ait été transmise par une autorité antérieure. Pour Kitcher, la chaîne d'autorités ne fait pas que transmettre la connaissance. Cette connaissance est acquise, transmise et aussi étendue⁷³.

La connaissance individuelle est donc soit explicitement enseignée par une autorité communautaire, soit déduite de connaissances explicitement enseignées par une autorité communautaire à l'aide de règles explicitement enseignées par cette autorité. La justification des connaissances de la communauté se fait en vertu de sa relation avec les connaissances des autorités communautaires précédentes. La chaîne de transmission commence par une communauté dont la connaissance est fondée sur la perception. Ainsi, la justification de la connaissance se fait d'une communauté à sa successeuse, jusqu'à la communauté actuelle, qui transmet les connaissances aux individus qui la composent.

Une ontologie des mathématiques doit pouvoir rendre compte de l'aspect collectif de la création de connaissances. D'une part, elle doit permettre que les connaissances mathématiques se basent sur les connaissances antérieures, et qu'elles soient déduites à l'aide de règles acceptées par la communauté mathématique.

Démonstrations

Comme nous l'avons expliqué précédemment, le résultat d'une recherche, c'est-à-dire la preuve publiée, efface le processus de réflexion du mathématicien, et donc toute une partie de son travail. La preuve reconstruite formellement masque ainsi les erreurs,

⁷¹ *Ibid.*, p. 119.

⁷² *Ibid.*, p. 93.

⁷³ *Ibid.*, p. 95.

impasses et intuitions du mathématicien. L'usage des axiomes cachés en est un bon exemple.

Lorsqu'un mathématicien aborde un nouveau problème, il doit d'abord déterminer si ce qu'il cherche à prouver est vrai ou faux, ou sans parler de vérité, s'il va prouver la proposition ou sa négation. Kant relate la procédure de découverte de preuve expliquée par un mathématicien :

If I start new at a problem, I really have to do this, we call it the Magidor strategy because he advocates it: on the even calendar day, you try 'yes', and on the odd day, you try 'no'. You should not waste time on one direction because the opposite might be true. And as long it's far from intuition, one really has to proceed both. Sometimes, I also have to give up after certain months or so. Then, I say "I can't afford anymore to work in vain on such and such problem." I don't give up forever but sometimes for some years or so.⁷⁴

L'usage d'un axiome caché est dans ce cas très utile, car la puissance supplémentaire qu'il prodigue peut permettre plus facilement de déterminer la direction à suivre. Une fois déterminée la direction du problème, le mathématicien peut abandonner la stratégie de Magidor pour ne plus travailler que dans la bonne direction.

Autrement dit, une stratégie pour démontrer une proposition S qui n'est indépendante de ZFC est d'utiliser la puissance supplémentaire d'un nouvel axiome NA , pour déterminer la direction à suivre, c'est-à-dire montrer que $ZFC+NA$ prouve S ou $ZFC+NA$ prouve la négation de S . Ensuite, il reste à éliminer NA de la preuve, pour montrer que ZFC prouve S (ou la négation de S , en fonction de l'étape précédente).

Le processus de preuve fait donc intervenir des présupposés non formalisés, tel que l'utilisation des axiomes cachés pour faire apparaître des conjectures. De plus, la stratégie de Magidor crée en quelque sorte deux réalités mathématiques distinctes. Les démonstrations ne sont donc pas statiques, comme le laisse supposer le résultat final, mais un processus dynamique, comportant son lot de suppositions et d'erreurs.

Parlons maintenant d'une technique de preuve particulière, la preuve par l'absurde. Ce procédé consiste à démontrer une proposition en montrant que son inverse est contradictoire. Autrement dit, pour démontrer la proposition A , nous supposons sa négation $\neg A$ et montrons que cela mène à une contradiction avec les hypothèses de départ.

⁷⁴ D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », *op. cit.*, p. 11.

Par exemple, la preuve de la proposition « $\sqrt{2}$ est irrationnel » se fait en supposant l'inverse, à savoir que $\sqrt{2}$ est rationnel. Si $\sqrt{2}$ est rationnel, on peut l'écrire comme quotient de nombres rationnels premiers entre eux, c'est-à-dire

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ où } p, q \in \mathbb{Q}.$$

On prend ensuite le carré de chaque membre de l'équation, et on multiplie chaque membre par q^2 . On obtient $2q^2 = p^2$. On en déduit que p est pair, car, comme $2q^2$ est pair, p^2 l'est aussi, et que la racine carrée d'un nombre pair est pair. On peut alors simplifier l'équation. On pose $p = 2m, m \in \mathbb{Q}$, et on obtient $q^2 = 2m^2$. De manière similaire, on montre que q est pair, et on pose $q = 2n, n \in \mathbb{Q}$. Comme p et q sont tous les deux pairs, ils ont un diviseur commun, 2, et ne sont donc pas premiers entre eux, ce qui est contradictoire à l'hypothèse de départ.

Dans cet exemple, nous avons introduit des nombres, p, q, m, n , dont le statut est particulier. En effet, ces nombres sont introduits comme hypothèse, afin de montrer qu'ils ne peuvent pas exister sans mener à des contradictions. Comment alors expliquer le statut de ces nombres ? Une ontologie doit pouvoir rendre compte de l'utilisation d'objets « fictifs », utilisés dans les preuves par l'absurde.

Cohérence avec les applications des mathématiques

Les mathématiques sont utilisées dans de nombreux domaines, tels que la physique, l'algorithmique et l'informatique, l'économie, les sciences sociales ou encore la médecine. Il nous semble important de tenir compte de ces applications des mathématiques dans le développement d'une ontologie. En effet, une ontologie des mathématiques qui ne soit pas en accord avec ses applications n'aurait que peu de sens.

Pour Quine, nous devons avoir un engagement ontologique envers les entités indispensables dans nos meilleures théories scientifiques. Étant donné que les mathématiques sont indispensables à nos meilleures théories scientifiques, nous devons donc croire à l'existence des objets mathématiques. Afin de mieux comprendre la portée de cette conclusion, analysons chacune des deux prémisses de l'argument d'indispensabilité.

L'engagement ontologique de Quine envers les entités indispensables de nos meilleures théories scientifiques s'appuie d'une part sur une perspective naturaliste, et d'autre part, sur l'holisme de la confirmation. Le naturalisme de Quine est « la doctrine philosophique selon laquelle il n'y a pas de philosophie première, et il y a une continuité

entre l'entreprise philosophique et celle de la science »⁷⁵. La philosophie n'est donc ni antérieure, ni privilégiée par rapport à la science, et, de plus, la philosophie et la science se construisent ensemble, et sont ainsi tout ce qu'il y a à dire du monde. D'un point de vue ontologique, cela signifie qu'il faut se tourner vers la science pour déterminer les entités qui existent. Le naturalisme n'est cependant pas suffisant pour justifier l'engagement ontologique de Quine : il ne justifie que le fait que seules les entités nécessaires à nos meilleures théories scientifiques puissent exister, mais pas que toutes celles-ci existent.

Ce deuxième point est justifié par l'holisme de la confirmation, qui est « la conception selon laquelle les théories sont confirmées ou infirmées dans leur ensemble »⁷⁶. Autrement dit, si une théorie est confirmée empiriquement, toute la théorie est confirmée, y compris tous les éléments utilisés dans cette théorie. En particulier, si une théorie est confirmée, les mathématiques utilisées par cette théorie le sont aussi.

La deuxième prémisse de l'argument d'indispensabilité de Quine concerne l'indispensabilité des mathématiques à nos meilleures théories scientifiques. L'un des problèmes qui émergent de cette prémisse est que l'argument ne s'applique qu'aux mathématiques effectivement utilisées dans les théories scientifiques. Les mathématiques ne rentrant pas dans cette catégorie sont qualifiées par Quine de « récréation mathématique »⁷⁷, et n'ont alors pas droit au statut ontologique accordé aux mathématiques utilisées dans les sciences.

Un autre problème concerne la question de l'indispensabilité des mathématiques dans les sciences. En effet, Field affirme que les mathématiques ne sont pas indispensables dans les sciences. Il montre d'une part que les mathématiques n'ont pas besoin d'être vraies pour être utiles pour les sciences, et d'autre part qu'elles sont utilisées en sciences non pas par nécessité, mais par facilité : les mathématiques simplifient considérablement les calculs et les énoncés des théories.

Éclairons ce premier point. Comme le montre Maddy⁷⁸, les scientifiques eux-mêmes ne croient pas toujours dans toutes les entités mobilisées par leurs théories. Souvent, des hypothèses fausses sont faites, permettant d'idéaliser ou de simplifier le phénomène, permettant d'obtenir des résultats utiles. Par exemple, la profondeur de l'eau est supposée infinie lorsqu'on étudie le comportement des vagues ; ou encore la supposition que la matière est continue en dynamique des fluides. Dès lors, dans une

⁷⁵ "naturalism is usually taken to be the philosophical doctrine that there is no first philosophy and that the philosophical enterprise is continuous with the scientific enterprise" M. COLYVAN, « Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics », *op. cit.*

⁷⁶ "Confirmational holism is the view that theories are confirmed or disconfirmed as wholes" *Ibid.*

⁷⁷ *Ibid.*

⁷⁸ *Ibid.*

perspective où nous nous baserions sur la pratique des sciences pour développer une ontologie, nous devrions justement nous intéresser à ce qu'ont à dire les scientifiques quand au statut d'existence des objets qu'ils utilisent. Les théories mathématiques utilisées dans les sciences ne sont pas choisies en fonction de leur véracité, mais plutôt parce qu'elles conviennent bien pour le travail qu'il y a à faire. En ce sens, les mathématiques sont plus une cabane à outils, dans laquelle le scientifique sélectionne l'outil qui convient le mieux pour le travail qu'il a à accomplir. Nous voyons donc que le fait qu'une partie des mathématiques soit indispensable à une théorie physique n'indique pas que cette théorie est vraie, et si nous n'avons pas de bonne raison de croire que cette théorie est vraie, nous n'avons pas non plus de bonnes raisons de croire que les objets qu'elle utilise existent.

Outre la pratique des scientifiques, Maddy souligne également que la manière dont les mathématiciens font des mathématiques et notamment, introduisent de nouveaux axiomes n'est pas dans la perspective d'être reprise par les théories scientifiques par la suite. Par exemple, les axiomes des mathématiques ne sont pas choisis de manière à être cohérents avec le reste des théories scientifiques. Les mathématiciens, en faisant des mathématiques, se cantonnent à leur domaine particulier, sans chercher nécessairement la cohérence avec les théories scientifiques, mais dans le but de développer les mathématiques pour elles-mêmes.

Concernant le deuxième point, Field affirme qu'il est possible de nominaliser nos théories scientifiques, c'est-à-dire de nous passer de la quantification sur des entités mathématiques. Il a par ailleurs nominalisé une grande partie de la théorie gravitationnelle newtonienne. Cela ne montre pas qu'il soit possible de faire de même pour toutes nos théories scientifiques, mais qu'il ait été possible d'éliminer les objets mathématiques d'une théorie physique laisse ouverte cette possibilité.

Nous analyserons donc l'utilisation des mathématiques dans différents domaines, afin d'en déterminer l'implication qu'ont ceux-ci sur l'ontologie mathématique. Nous ferons également un lien avec le point précédent, car ces domaines utilisent différents domaines des mathématiques, et, en cela, apportent différentes exigences ontologiques.

Physique

Commençons par la physique. Les mathématiques sont utilisées dans les théories physiques. Si, comme le prétend Quine, les mathématiques sont indispensables à nos

théories physiques, une ontologie des mathématiques doit pouvoir rendre compte du succès de l'utilisation des mathématiques en physique.

Putnam lie l'ontologie physique et l'ontologie mathématique. Il défend le réalisme en mathématique en lien avec le réalisme physique. Son argument se tient à la fois sur l'expérience mathématique et sur l'expérience physique. Bien que Gödel ait démontré qu'il est impossible de construire une preuve interne de la consistance d'une théorie mathématique, nous avons, pour Putnam, de bonnes raisons de considérer qu'elles sont consistantes. Dès lors, nous pouvons considérer qu'il existe une interprétation dans laquelle les mathématiques sont vraies :

if we are really just writing down strings of symbols at random, or even by trial and error, what are the chances that our theory would be consistent, let alone mathematically fertile ?⁷⁹

Ainsi, l'expérience de la consistance et de la fertilité des mathématiques nous amènent à la conclusion qu'il existe une interprétation des mathématiques dans laquelle elles sont vraies.

Cette interprétation se trouve en dehors des mathématiques, dans une application des mathématiques, la physique. En effet, l'intrication des mathématiques et de la physique impliquent que celles-ci soient consistantes dans leur ontologie. Putnam défend une ontologie réaliste en physique, d'une part, par la négative au sens où les alternatives au réalisme à son époque, à savoir les philosophies réductrices ou opérationnalistes, mènent à un échec ; et d'autre part, parce que le réalisme physique est pour lui la seule ontologie qui ne fait pas des sciences un miracle. L'interprétation dans laquelle les mathématiques sont vraies est alors une interprétation réaliste :

it is not possible to be a realist with respect to physical theory and a nominalist with respect to mathematical theory.⁸⁰

Autrement dit, l'expérience mathématique nous montre qu'il existe une interprétation sous laquelle les mathématiques sont vraies, et l'expérience physique nous donne cette interprétation, qui est réaliste. La limite de cet argument est qu'il suppose une ontologie physique réaliste.

À l'inverse, Wigner considère le succès des mathématiques en physique comme un miracle, en raison de la nature des mathématiques et de leur rôle en physique. Il distingue trois points susceptibles de poser problème : le premier est l'adéquation des objets mathématiques pour représenter les phénomènes physiques ; le second est la fécondité des mathématiques pour développer de nouvelles lois ; et le troisième est la

⁷⁹ H. PUTNAM, « What is Mathematical Truth? », *op. cit.*, p. 73.

⁸⁰ *Ibid.*, p. 74.

multiplicité des représentations mathématiques adéquates d'un même phénomène physique, qui peuvent ne pas être compatibles.

Commençons par voir comment Wigner définit les mathématiques. Pour lui, il s'agit de la « science des opérations habiles avec des concepts et des règles inventés uniquement dans ce but »⁸¹. Sa première activité est l'invention de nouveaux concepts. S'il est possible de faire le lien entre l'introduction des concepts des mathématiques élémentaires et le monde actuel, cela est loin d'être évident pour les concepts plus avancés :

Most more advanced concepts [...] were so devised that they are apt subjects on which the mathematician can demonstrate his ingenuity and sense of formal beauty. In fact, the definition of these concepts, with a realization that interesting and ingenious considerations could be applied to them, is the first demonstration of the ingeniousness of the mathematician who defines them.⁸²

Les critères avancés par Wigner pour l'introduction de nouveaux concepts en mathématiques sont donc plutôt des critères de beauté et d'ingéniosité, autant dans les opérations qu'il utilise que dans les résultats qu'il obtient.

C'est en ce sens qu'il considère le succès des mathématiques en physique comme plutôt surprenant. En effet, d'une part, « que la témérité [du mathématicien] ne le conduise pas dans un enchevêtrement de contradictions est un miracle en soi »⁸³, et d'autre part, que l'application en physique ne mène pas à des contradictions en est un autre. Notons que les simples faits que les lois de la nature existent et qu'elles soient saisissables par l'esprit humain sont déjà des miracles pour Wigner.

Ce deuxième point est lié au rôle des mathématiques en physique. Le premier rôle est un rôle d'outil : les mathématiques permettent l'évaluation des lois de la nature dans les situations qui nous intéressent, c'est-à-dire l'application des théories existantes, et le deuxième est la formulation de ces lois. C'est ce deuxième rôle qui étonne Wigner. Pour lui, le fait que les objets mathématiques conviennent aux applications en physique et soient les éléments permettant d'écrire les lois de la nature ressemble à un miracle, bien que ces concepts ne soient pas choisis arbitrairement, mais développés par le physicien et reconnus ensuite dans la liste des objets mathématiques déjà développés par les mathématiciens. Ce qui surprend Wigner, c'est que les concepts mathématiques

⁸¹ "Mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose." E.-P. WIGNER. « The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 (1960), p. 2.

⁸² *Ibid.*, p. 3.

⁸³ « That his recklessness does not lead him into a morass of contradictions is a miracle in itself » *Ibid.*

conviennent pour ce rôle, compte tenu des circonstances dans lesquelles ils sont introduits :

It is not true, however, as is so often stated, that this had to happen because mathematics uses the simplest possible concepts and these were bound to occur in any formalism. As we saw before, the concepts of mathematics are not chosen for their conceptual simplicity-even sequences of pairs of numbers are far from being the simplest concepts-but for their amenability to clever manipulations and to striking, brilliant arguments.⁸⁴

L'introduction des concepts mathématiques en physique pourrait pour lui être explicable par la phrase d'Einstein qui dit que les seules théories que nous soyons prêts à accepter sont celles qui sont belles, bien que cela ne permette que d'expliquer les raisons de croire en une théorie et pas l'exactitude de la théorie. Wigner mentionne également l'« irresponsabilité » du physicien qui, « quand il trouve une relation entre deux quantités ressemblant à une relation mathématique bien connue, vient à la conclusion que la relation est celle des mathématiques, simplement parce qu'il ne connaît aucune relation similaire »⁸⁵. Dans tous les cas, les exemples de formulation mathématiques de phénomènes physiques avec une précision remarquable ne manquent pas, ce qui permet de conclure que les mathématiques sont particulièrement efficaces en tant que langage de la physique :

This shows that the mathematical language has more to commend it than being the only language which we can speak; it shows that it is, in a very real sense, the correct language.⁸⁶

Ces lois sont néanmoins limitées, en tant qu'elles ne disent rien sur la nature du monde, et des objets physiques, mais ne font que représenter le phénomène concerné.

L'usage des mathématiques en physiques, en ce sens, permet de formuler des théories physiques à l'aide d'outils mathématiques, mais les objets mathématiques utilisés ne sont que des signes pour désigner l'objet physique, ils ne sont pas identifiés l'un à l'autre. Les théories physiques sont ainsi des modèles permettant de représenter le monde physique, sans faire d'hypothèse quant aux raisons des phénomènes décrits ; la théorie représente le monde physique, mais ne l'explique pas. Cette idée est exprimée notamment par Newton dans les *Principia* :

I have explained the phenomena of the heavens and of our sea by the force of gravity, but I have not yet assigned a cause to gravity. . . . I do not feign hypotheses. For whatever is not deduced from the phenomena must be called a hypothesis; and hypotheses, whether metaphysical or physical, or based

⁸⁴ *Ibid.*, p. 7.

⁸⁵ “when he finds a connection between two quantities which resembles a connection well-known from mathematics, he will jump at the conclusion that the connection is that discussed in mathematics simply because he does not know of any other similar connection” *Ibid.*, p. 8.

⁸⁶ *Ibid.*.

on occult quantities, or mechanical, have no place in experimental philosophy.. .it is enough that gravity really exists and acts according to the laws that we have set forth.⁸⁷

Cette idée apparaît encore plus clairement lorsqu'il parle des forces. En effet, l'existence des forces, c'est-à-dire d'action à distance, est pour Newton un problème :

Que la Gravité soit innée, inhérente et essentielle à la matière, de sorte qu'un corps puisse agir à distance sur un autre à travers un vide, sans la médiation de quelque autre chose, par et à travers laquelle leurs action et force puissent être transmises de l'un à l'autre, est pour moi une si grande absurdité, que je crois qu'aucun homme, ayant la faculté de penser avec compétence en matière philosophique, puisse jamais y tomber.⁸⁸

Pourtant, la formulation mathématique de la théorie de Newton était adéquate, en tant qu'elle représentait avec succès le phénomène qu'elle tâchait de décrire. Newton choisit alors de « considérer ces forces d'un point de vue seulement mathématique et non physique »⁸⁹, autrement dit, la théorie décrit un phénomène, mais ne l'explique pas.

Outre le fait que les mathématiques soient un outil adéquat pour la description des phénomènes physiques, Wigner trouve surprenant qu'en développant les théories physiques à partir des résultats mathématiques obtenus sur les objets mathématiques associés aux objets physiques, les physiciens obtiennent des résultats en accord avec les données empiriques. Les résultats obtenus par ces équations dépassent en ce sens ce qu'elles étaient censées permettre. De nouveaux résultats sont obtenus par développement des théories physiques à l'aide des théories mathématiques, et ces résultats correspondent aux observations.

Comment expliquer ensuite la possibilité, en formulant des théories physiques à l'aide des mathématiques, d'obtenir plusieurs théories qui semblent incompatibles sur le plan des mathématiques, ou même qui peuvent mener à des contradictions entre elles ? C'est le cas notamment de la mécanique quantique et de la relativité. L'un des objectifs

⁸⁷ Newton, Isaac [1687], *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, B. Cohen and A. Whitman, trans. (Berkeley and Los Angeles, CA: University of California Press, 1999), p. 943, cité dans P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, op. cit., p. 9.

⁸⁸ I. NEWTON, Lettre à R. Bentley du 25 février 1693 in *Opera quae extant omnia*. (S. Horsley ed.) London, 1782, Faksimile, Stuttgart, Friedrich Frommann Verlag, 1964, vol. 4., p. 226. Traduit/cité dans/par HESPEL, Bertrand, « Physique et non-dualité », in *La non-dualité : perspectives philosophiques, scientifiques, spirituelles*, ed. Jean-Michel Counet, Louvain-la-Neuve, Peeters, 2021 (Bibliothèque philosophique de Louvain, 112), p. 217-264.

⁸⁹ I. NEWTON, "Premier brouillon du « Système du monde »", in *Cohen, I. B., The Birth of a New Physics*, Harmondsworth, Penguin, 1987, p. 237-238. Traduit/cité par/dans HESPEL, Bertrand, « Physique et non-dualité », in *La non-dualité : perspectives philosophiques, scientifiques, spirituelles*, ed. Jean-Michel Counet, Louvain-la-Neuve, Peeters, 2021 (Bibliothèque philosophique de Louvain, 112), p. 217-264.

de la physique contemporaine est de fusionner ces théories, qui sont toutes les deux considérées comme « prouvées ». Néanmoins, celles-ci étant construites avec des objets mathématiques différents, les rassembler n'est pas simple. Il est possible que ces théories soient combinées un jour, mais il est également possible que ce ne soit pas le cas.

Ce problème des conflits entre théories s'exprime également dans le cas des théories qui ont été abandonnées, bien qu'elles donnent des résultats précis. Ces théories sont considérées comme « fausses », en regard avec des théories plus globales, dans lesquelles elles sont incompatibles. Des théories que nous considérons actuellement comme « prouvées » pourraient ainsi se révéler fausses ultérieurement, dans le cas où elles présenteraient des contradictions avec une théorie couvrant plus de phénomènes.

De plus, plus nous développons de théories sur différents domaines, plus nous risquons de créer ce genre d'incompatibilité entre théories :

If this were true, we would have to expect conflicts between our theories as soon as their number grows beyond a certain point and as soon as they cover a sufficiently large number of groups of phenomena. In contrast to the article of faith of the theoretical physicist mentioned before, this is the nightmare of the theorist.⁹⁰

Au vu de ce que nous avons exposé précédemment, une ontologie mathématique doit permettre d'expliquer non seulement l'utilisation des mathématiques en physique, mais également le succès de cette utilisation.

Algorithmique et informatique

Les mathématiques ne sont pas seulement utilisées en physique, elles sont également utilisées dans d'autres domaines. Cette section aborde les applications des mathématiques en algorithmique et en informatique. Avant toute chose, commençons par discuter d'ontologie des systèmes informatiques.

Une approche naturelle semble être de distinguer entre *software* et *hardware*, séparant ainsi entités abstraites et entités concrètes et physiques, qui n'auraient pas la même ontologie. Cette approche est discutable, d'une part, parce que la distinction entre *hardware* et *software* n'est pas fixe, et d'autre part, parce que l'association entre *hardware* et concret et *software* et abstrait ne permet pas de refléter de manière adéquate ce que sont le *hardware* et le *software*. Voyons plus en détail ces critiques.

La distinction entre *software* et *hardware* n'est pas parfaitement définie. Selon Moor la distinction est pragmatique en tant qu'elle dépend du point de vue technique qui

⁹⁰ E.-P. WIGNER. « The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences », *op. cit.*, pp. 12-13.

est adopté⁹¹. Un programmeur considère comme *software* les algorithmes et le code source écrit dans un langage de programmation, et comme *hardware* le code machine et les microprocesseurs qui l'exécutent, tandis qu'un ingénieur travaillant sur des circuits câblés, où les programmes sont dans la structure des circuits considère que ces circuits sont des logiciels. De plus, il affirme que cette distinction n'a pas de signification ontologique. Aucun programme ne peut exister en tant qu'objet abstrait, sans réalisation physique, c'est-à-dire le médium physique où il est stocké. Suber ajoute que, selon lui, le *hardware* est un genre de *software*⁹². En effet, le *software* est défini comme « tout modèle qui permet d'être lu et exécuté »⁹³. Or, tous les objets physiques présentent de tels modèles, c'est-à-dire une structure définie, donc le *hardware*, en tant qu'objet physique, est aussi un type de *software*.

Le deuxième problème vient de l'assimilation du *software* aux objets abstraits. Comme nous venons de le voir, Moor affirme les programmes informatiques ne peuvent pas exister indépendamment du support physique sur lesquels ils sont stockés, et en cela, ne sont pas des objets abstraits. De manière similaire, Colburn défend que le *software* est à la fois abstrait et concret. Il est abstrait en tant qu'il ne peut pas exister sans concrétisation dans un support physique, mais est également abstrait, en raison du fait que ce support physique n'est pas pris en compte dans le programme : celui-ci peut être exécuté sur n'importe quelle machine. Si Colburn défend une nature hybride au *software*, Irmark objecte que cette position attribue à un même objet des propriétés contradictoires⁹⁴. En effet, est concret ce qui a des propriétés spatio-temporelles, et à l'inverse, est abstrait ce qui n'en a pas. Pour Irmark, les logiciels ont bien des propriétés temporelles, car, en tant que créations humaines, leur existence a un début, le moment où ils sont conçus et implémentés, et peut avoir une fin, si toutes leurs copies sont détruites, si leurs auteurs sont morts, et si personne ne se souvient de leurs algorithmes. Par contre, ils n'ont pas de propriétés spatiales, ils ne peuvent pas être identifiés à l'une de leurs réalisations physiques, et détruire toutes leurs copies physiques ne suffirait pas à les faire disparaître, comme nous l'avons vu ci-dessus.

Une autre approche pour décrire l'ontologie des systèmes informatiques est de partir du rôle de l'abstraction. L'avantage de cette approche est qu'elle ne permet pas de distinguer le *hardware* du *software*, et décrit différents niveaux d'abstraction liés les uns aux autres, chacun associé à une réalisation. Le système informatique est alors défini par

⁹¹ N. ANGIUS, G. PRIMIERO, R. TURNER, « The Philosophy of Computer Science », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/computer-science/>>.⁹¹

⁹² *Ibid.*.

⁹³ “any pattern that is amenable to being read and executed” *Ibid.*.

⁹⁴ *Ibid.*

la hiérarchie de niveaux dans son ensemble. Primiero décrit six niveaux d'abstraction pour une ontologie des systèmes informatiques⁹⁵ : l'intention, la spécification, l'algorithme, les instructions dans un langage de programmation de haut niveau, les opérations en langage assembleur et code machine, et l'exécution. L'intention est l'acte cognitif qui définit le problème informatique à résoudre. Il s'agit de la formulation de la demande de création d'un programme informatique permettant de réaliser une certaine tâche. La spécification est la formulation des exigences nécessaires à la résolution du problème donné par l'intention. Il s'agit de la description des opérations que le logiciel doit effectuer. L'algorithme est la procédure donnant une solution au problème donné par l'intention, suivant les exigences données par la spécification. Les instructions dans un langage de programmation de haut niveau, comme, par exemple, C, Python ou Java, sont l'implémentation de l'algorithme, c'est-à-dire le code source. Le code source peut être compris par un informaticien, mais pas directement exécuté par une machine. Pour que la machine puisse exécuter le code, ces instructions doivent être compilées, c'est-à-dire traduites en langage assembleur puis assemblées en code machine. L'exécution est le niveau physique du logiciel en cours d'exécution, c'est-à-dire de l'architecture de l'ordinateur exécutant le code machine.

Il convient maintenant d'analyser la manière dont sont utilisées les mathématiques en informatique. Nous distinguons trois types d'utilisation : les mathématiques sont utilisées dans la spécification formelle des problèmes, dans la création d'algorithmes et dans la définition de structures de données.

La spécification d'un problème, comme nous l'avons vu précédemment, permet de formuler les exigences nécessaires pour résoudre un problème donné. La spécification d'un problème consiste à indiquer le type des arguments de la fonction, ce qu'elle doit faire, ainsi que le type des éléments qu'elle renvoie. Nous voyons à cette étape la fonction comme une boîte noire qui effectue une action. Par exemple, supposons que nous cherchions à trier les éléments d'une liste d'entiers par ordre croissant. L'argument de la fonction est une liste d'entiers, la fonction doit trier cette liste par ordre croissant, et le résultat est une liste d'entiers triée par ordre croissant. Les mathématiques ont ici un rôle normatif : par exemple, lorsqu'on parle d'entiers, on parle d'objets permettant certaines manipulations. Le type d'un objet spécifie ce qu'il est possible de faire avec cet objet. Dans les langages de programmation statiquement typés, comme Java par exemple, le type d'un objet doit être précisé lorsque l'objet est déclaré. Un objet mathématique dans un programme informatique a donc des caractéristiques qui dépendent des opérations effectuelles sur cet objet.

⁹⁵ *Ibid.*

Une autre utilisation des mathématiques en informatique concerne la calculabilité. Lorsqu'il nous est demandé de résoudre un problème informatique, la première question à se poser est s'il est possible ou non de résoudre ce problème à l'aide d'un programme informatique. L'ensemble des problèmes qu'il est possible de résoudre à l'aide d'un programme informatique est déterminé. Il s'agit des fonctions calculables. La notion de fonction calculable vient de Turing : une fonction calculable est une fonction calculable par une machine de Turing universelle. Cette notion de machine de Turing universelle peut être remplacée par celle d'ordinateur idéal, possédant une infinie. Les fonctions calculables ont des équivalents mathématiques, avec, d'une part, les fonctions générales récursives de Gödel, et d'autre part, les fonctions d'entiers positifs λ -définissables de Church. Les mathématiques permettent donc de définir la totalité des fonctions qu'il est possible de calculer à l'aide d'un programme informatique.

Une troisième utilisation des mathématiques en informatique est la définition des structures de données. Un type abstrait de données est une spécification mathématique d'un ensemble de données et de l'ensemble des opérations qu'on peut effectuer sur elles. Il s'agit de l'ensemble des opérations qu'une structure de données de ce type doit implémenter. En Java, les types abstraits de données sont décrits par des interfaces, qui décrivent les opérations qu'il est possible d'effectuer sur elles, tout en gardant un niveau d'abstraction, qui permet de les implémenter ensuite de manière concrète. Un exemple de type abstrait de données est les graphes. Un graphe est un couple constitué d'un ensemble de vertices, ou nœuds et d'un ensemble de liens, qui relient deux vertices entre elles. Il s'agit d'un objet mathématique qui permet de définir un type abstrait de données. Les graphes sont utilisés en informatique, notamment dans les réseaux sociaux ou les systèmes GPS. Les objets mathématiques utilisés de cette manière en informatique sont des artefacts, choisis et développés en raison de leur efficacité.

Les mathématiques ont donc en informatique à la fois un rôle normatif, permettant de déterminer ce qu'il est possible de faire avec un objet, un rôle permettant de déterminer les fonctions qu'il est possible d'implémenter, et un rôle d'outil, permettant de définir des types de données. Elles ont ainsi leur place à différents niveaux d'abstraction, de la spécification des fonctions au code source.

Issue des mathématiques elles-mêmes (pas projection d'une ontologie déjà construite sur les mathématiques)

Ce point rejoint en un sens la première exigence que nous avons exposée, en tant qu'il parle de la pratique des mathématiques. La première exigence demandait l'adéquation de l'ontologie à la pratique, celle-ci demande que l'ontologie en soit issue. Il nous semble particulièrement important d'insister sur le point de départ d'une ontologie

mathématique, qui doit être le sujet qu'elle décrit, dans ses pratiques, ses applications, ceux qui la font, et non pas être le résultat d'une réflexion philosophique déconnectée de son sujet, cohérente en elle-même et probablement plutôt élégante, mais sans lien avec ce qui se fait dans le domaine étudié. Une telle ontologie peut sans doute s'accorder avec une pratique, mais n'étant pas tirée d'elle, ne reflète pas sa réalité.

Le naturalisme est une position méthodologique dans laquelle les seuls standards faisant autorité en philosophie sont ceux de la science. Quine définit le naturalisme comme « la reconnaissance que c'est dans la science elle-même, et non dans une philosophie antérieure que la réalité doit être identifiée et décrite »⁹⁶. Le naturalisme de Maddy s'écarte de cette définition. Il se présente comme une posture, dans laquelle se met le philosophe.

En tant que posture, il ne s'explique pas aisément par une définition, c'est pourquoi Maddy a recours à d'autres moyens pour le décrire :

Since its contours can't be drawn by outright definition, I resort to the device of introducing a character, a particular sort of idealized inquirer [...] and proceed by describing her thoughts and practices in a range of contexts.⁹⁷

Dans *Defending the Axioms*⁹⁸, Maddy le présente au travers d'une chercheuse, qui « entreprend de découvrir ce à quoi ressemble le monde, l'étendue de ce qui existe, et ses différentes propriétés et comportements »⁹⁹. Pour ce faire, elle a initialement comme outil ses perceptions ordinaires, et elle développe au fur et à mesure de sa recherche des méthodes plus développées d'expérimentation, d'observation, de construction et de vérification de théories, etc. Étant donné qu'elle cherche à étudier les pratiques humaines, elle étudie la physique, la chimie, l'astronomie, la botanique, la psychologie et l'anthropologie. Au fur et à mesure de son avancée, elle étudie les méthodes de ces disciplines et développe ses méthodes de recherche.

C'est dans ce cadre qu'elle en arrive aux mathématiques, qui, en tant qu'entreprise humaine fort utile au reste de ses investigations, s'ajoutent à la liste de ce qu'elle étudie.

⁹⁶ 'the recognition that it is within science itself, and not in some prior philosophy, that reality is to be identified and described' QUINE "Things and their places in theories", 1981, in his *Theories and Things*, Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 1–23, p.21, cité dans A.PASEAU, A. MARFORI, M. ANTONUTTI, « Naturalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2025/entries/naturalism-mathematics/>>.

⁹⁷ P. MADDY, *Second Philosophy: A Naturalistic Method*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2007, p. 1.

⁹⁸ Voir aussi, P. MADDY, *Naturalism in Mathematics*, Oxford – New-York, Clarendon Press, 1997. et P. MADDY, *Second Philosophy: A Naturalistic Method*, op. cit., 2007.

⁹⁹ P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, op. cit., p. 38. "sets out to discover what the world is like, the range of what there is and its various properties and behaviours".

Elle se rend alors compte que les méthodes des mathématiques diffèrent de celles des autres disciplines qu'elle étudie. Dès lors, deux types de questions se posent. D'une part, dans le cadre de son travail sur les méthodes, elle étudie les méthodes des mathématiques. D'autre part, dans la lignée de son étude des pratiques humaines, elle s'interroge sur le type d'activité que sont les mathématiques, sur le sujet sur lequel elles portent, et sur la raison pour laquelle elles s'imbriquent dans le reste de ses recherches.

Les questions qu'elle se pose sont notamment d'ordre philosophique. Dans une perspective qu'on peut qualifier de naturaliste, elle aborde ces questions depuis l'intérieur des sciences, en tant que participante, et non pas d'un point de vue extérieur aux sciences. Il est important de souligner qu'elle ne le fait pas par obéissance à ce que dit la science, mais dans la lignée de sa recherche, où elle étudie les activités humaines à travers les méthodes qu'elle a développées :

My inquirer doesn't decide to place her faith in something called 'science'; she is simply one of those speaking with a firm voice, on the basis of the evidence.¹⁰⁰

Son naturalisme n'est pas justifié par une posture philosophique antérieure ; son approche de la philosophie se fait simplement à travers les méthodes qu'elle a développées tout au long de ses recherches, comme nous l'avons décrit précédemment.

Pour éviter le bagage philosophique associé au mot naturalisme, Maddy préfère créer un nouveau terme, afin de le définir comme elle l'entend. Elle l'appelle donc Philosophie Seconde. Le personnage créé par Maddy est appelé Philosophe Seconde. La Philosophie Seconde, en tant que posture, est alors à comprendre comme le produit des recherches de la Philosophie Seconde.

Pour avoir une ontologie issue des mathématiques elles-mêmes, il nous semble important qu'elle soit dans la même disposition. Une ontologie respectant ce critère doit être fondée sur la pratique des mathématiques. L'objectif est de voir quelle ontologie émerge de la pratique, et pas uniquement de vérifier la compatibilité de cette ontologie avec celle-ci. Il s'agit donc de faire en sorte d'éviter tout *a priori* métaphysique lors de la construction de cette ontologie, afin de réellement pouvoir faire émerger de la pratique une ontologie.

¹⁰⁰ *Ibid.*, p. 39.

Analyse des ontologies présentées selon nos critères

Platonisme mathématique

Le platonisme mathématique, comme nous l'avons vu précédemment, est l'ontologie affirmant que les objets mathématiques sont des objets abstraits, qu'ils existent, et qu'ils sont indépendants de nous, nos pensées, notre langage, et nos pratiques. Voyons maintenant si le platonisme satisfait nos critères.

Une ontologie des mathématiques doit pouvoir rendre compte de la pratique des mathématiques. Le platonisme mathématique, semblant être une ontologie naturelle et étant défendu par de nombreux mathématiciens, pourrait satisfaire ce critère.

En ce qui concerne l'introduction de nouveaux concepts en mathématique, nous avons vu, à l'aide de l'exemple de l'introduction des ensembles par Dedekind et Cantor, qu'ils étaient introduits en réponse à certains besoins mathématiques. Pour le platonisme mathématique, les objets existent et sont découverts. Ils ne sont pas créés. L'introduction d'un nouveau concept en mathématique est simplement la découverte de ce concept. Qu'il soit découvert dans le cadre d'un besoin mathématique d'une autre théorie semble normal : la réalité mathématique est explorée petit à petit, en élargissant l'horizon mathématique progressivement. Dans cette optique, lors de l'exploration, dans le cas de Cantor, de la trigonométrie, les ensembles ont été découverts, et ensuite, l'horizon mathématique étant élargi, la théorie des ensembles a pu être explorée.

Les axiomes dans une ontologie platoniste des mathématiques sont vrais, car ils correspondent à la réalité mathématique, et permettent de décrire une partie de cette réalité. Leur justification tient donc dans leur évidence intrinsèque, comme l'affirme Gödel. Ce dernier donne un deuxième type de justification des axiomes. Outre leur justification intrinsèque, ils ont également une justification extrinsèque, à savoir leur fécondité¹⁰¹. D'une part, les conséquences vérifiables des axiomes, c'est-à-dire celles qui peuvent être démontrées sans ces axiomes, mais où les nouveaux axiomes permettent par exemple de simplifier la démonstration, permettent de confirmer leur véracité, au même titre qu'un principe physique vérifié par l'expérience empirique¹⁰². D'autre part, leurs

¹⁰¹ "It was pointed out earlier [...] that, besides mathematical intuition, there exists another (though only probable) criterion of the truth of mathematical axioms, namely their fruitfulness in mathematics" K. GÖDEL, « What is Cantor's continuum problem ? (1964) », *op. cit.*, cite dans D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », *op. cit.*, p. 17.

¹⁰² "[D]isregarding the intrinsic necessity of some new axiom, and even in case it had no intrinsic necessity at all, a decision about its truth is possible also in another way, namely, inductively by studying its "success," that is, its fruitfulness in consequences and in particular in "verifiable" consequences, i.e., consequences demonstrable without the new axiom, whose proofs by means of the new axiom, however, are considerably simpler and easier to discover, and make it possible to condense into one proof many different proofs. [...] There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems [...] that quite

conséquences qui ne sont pas vérifiables permettent alors d'élargir l'horizon mathématique qu'il est possible d'explorer. Pour le platonisme mathématique, la fécondité d'un axiome peut s'interpréter comme un signe de sa vérité, autrement dit, comme un signe qu'il permet bien de révéler la réalité mathématique.

L'utilisation d'axiomes cachés, dans le cadre du platonisme mathématique, se justifie par la vérité de ces axiomes. Pour un défenseur du platonisme mathématique, un tel axiome devrait être ajouté aux axiomes des mathématiques. En effet, dans le cadre de la théorie des ensembles, il y a plus que ce que ZFC ne permet de décrire. Le fait que l'hypothèse du continu ne puisse pas être déterminée dans ZFC montre, pour Gödel, que les axiomes de la théorie des ensembles ne sont pas suffisants pour décrire la réalité :

Hence [the] undecidability [of Cantor's conjecture] from the axioms being assumed today can only mean that these axioms do not contain a complete description of that reality.¹⁰³

L'ajout de nouveaux axiomes vrais permet de mieux décrire la réalité mathématique. En effet, comme le relate Kant, « nous savons que [ZFC] ne dit pas tout ; ce n'est pas suffisant pour résoudre des problèmes importants comme [l'hypothèse du continu], etc. »¹⁰⁴. De plus, le fait que l'utilisation de tels axiomes soit effacée de la démonstration, est une preuve de la véracité de l'axiome. Comme expliqué précédemment, le fait qu'un axiome ait des conséquences vérifiables permet de justifier la véracité de cet axiome.

Pour Grothendieck, la recherche se fait par « coups de sonde » dans la réalité mathématique. Elle se fait à tâtons, en se trompant et en rectifiant le tir. Pour résoudre un problème mathématique, le mathématicien interroge la réalité mathématique. La question prend la forme d'une affirmation, qui est un coup de sonde dans la réalité mathématique. Celle-ci, en un sens, répond au coup de sonde, permettant au mathématicien de tenter un nouveau coup de sonde, rectifié par la réponse, et ainsi de suite. À force de coups de sonde, le mathématicien cerne les contours de la réalité mathématique. Il peut cependant arriver que les coups de sonde convergent vers une image suffisamment claire de la situation, qui semble exprimer la réalité, entraînant le mathématicien à croire qu'il s'agit effectivement de la bonne image de la réalité mathématique, alors que ce n'était pas le cas. La découverte de l'erreur, qui se fait au moment où est trouvée la contradiction, permet l'écroulement de cette vision des choses. Il s'agit pour Grothendieck d'un moment crucial de la recherche mathématique, en tant qu'il permet à « notre connaissance de la

irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any well established physical theory." *Ibid.*, p. 16.

¹⁰³ *Ibid.*, p. 260.

¹⁰⁴ "we know [ZFC] doesn't tell you enough; there's not enough to settle important problems like CH and so on". D. KANT, « The Hidden Use of New Axioms », *op. cit.*, p. 16.

chose sondée [de] soudain se [renouveler] »¹⁰⁵ et ainsi, de pouvoir reprendre la recherche, par un nouveau coup de sonde, répondant à cette nouvelle information donnée par la réalité mathématique.

Le fait que les résultats soient ensuite reconstruits pour être publiés s'explique par le fait que le mathématicien veut rendre compte de la réalité qu'il a découverte sans exposer le processus exploratoire potentiellement chaotique de la recherche.

La stratégie de Magidor, dans un cadre ontologique platoniste sur les mathématiques, peut sembler de premier abord contre-intuitif. Si comme nous l'avons vu précédemment, l'intuition donne accès à la réalité mathématique, comment ce fait-il qu'il ne soit pas possible de déterminer la vérité d'une proposition mathématique intuitivement, avant de la démontrer, que ce soit ou non à l'aide d'axiomes cachés ? L'intuition sert de guide vers la connaissance, mais peut être sujette à des manquements. Il est possible que notre intuition d'une certaine proposition mathématique ne soit pas immédiatement claire. Pour Grothendieck, un nouveau problème mathématique s'aborde en sondant la réalité mathématique à l'aide d'affirmations, qui peuvent être fausses.

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle, sans qu'elle soit à tout prix mûrement pesée. Souvent la question prend la forme d'une affirmation - une affirmation qui, en vérité, est un coup de sonde. J'y crois plus ou moins, à mon affirmation, ça dépend bien sûr du point où j'en suis dans la compréhension des choses que je suis en train de regarder. Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse - encore fallait-il la faire pour pouvoir s'en convaincre.¹⁰⁶

L'important dans cette démarche n'est pas la véracité de l'affirmation initiale, mais le fait que la réalité mathématique renvoie une réponse à cette affirmation. Si elle était fausse, le mathématicien, en sondant la réalité mathématique, peut s'en rendre compte, et revenir à la charge, par un nouveau coup de sonde, « avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins “à côté de la plaque” »¹⁰⁷. La preuve finale est ensuite rédigée, reconstruisant le résultat, afin d'épargner, en quelque sorte, le récit de ces nombreux coups de sonde plus ou moins réussis.

L'expérience de l'intuition dans le cadre du platonisme s'explique facilement. Comme nous l'avons exposé précédemment, pour Gödel, l'intuition est cette faculté qui peut accéder à la réalité mathématique, similairement à la manière dont la perception

¹⁰⁵ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, op. cit., p. 209.

¹⁰⁶ *Ibid.*, p. 208.

¹⁰⁷ *Ibid.*

permet d'accéder au monde physique. L'expérience de l'intuition mathématique est donc le moment où le mathématicien est en contact avec la réalité mathématique.

Le succès de l'utilisation des mathématiques en physique s'explique par l'existence des objets mathématiques. Si les objets mathématiques existent et sont utilisés dans nos théories physiques, il est normal que ces théories soient efficaces. Cependant, les objets mathématiques sont des objets abstraits. Il n'est pas évident de voir comment les objets abstraits, bien que réels, peuvent être appliqués avec succès au monde physique. En effet, les objets mathématiques abstraits n'étant pas situés dans l'espace-temps qui caractérise le monde physique, il semble peu intuitif d'expliquer comment leur existence peut suffire pour expliquer leur succès. L'avantage de cette ontologie est qu'elle permet d'expliquer la manière dont les objets mathématiques sont utilisés en physique sans impliquer une réécriture de la physique.

Le platonisme en mathématiques affirme l'existence des objets mathématiques sur base de la croyance en l'existence d'une réalité mathématique indépendante de nous. Il s'agit d'un présupposé métaphysique qui est appliqué sur les mathématiques. Le platonisme n'est donc pas issu de la pratique des mathématiques.

Structuralisme

Dans une perspective structuraliste (non éliminative), ce sur quoi portent les propositions des mathématiques est des structures, qui existent avant leurs instanciations particulières et représentent la véritable nature des mathématiques. Pour Grothendieck, il s'agit d'une découverte et non d'une invention :

La structure d'une chose n'est nullement une chose que nous puissions "inventer". Nous pouvons seulement la mettre à jour patiemment, humblement en faire connaissance, la "découvrir". S'il y a inventivité dans ce travail, et s'il nous arrive de faire œuvre de forgeron ou d'infatigable bâtisseur, ce n'est nullement pour "façonner", ou pour "bâtir", des "structures". Celles-ci ne nous ont nullement attendues pour être, et pour être exactement ce qu'elles sont !¹⁰⁸

L'introduction d'une nouvelle structure est la découverte d'un aspect structurel de la réalité mathématique, qui est découvert par une de ses instanciations.

Les axiomes, pour Shapiro, caractérisent une structure, ou une classe de structures¹⁰⁹. Ce sont les définitions implicites des structures. Par exemple, les axiomes de Peano caractérisent la structure des nombres naturels. La justification des axiomes tient dans le fait qu'ils caractérisent une structure, ou classe de structures, les axiomes

¹⁰⁸ *Ibid.*, p. 51.

¹⁰⁹ S. SHAPIRO, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford, Oxford University Press, 1997, p. 13.

sont alors vrais pour cette structure ou classe de structure. Shapiro distingue deux conditions nécessaires caractérisant les axiomes : une condition d'existence et une condition d'unicité¹¹⁰. Un ensemble d'axiomes doit, d'une part, caractériser au moins une structure, et d'autre part, caractériser au plus une seule structure. De plus, les axiomes doivent être cohérents, sinon, ils ne caractérisent aucune structure¹¹¹. Comme nous l'avons vu précédemment, la cohérence est ce qui garantit, dans le cas du structuralisme non éliminatif, l'existence des structures. Ainsi, ce qui justifie les axiomes d'un point de vue structuraliste, ce n'est pas leur fécondité, mais le fait qu'ils génèrent une et une seule structure.

Dans un cadre structuraliste, une démonstration ne s'occupe pas des objets particuliers qui instancient les places dans les structures, mais fonctionne pour n'importe lequel de ceux-ci, car les déductions sont indépendantes du sujet des propositions déduites. Si les axiomes sont vrais, alors ils définissent une structure, et les théorèmes qui sont déduits de ces axiomes sont vrais pour la structure. Les conséquences logiques des axiomes qui constituent une définition implicite d'une structure permettent d'étudier la structure. La connaissance des structures se fait alors a priori, les conséquences logiques des axiomes permettent de connaître les structures.

Pour Shapiro, le monde physique « instancie » les structures mathématiques.¹¹² Le problème est alors qu'il y a une infinité de structures mathématiques, et qu'il n'est pas évident de déterminer lesquelles sont instanciées dans une région finie du monde physique. De plus, la même structure physique instancier plusieurs structures mathématiques différentes.

Parsons affirme que le structuralisme doit venir de la pratique des mathématiques. Cependant, pour Shapiro, l'existence des structures est indépendante de leurs instanciations, et existe avant elles.

Fictionnalisme

L'introduction de nouveaux objets mathématiques dans une ontologie fictionnaliste peut être vue comme une création fictionnelle. Les ensembles seraient, dans ce cadre, créés pour répondre à un besoin des mathématiques, de la même manière qu'un élément peut être introduit dans un récit en réponse à un certain besoin.

Dans un cadre fictionnaliste, les axiomes peuvent être justifiés par leur fécondité. En effet, les axiomes définissent le domaine des mathématiques qu'il est possible de créer. Le fait que leurs conséquences soient nombreuses et intéressantes permet de développer

¹¹⁰ *Ibid.*, p. 132.

¹¹¹ *Ibid.*

¹¹² O. BUENO, « Nominalism in the Philosophy of Mathematics », *op. cit.*

les mathématiques, tant qu'ils sont cohérents avec le reste de la théorie. Pour poursuivre l'analogie avec le récit fictionnel, le fait qu'un axiome soit fécond et cohérent avec le reste de la théorie permet de développer le récit de manière intéressante sans contradictions.

En poursuivant l'analogie avec la fiction, le décalage entre la pratique des mathématiques et la rédaction des résultats peut s'expliquer en analogie avec un brouillon. Dans la version définitive, des éléments peuvent être effacés, de manière à fluidifier le récit. Ce qui importe est le résultat final.

L'intuition dans ce cadre s'explique analogiquement à la perception des « objets » d'un monde fictionnel. Nous pouvons rendre compte de l'impression réaliste que « la forte tendance à l'accord entre les mathématiciens [vient du] fait qu'ils décrivent une seule et même réalité mathématique [par] leur formation commune »¹¹³. L'évidence des axiomes expliquée par Gödel par l'intuition viendrait alors de « l'impression, communément rapportée par les romanciers, que les personnages, une fois créés, ont tendance à développer leur propre esprit »¹¹⁴.

Pour Field, la vérité des propositions mathématiques n'est pas importante pour expliquer le succès des mathématiques en physique. Selon lui, le rôle des mathématiques est uniquement de faciliter les déductions ; elles ne sont pas indispensables dans les théories physiques. Le processus de nominalisation des sciences, s'il arrive à son terme, permettrait de développer des sciences sans mathématiques. Ce procédé implique néanmoins la réécriture des théories physiques.

Le fictionnalisme, tout comme le cas général du nominalisme, rejette l'existence des objets mathématiques parce qu'il s'agit d'objets abstraits. De plus, l'opérateur fictionnel, introduit par Field afin de pouvoir parler d'une certaine manière de la vérité des propositions mathématiques, est un artefact philosophique. Le fictionnalisme impose donc des présupposés métaphysiques sur les mathématiques ; cette ontologie n'est pas issue de la pratique.

Constructivisme

L'introduction d'un nouvel objet mathématique dans une optique constructiviste s'assimile à la construction de celui-ci. La création d'un objet, pour Bishop, se fait en découvrant des relations entre objets déjà existants, donc déjà construits. Les relations de

¹¹³ “Where the Godelian explains the strong tendency toward agreement among mathematicians as a result of their describing one and the same mathematical reality, we might appeal to their similar training”. P. MADDY, *Naturalism in Mathematics*, *op. cit.*, p. 93.

¹¹⁴ “where the Godelian explains the phenomenon of axioms “forcing themselves upon us as being true” as a result of our perception-like contact with that reality, we might appeal to the impression, commonly reported by novelists, that characters, once created, tend to develop minds of their own”. *Ibid.*, p. 93.

base sont les relations arithmétiques des nombres entiers, à partir desquelles on peut construire des règles permettant de former des paires d'entiers, ou pour séparer certains entiers des autres. De telles règles mènent à l'introduction des notions de fonction et d'ensemble. Pour définir ce qu'est un ensemble, il faut déterminer les règles qui permettent de construire les éléments de l'ensemble, et de montrer que deux éléments de l'ensemble sont égaux. L'introduction de nouveaux objets se fait en analysant les relations entre objets déjà existants et en en tirant des règles, permettant de construire de nouveaux objets.

Dans un cadre constructiviste, une proposition vraie est une proposition dont la preuve est constructive. La recherche mathématique consiste à construire des propositions. Essayer de prouver une proposition consiste alors à essayer de la construire. Dès lors, la preuve publiée contient toutes les constructions nécessaires à la construction de la proposition démontrée.

Donner une preuve d'une proposition en mathématiques constructive signifie construire cette proposition à partir d'objets déjà construits. Dès lors, la construction d'une preuve consiste à donner les étapes permettant de construire le résultat, en construisant tous les résultats intermédiaires. En ce qui concerne les preuves par l'absurde, celles-ci sont acceptées dans les cas finis. Les objets hypothétiques utilisés, n'étant pas construits, ne permettent pas d'obtenir une preuve constructive.

Le constructivisme, en tant qu'il considère que les objets qui existent sont ceux qui peuvent être effectivement construits semble pertinent pour expliquer le succès des mathématiques en physique. Il semble en effet surprenant que les mathématiques classiques, permettant l'interprétation idéale de la disjonction et de l'existence, permettent le succès de la physique. Cependant, les mathématiques utilisées en physique dans la pratique sont les mathématiques classique. Or, les mathématiques pures sont, pour Bishop, isolées du monde : « [le mathématicien] a suivi la lumière, et celle-ci l'a entraîné hors du monde »¹¹⁵. Si toutes les mathématiques utilisées en physique étaient effectivement remplacées par des mathématiques constructives, peut-être pourrions-nous considérer que le constructivisme donne une bonne explication du succès des mathématiques en physique.

Il semblerait, de premier abord, que le constructivisme n'impose pas de présupposés ontologiques sur les mathématiques. En effet, l'existence des objets mathématiques n'est pas supposée, et ce qui existe est ce qui peut être construit

¹¹⁵ "he has followed the gleam and it has led him out of this world." E. BISHOP, *Foundations of Constructive Analysis*, New-York – San Francisco – St. Louis – Toronto – London – Sydney, McGraw-Hill Book Company, 1967, p. viii.

explicitement. Dans l'hypothèse où nous nous restreindrions exclusivement aux mathématiques constructives, l'ontologie constructiviste semble venir de la pratique. Cependant, le constructivisme a lui aussi ses présupposés métaphysiques. Le rejet du tiers exclu, ou de la logique classique pour adopter une interprétation constructiviste des foncteurs logiques, par exemple, se fait précisément en réponse au présupposé métaphysique associant l'existence à ce qui peut être construit. Le constructivisme, de manière évidente, n'est pas issu de la pratique classique des mathématiques. Il n'est pas non plus issu de la pratique des mathématiques constructives. C'est le présupposé métaphysique constructiviste associant l'existence à ce qui peut être construit qui détermine la pratique des mathématiques constructives.

Formalisme

L'introduction de nouveaux objets mathématiques dans un cadre formaliste (pas de Hilbert) est l'introduction de nouveaux symboles, ainsi que des règles permettant de les manipuler.

Dans un cadre formaliste, les axiomes sont les propositions de base desquelles, par l'application des règles des mathématiques, il est possible de déduire des théorèmes. Le choix des axiomes permet donc de déterminer le système formel dans lequel le mathématicien travaille. Comme les propositions mathématiques, et en particulier, les axiomes, sont vides de sens, le choix d'un axiome est purement pragmatique, au sens où ce qui importe, ce n'est pas le sens de ce qu'il permet de déduire, mais sa cohérence avec le reste du système. La fécondité d'un axiome est importante, au sens où si cet axiome est fécond, le système formel dont il est axiome permettra de déduire plus de propositions. Le choix des axiomes détermine le cadre de travail du mathématicien, mais dans un cadre formaliste, il n'y a pas de bonne raison de préférer un système d'axiome plutôt qu'un autre, si ce n'est que la fécondité de ces axiomes peut permettre des déductions plus intéressantes, c'est-à-dire un ensemble plus vaste et plus complexe de propositions à déduire.

Le formalisme, voyant les mathématiques comme une suite de symboles sans signification, ne permet pas d'expliquer le succès des mathématiques en physique.

Le formalisme considère les mathématiques comme une suite de symboles vides de sens, manipulés selon des règles fixées préalablement. En un sens, certains aspects de la pratique mathématique, comme la déduction formelle de résultats à partir d'autres, déjà prouvés, peuvent faire penser que faire des mathématiques consiste à manipuler des symboles vides selon des règles déterminées. Cependant, les signes en question sont rarement considérés comme vides par les mathématiciens. Pour Bishop, bien que les méthodes et les objets mathématiques aient été idéalisés sous forme de jeu de

manipulation de symboles, le contenu pragmatique des théorèmes, c'est-à-dire le fait qu'il sera utilisé pour déduire d'autres théorèmes ayant eux-mêmes un contenu pragmatique, empêche les mathématiques de sombrer dans un formalisme dénué de sens¹¹⁶. Le formalisme, visant à vider les mathématiques de leur sens pour en faire un jeu formel, présente donc un préjugé métaphysique : celui qui affirme que les mathématiques ne sont que la manipulation de symboles vides de sens selon des règles fixées.

¹¹⁶ "The methods of proof and the objects of investigation have been idealized to form a game, but the actual conduct of the game is ultimately motivated by pragmatic considerations." *Ibid.*, p. viii.

Positions ontologiques de Maddy

Les positions ontologiques de Maddy que nous allons explorer maintenant sont développées dans la perspective de la *Second Philosopher* développée plus haut. Voyons comment cela s'applique à l'étude des mathématiques¹¹⁷.

Concernant la théorie des ensembles, comme nous l'avions vu, la *Second Philosopher* de Maddy est face à deux types de questions : d'une part, des questions d'ordre méthodologique, concernant l'introduction de la notion d'ensemble, la justification des pratiques et l'adoption des axiomes de la théorie des ensembles ; et d'autre part, des questions d'ordre philosophiques, concernant le type d'activité que sont la théorie des ensembles, le fonctionnement de son langage, la nature des ensembles et les moyens d'en obtenir de la connaissance.

À travers les exemples de l'introduction des ensembles par Cantor, puis Dedekind, et la formalisation de l'arithmétique, la *Second Philosopher* de Maddy explore les méthodes de la théorie des ensembles. Elle constate que l'introduction de la notion d'ensemble a été faite avec un but mathématique concret : Cantor voulait généraliser des représentations trigonométriques, et Dedekind voulait obtenir des définitions sans représentation pour l'algèbre abstraite. De plus, les axiomes de la théorie des ensembles, bien que posés comme intuitivement évidents par Zermelo, sont également choisis dans un objectif de fécondité et d'efficacité. Enfin, des hypothèses peuvent être rejetées, car peu fructueuses et limitantes pour la théorie.

Elle constate donc que les méthodes des mathématiques sont différentes de celles des sciences empiriques qu'elle a étudiées jusque là, et des méthodes qu'elle utilise pour son enquête. En effet, il est possible en mathématiques d'introduire de nouveaux objets pour augmenter ce qu'il est possible d'exprimer, ou favoriser certains types de définitions, ou de rejeter des hypothèses afin d'éviter des théories peu fécondes. Dans la lignée de ses recherches sur les méthodes, elle conclut cependant que les méthodes qu'elle utilise jusqu'ici ne peuvent pas corriger, compléter ou confirmer les méthodes des mathématiques. Elle reconnaît les méthodes des mathématiques, bien que différentes des méthodes auxquelles elle est habituée, comme rationnelles et autonomes.

Se pose ensuite la question de leur fiabilité, autrement dit, les méthodes de la théorie des ensembles permettent-elles de connaître les ensembles et leurs propriétés ? Ce ne sont pas des questions qui peuvent être répondues à l'intérieur de la théorie des ensembles. En effet, la *Second Philosopher* se demande si, en tant qu'entreprise humaine, la théorie des ensembles est un ensemble de vérités sur le sujet sur lequel elle porte, de la

¹¹⁷ Ce développement se base sur P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, op. cit., p. 52.

même manière que le sont la physique, et autres sciences qu'elle a précédemment étudiées.

Thin Realism

Le réalisme classique implique l'existence d'une réalité extérieure des objets mathématiques, permettant de juger de la véracité ou de la fausseté des propositions mathématiques objectivement. À l'inverse, le réalisme proposé par Maddy, *Thin Realism*, est une version moins exigeante du réalisme : « le réalisme en théorie des ensembles est simplement la doctrine selon laquelle les ensembles existent »¹¹⁸. L'idée est de partir de la confiance dans la fiabilité des méthodes de la théorie des ensembles pour en déduire une ontologie minimale.

Considérant que les ensembles existent et que la théorie des ensembles est un ensemble de vérités à leur sujet, pour que les méthodes de la théorie des ensembles soient fiables, il faut que les ensembles soient les objets décrits par ces méthodes. Le *Thin Realism* de Maddy affirme donc l'existence des ensembles, qui sont alors les objets décrits par la théorie des ensembles. Comme cette dernière ne dit rien quant à la dépendance des ensembles à nous, ni sur leur place dans l'espace et le temps, ni sur leur participation à des interactions causales, nous pouvons en déduire qu'ils sont abstraits.

La réalité mathématique est donc existante, non spatio-temporelle et non causale. Contrairement au *Robust Realism*, les vérités de la théorie des ensembles n'ont pas besoin d'une justification externe, par un appel à la réalité mathématique. En effet, les méthodes de la théorie des ensembles sont les seuls moyens fiables pour accéder aux vérités sur les ensembles.

Là où le *Robust Realist* a besoin de justifier les résultats des méthodes de la théorie des ensembles par une réalité extérieure, il n'est pas nécessaire, ni même possible pour le *Thin Realist* de vérifier l'exactitude des propositions dans cette réalité. La théorie des ensembles dit tout ce qu'il est possible de connaître sur les ensembles.

Notons qu'il ne s'agit pas simplement de dire que les ensembles sont constitués par les méthodes de la théorie des ensembles. En effet, cela déborde du cadre du *Thin Realism*, au sens où les ensembles ne sont alors pas des entités objectives, indépendantes de nous. Le *Thin Realism* n'implique pas que les ensembles soient le produit de nos pratiques, mais uniquement que la manière d'y accéder soit par les méthodes de la théorie des ensembles. Les méthodes ne sont pas ce qui caractérise les ensembles, mais

¹¹⁸ "Realism in set theory is simply the doctrine that there are sets" J. STEEL cité dans P. MADDY, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, *ibid*, p. 60.

uniquement la manière d'y accéder, et de déterminer la véracité des propositions à leur sujet.

Il ne s'agit pas non plus d'une convention linguistique, autrement dit, de dire que la théorie des ensembles est un accord pratique, permettant de décrire ce que serait un ensemble :

the Thin Realist doesn't regard the embrace of 'the concept of set', the adoption of the set-theoretic framework, as a purely pragmatic matter of linguistic convention; she takes Cantor and Dedekind to have discovered the existence of these mathematical objects, not to have come to a convenient decision.¹¹⁹

Concernant l'accès aux ensembles, le *Thin Realism* n'a pas besoin, contrairement au *Robust Realism*, d'une faculté similaire à la perception, permettant de saisir la réalité mathématique. En effet, les ensembles sont les objets décrits par les méthodes de la théorie des ensembles, et la seule manière d'obtenir des connaissances à leur sujet est donc de faire de la théorie des ensembles, autrement dit, les seules connaissances qu'il est possible d'obtenir sur les ensembles sont données par les méthodes de la théorie des ensembles. Le problème épistémologique du *Robust Realism* est donc évité : l'accès aux ensembles se fait par les méthodes de la théorie des ensembles.

N'y a-t-il rien d'autre que nous puissions dire sur la réalité des ensembles que le fait qu'il s'agisse de ce qui est décrit par les méthodes de la théorie des ensembles ? Le but de la théorie des ensembles est de donner un fondement théorique unique pour tous les domaines des mathématiques¹²⁰. Comme tous les concepts mathématiques, les concepts de la théorie des ensembles sont formés pour répondre aux objectifs donnés par la théorie. Ce que donnent les méthodes de la théorie des ensembles, ce sont donc les contours de la profondeur mathématique, aussi appelée fécondité mathématique, efficacité mathématique, importance mathématique ou productivité mathématique. Celle-ci est objective, elle ne dépend pas de nous :

just as it's not up to us which bits of pure mathematics best serve the needs of natural science, just as it's not up to us that it would be counter-productive to insist that all 'groups' be commutative, it's also not up to us that appealing to sets and transfinite ordinals allows us to capture facts about the uniqueness of trigonometric representations, that the Axiom of Choice takes an amazing range of different forms and plays a fundamental role in many different areas, that large cardinals arrange themselves into a hierarchy that serves as an effective measure of consistency strength, that

¹¹⁹ *Ibid.*, p. 68.

¹²⁰ *Ibid.*, p. 77.

determinacy is the root regularity property for projective sets and interrelates with large cardinals, and so on.¹²¹

Bien que nous puissions orienter notre propre recherche en mathématique dans un domaine plutôt qu'un autre, suivant nos centres d'intérêt et ce qui nous semblent personnellement important, nous ne changeons rien à ce qui est fécond en mathématiques. Nos préférences personnelles peuvent influencer les choix de ce que nous poursuivrons ou non en mathématiques, mais ce ne sont pas nos recherches qui déterminent le cadre de la profondeur mathématique, mais la profondeur mathématique qui déterminent nos questionnements et nos objectifs.

Arealism

En décrivant le *Thin Realism*, Maddy suppose que la théorie des ensembles est un ensemble de vérités. En ne faisant pas cette hypothèse, elle décrit une autre position ontologique, proche du *Thin Realism*, qu'elle appelle *Arealism*.

Prenons le temps de se demander ce qu'est la théorie des ensembles s'il ne s'agit pas d'un ensemble de vérités. Quel est l'objectif d'une théorie mathématique si ce n'est la recherche de la vérité ? La théorie des ensembles a été développée avec en vue différents objectifs tels que le développement des représentations trigonométriques, de l'algèbre, de fournir une fondation aux mathématiques, de résoudre le problème du continu, ou encore de fournir des outils aux sciences. Ainsi, la théorie des ensembles a ses propres objectifs, à l'intérieur d'elle-même, et également des objectifs extérieurs. La théorie des ensembles est donc « l'activité consistant à développer une théorie des ensembles qui serve efficacement une gamme concrète et en constante évolution de finalités mathématiques »¹²². Dans ce cadre, il est possible de considérer qu'il n'y a pas de raisons de supposer l'existence des ensembles ou que la théorie des ensembles est un ensemble de vérités.

Concernant les méthodes utilisées, l'Arealist et la Thin Realist sont indiscernables. Les faits objectifs sur lesquelles elles se basent pour développer leur ontologie sont les mêmes. La distinction ne se fait pas dans leur pratique de la théorie des ensembles, mais dans leurs réflexions philosophiques-secondes sur la théorie des ensembles en tant qu'entreprise humaine¹²³. Là où la *Thin Realist* considère les

¹²¹ *Ibid.*, p. 80.

¹²² "the activity of developing a theory of sets that will effectively serve a concrete and ever-evolving range of mathematical purposes" *Ibid.*, p. 89.

¹²³ Where they differ is in their second-philosophical reflections on the human undertaking called 'set theory'. [...] Their disagreement takes place not within set theory, but in the judgments they form as they regard set-theoretic language and practice from an empirical perspective and ask second-philosophical versions of the traditional philosophical questions, questions in the second group we've been considering." *Ibid.*, p. 100.

mathématiques comme un ensemble de vérités sur des objets existants, l'*Arealist* ne fait pas cette hypothèse, estimant qu'elle n'est pas nécessaire. Par exemple, en ce qui concerne l'ajout d'un axiome de grand cardinal, toutes deux s'accorderaient sur les raisons qui motivent l'adoption de cet axiome, mais pas sur le fait que la *Thin Realist* considère que ces raisons justifient l'existence du grand cardinal en question, et la vérité de l'axiome. Du point de vue de la pratique de la théorie des ensembles, cette distinction n'a pas d'impact, c'est seulement dans la réflexion sur la théorie des ensembles que cette distinction a son importance.

Notons que ce n'est pas parce qu'elle rejette l'existence des objets mathématiques que l'*Arealist* rejette les mathématiques. Au contraire, en ce qui concerne la pratique de la théorie des ensembles, la position n'est pas différente du *Thin Realism*. Dans les deux cas, la pratique des mathématiciens est simplement observée, et n'est pas mise en question. De plus, l'*Arealist* n'affirme pas la vérité des propositions mathématiques, non pas menée par des convictions philosophiques, comme le fait le nominaliste, mais par manque d'évidence permettant d'affirmer qu'elles sont vraies. Avant de revenir sur cette distinction, précisons un peu plus la position *Arealist*, en la distinguant de positions similaires.

L'*Arealist* n'est pas nominaliste. En effet, bien qu'elle considère qu'il n'y ait pas de raison pour accepter l'existence des objets mathématiques, ce n'est pas l'existence des objets abstraits, ni le problème de l'accès à la connaissance de ces derniers, qui lui posent problème, mais le fait qu'il n'y ait pas de preuves de l'existence des objets mathématiques, ni du fait que la théorie des ensembles nous donne des vérités. Du point de vue strict de l'existence des objets mathématiques, les deux positions s'accordent, mais les raisons et les implications de ces affirmations diffèrent. Le nominalisme place derrière le rejet de l'existence des objets mathématiques une métaphysique plus large que ce que permet d'en donner la théorie des ensembles, et par là s'oppose à l'*Arealism*.

Concernant le fictionnalisme, l'*Arealist* n'a aucune bonne raison pour le rejeter. D'une part, il présente l'avantage de pouvoir parler de vérité au sein du récit de la théorie des ensembles, et donc pas dans l'absolu. Mais d'autre part, comme le précise Maddy, l'utilité de l'analogie avec la fiction n'est pas évidente. Appeler la théorie des ensembles « histoire de la théorie des ensembles » plutôt que « théorie des ensembles » ne semble

pas utile à l'avancée de nos connaissances, et le transfert des connaissances acquises dans le domaine de la littérature aux mathématiques et inversement semble peu pertinent.

If this is right, then the value of the fictionalist analogy is limited, and keeping it at the forefront of our thinking about set theory might tempt us to impose categories and judgments foreign to our subject and to ignore important features without correlates in fiction.¹²⁴

Selon Maddy, toute analogie des mathématiques à d'autres domaines – fiction, sciences, jeu, etc. – peut entraîner ce genre de confusions, et les ignorer afin de se concentrer sur l'étude de la théorie des ensembles en elle-même semble plus efficace.

Nous pouvons également mentionner la différence de l'*Arealism* avec le formalisme, ou le *if-thenism*, qui nient aussi le fait que les mathématiques sont un ensemble de vérités au sujet d'objets abstraits. L'objectif de formalisation des mathématiques de Hilbert implique effectivement la création d'un système formel total, reprenant l'intégralité des mathématiques, dans lequel il serait possible de démontrer l'intégralité des propositions mathématiques. Tout problème mathématique bien formulé trouverait ainsi nécessairement une solution, atteignable par des règles de déduction au sein du système formel :

en mathématiques, il n'y a pas d'ignorabimus, bien au contraire, nous sommes toujours en mesure de répondre aux questions qui sont douées de sens, [...] notre intelligence ne recourt nullement à de mystérieux artifices, elle procède au contraire selon des règles parfaitement déterminées que l'on peut formuler explicitement et qui constituent la garantie de l'objectivité absolue de son jugement.¹²⁵

Un tel système total se détacherait de son processus de création, le remplaçant par des procédés atteignables en lui-même. Même en considérant l'échec du programme de Hilbert, ces positions caractérisent la pratique des mathématiques comme la déduction logique de propositions à partir d'autres, et en ce sens, ignorent entièrement le processus de création des concepts et du cadre dans lequel ces déductions sont possibles. Ceci est problématique pour l'*Arealist*, qui considère ce processus de création et d'émergence des concepts comme partie intégrante de la pratique mathématique. Maddy souligne tout de même qu'une version moins forte du *if-thenism* prenant en compte le processus de création des concepts et du cadre de la théorie mathématique dans la pratique des mathématiciens, bien que mettant fort l'accent sur les connexions logiques, n'aurait pas de différence substantielle avec l'*Arealism*.

¹²⁴ *Ibid.*, p. 99.

¹²⁵ HILBERT, cite dans J. LADRIÈRE, *Limitations internes des formalismes*, op. cit.

Analyse des positions ontologiques de Maddy

Nous avons vu que les deux ontologies présentées par Maddy sont, sur le plan des pratiques, identiques. La différence entre les deux vient des réponses aux questions de philosophie seconde que la *Thin Realist* et l'*Arealist* se posent sur les mathématiques. Pour ces raisons, nous allons analyser ensemble ces positions par rapport à nos critères.

En ce qui concerne les pratiques des mathématiques, nous avons vu que les positions ontologiques de Maddy viennent des pratiques des mathématiques, et par là, sont compatibles avec ces pratiques. En effet, comme pour ces ontologies, tout ce qu'il y a à connaître de la théorie des ensembles est donné par la théorie des ensembles en elle-même, c'est-à-dire par leurs méthodes. Les méthodes de la théorie des ensembles sont donc adéquatement représentées par ces ontologies

Pour discuter des applications des mathématiques, nous devons séparer les deux ontologies. Le *Thin Realism*, en tant que position réaliste, n'a pas de problème à expliquer le succès des mathématiques dans les sciences. A l'inverse, l'*Arealism*, n'affirmant pas l'existence des objets mathématiques, demande plus d'explications. Maddy affirme que la manière dont les mathématiques sont utilisées dans les sciences ne demande pas que ces mathématiques soient vraies. En effet, les mathématiciens développent des théories mathématiques, qui sont ensuite utilisés par les scientifiques pour fabriquer des modèles représentant la réalité physique, et qui se chargent d'expliquer en quoi ces modèles mathématiques s'appliquent bien à la réalité physique. La vérité du modèle, et par conséquent, des mathématiques utilisées, n'intervient pas dans ce processus. Le scientifique n'affirme pas l'existence du modèle, mais simplement que le monde physique se comporte comme le modèle.

Le dernier critère, de manière évidente, est respecté.

Arealism vs Thin Realism

Nous avons donc deux positions valables pour la *Second Philosopher* de Maddy. Comment celle-ci choisit-elle alors entre les deux ? Rappelons le résultat de l'enquête de la *Second Philosopher*. Elle s'intéresse à la nature du monde, à l'aide de méthodes ordinaires de perception et d'observation, de formation et de vérification de théories. Elle rencontre ensuite les mathématiques, qui, par leur efficacité dans d'autres domaines liés à son enquête, méritent son intérêt. Elle constate alors la différence entre les méthodes des mathématiques pures et ses méthodes usuelles, ainsi que la différence des objets utilisés. La différence entre la *Thin Realist* et l'*Arealist* se fait ici. La *Thin Realist* voit les objets et les méthodes des mathématiques étranges, mais similaires en certains points à ce qu'elle connaît déjà, tandis que l'*Arealist* voit une discontinuité entre les deux. La

première conclut que le monde contient des objets abstraits et des objets concrets, et donc que les mathématiques sont un ensemble de vérités sur les objets mathématiques. La seconde, manquant d'évidence pour affirmer la vérité des propositions mathématiques, en conclut que la pratique des mathématiques n'a pas comme objectif de développer des vérités, bien qu'elles soient fort utiles dans d'autres domaines.

La manière dont Maddy présente ces deux positions semble laisser entendre que la *Thin Realist* doit pouvoir expliquer les raisons de croire que la théorie des ensembles donne un ensemble de vérités sur les ensembles. Cependant, Maddy propose une deuxième approche permettant d'arriver aux mêmes conclusions ontologiques. L'idée est de partir non pas du point de vue que les mathématiques sont utiles aux sciences, mais qu'elles sont déjà considérées en tant que science à la base et donc comme ensemble de vérités. Dans ce cas, la philosophe seconde part de ses croyances, et se demande lesquelles garder et lesquelles rejeter. Les mathématiques sont alors incluses au rang de ces croyances dès le départ, et la philosophe seconde n'a alors aucune raison de les rejeter.

Cet obstacle contourné, nous voyons qu'il n'y a pas de bonne raison de choisir une de ces ontologies plutôt que l'autre, partant uniquement des évidences de la théorie des ensembles. Choisir le *Thin Realism* implique de pouvoir donner un argument solide de la vérité des mathématiques. Choisir l'*Arealism* implique de donner l'argument inverse, contre la vérité des mathématiques. La philosophe seconde ne tranche ni d'un côté, ni de l'autre.

Une ontologie pratique

L'enquête de Maddy se termine sur l'impossibilité de choisir entre *Thin Realism* et *Arealism* du point de vue de la théorie des ensembles, et donc du point de vue de tout ce qu'il est possible de connaître sur les ensembles. Cette conclusion est intrigante, car Maddy propose de ne pas choisir entre les positions. Nous défendrons l'idée que ne pas choisir entre les différentes ontologies mathématiques est une ontologie en soi, en tant que ne pas choisir a des implications intéressantes du point de vue de l'ontologie.

Ne pas choisir permet en effet de reposer autrement la question de l'ontologie, avec un autre critère que celui du vrai. La recherche d'une ontologie dans le cadre de ce mémoire a commencé par la volonté de trouver ce qu'il en est vraiment de l'existence de la réalité mathématique. La question était « quelle est la vraie ontologie des mathématiques, celle qui permet de refléter adéquatement la pratique des mathématiques, mais aussi l'utilisation des mathématiques et leur succès dans d'autres domaines, celle qui part de la pratique des mathématiques, qui est leur seul point d'accès, pour ne pas y appliquer d'*a priori* métaphysiques ? ». Cette question révèle en elle-même un *a priori* métaphysique, celui de l'unicité de l'ontologie mathématique. Ce désir d'unicité, de chercher *la* vraie ontologie ne vient pas des mathématiques.

Prenons par exemple, le structuralisme. Cette ontologie effectue un basculement de l'objet de l'étude des mathématiques des objets mathématiques aux structures, ce qui permet de changer de point de vue sur les mathématiques. Comme le dit Grothendieck, les outils de découverte les plus puissants, ce sont les yeux du chercheur qui adopte des points de vue féconds sur les choses mathématiques dont il veut connaître la nature¹²⁶. Le point de vue fécond est ce qui permet de découvrir et « reconnaître l'unité dans la multiplicité de ce qui est découvert »¹²⁷. Ces points de vue féconds peuvent quelques fois converger en une chose nouvelle que Grothendieck appelle vision, et qui permet d'« unir les points de vue déjà connus qui l'incarne, et [de] nous en [révéler] d'autres jusque là ignorés »¹²⁸. Le point de vue peut ainsi servir de guide, unifiant des notions, et pouvant servir dans de nombreuses situations très différentes¹²⁹. Penser les mathématiques en

¹²⁶ A. GROTHENDIECK, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, op. cit., p. 36.

¹²⁷ *Ibid.*, p. 38.

¹²⁸ *Ibid.*, p. 38.

¹²⁹ « Mais plus encore que vers la découverte de questions, de notions et d'énoncés nouveaux, c'est vers celle de points de vue féconds, me conduisant constamment à introduire, et à développer peu ou prou, des thèmes entièrement nouveaux, que me porte mon génie particulier. C'est là, il me semble, ce que j'ai apporté de plus essentiel à la mathématique de mon temps. A vrai dire, ces innombrables questions, notions, énoncés dont je viens de parler, ne prennent pour moi un sens qu'à la lumière d'un tel "point de vue" - ou pour mieux dire, ils en naissent spontanément, avec la force de l'évidence, à la même façon qu'une lumière (même diffuse) qui surgit dans la nuit noire, semble faire naître du néant ces contours plus ou moins flous ou nets qu'elle nous révèle soudain. Sans cette lumière qui les unit dans un faisceau commun, les dix ou

terme de structures et non d'objets permet de distinguer des rapprochements qui n'étaient pas aussi frappants en les pensant en terme d'objets.

En examinant les apports du constructivisme, nous voyons que celui-ci peut être particulièrement intéressant dans le cadre des applications des mathématiques, et particulièrement dans les domaines comme l'informatique, où il est important de rester dans le domaine du constructible. Là où un mathématicien classique, pour, par exemple, éviter certaines décisions qui ne peuvent être prises par un ordinateur, comme vérifier si un nombre réel est ou non égal à un autre, doit se restreindre à un cadre algorithmique strict, tel que celui formé par la théorie des fonctions récursives, le cadre de la logique intuitionniste permet au mathématicien qui fait des mathématiques constructives de rester dans un cadre constructif.

En ce qui concerne le platonisme mathématique, comme nous l'avons vu, cette ontologie est plutôt naturelle pour certains mathématiciens, du fait que lorsque nous faisons des mathématiques, nous avons l'impression de manipuler des objets qui existent réellement. De plus, la dimension d'exploration d'une réalité exprimée par le platonisme mathématique pousse précisément à l'exploration de cette réalité. Il y a là une forme de paradoxe performatif : le platonisme mathématique est l'ontologie qui donne le plus envie de faire des mathématiques, alors que ses défenseurs insistent sur l'aspect métaphysique de l'existence des mathématiques et n'utilisent pas l'argument humain et pratique de la motivation à faire des mathématiques qu'apporte leur perspective.

Nous proposons de reposer la question de la recherche d'une ontologie mathématique en ne cherchant pas la vraie position ontologique permettant de décrire les mathématiques, mais en prenant comme critère l'utilité, entendue non pas au sens général, mais au sens d'utilité propre aux mathématiques. En ce sens, une ontologie est utile aux mathématiques en tant qu'elle accompagne, au moins en partie, l'activité mathématique, qui n'est plus vue seulement en tant que pratique globale des mathématiques, mais aussi comme pratique individuelle du mathématicien. Pour reprendre l'exemple du platonisme mathématique, cette ontologie est utile en tant qu'elle peut motiver un mathématicien à faire des mathématiques.

L'ontologie mathématique est utile dans la pratique des mathématiques de manière double. D'un côté, elle sert de guide pratique dans l'activité individuelle des mathématiciens. Ceux-ci, en fonction de leur préférence, produiront des travaux tantôt du côté du constructivisme tantôt du côté du platonisme, tantôt avec l'hypothèse du continu

cent ou mille questions, notions, énoncés apparaîtraient comme un monceau hétéroclite et amorphe de "gadgets mentaux", isolés les uns des autres – et non comme les parties d'un Tout qui, pour rester peut-être invisible, se déroband encore dans les replis de la nuit, n'en est pas moins clairement pressenti. » *Ibid.*, p. 37.

tantôt sans, etc. De l'autre côté, la somme de ces activités distinctes forme la pratique mathématique en général. La manière dont l'ontologie est utile ici n'est donc pas en tant que grande théorie chapeautant un tout, mais en tant qu'ensemble d'un fourmillement de pratiques. En somme, l'ontologie constructiviste amène un mathématicien au développement des mathématiques constructives, qui font indéniablement à leur tour partie du grand édifice mathématique.

Le fictionnalisme en particulier peut nous aider dans le cadre d'une ontologie fondée sur l'utilité. De fait, le fictionnalisme offre la possibilité qu'offre cette ontologie de se situer dans un cadre nominaliste, tout en pouvant faire comme si la réalité mathématique existait. Il permet de considérer que les objets mathématiques n'existent pas, tout en laissant la possibilité de parler de vérité et d'existence des objets mathématiques à l'intérieur des mathématiques.

D'un point de vue de l'utilité tel qu'il est développé ci-dessus, le fictionnalisme n'est pas distinct du platonisme. En effet, la dimension d'exploration qu'offre le platonisme est également permise par le fictionnalisme. La différence se fait simplement dans le type de réalité explorée par ces deux ontologies, l'une réelle, l'autre fictionnelle. Cette distinction, exprimée en terme de possibilités offertes par ces ontologies s'efface : le fictionnalisme permet de faire des mathématiques comme si on était platonicien.

Nous pourrions dès lors nous demander si, compte tenu de la similarité de ces ontologies, nous ne devrions pas nous passer de l'engagement ontologique exigé par une ontologie platoniste. Pourquoi faire l'hypothèse de l'existence des objets mathématiques si celle-ci n'apporte pas de changements significatifs ?

Dans la perspective que nous avons proposée ci-dessus, cette question est un faux problème. En effet, nous ne tenons pas à trouver *la* vraie ontologie des mathématiques. Le critère pour définir une ontologie n'est pas sa vérité, mais son utilité. Dès lors, s'abstenir ou non de faire l'hypothèse de l'existence de la réalité mathématique, c'est-à-dire opter pour le fictionnalisme ou le platonisme, n'a pas d'importance, au sens où ces ontologies ont la même utilité. Il ne nous semble pas nécessaire, voir carrément néfaste, de référer à des critères externes tels que le rasoir d'Ockham afin de trancher entre une position agnostique et anti-réaliste à l'instar d'une fictionnaliste comme Leng¹³⁰, critères qui nous semblent inférieurs à la pratique mathématique concrète.

¹³⁰ M. LENG, *Mathematics & Reality*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2010, p. 260.

Conclusion

Ce mémoire a exploré la question de l'ontologie mathématique, partant d'une approche naïve pour développer une réflexion sur ce qui fait la force d'une ontologie. Nous avons d'abord exposé différentes positions ontologiques sur les mathématiques, puis face aux problèmes que chacune soulève et à leur multiplicité, nous avons érigé des critères nous semblant importants dans le développement d'une ontologie mathématique.

Notre premier critère concerne l'adéquation à la pratique des mathématiques. En effet, une ontologie ne permettant pas de rendre compte des pratiques des mathématiciens ne nous semble pas pouvoir représenter la réalité mathématique. À partir de différents aspects de la pratique, nous avons développé des exigences ontologiques leur correspondant. Le second critère concerne les applications des mathématiques. Ce critère permet de prendre les mathématiques, non pas comme domaine isolé, mais en lien avec d'autres, par leurs utilisations. Une ontologie mathématique respectant ce critère doit ainsi permettre d'expliquer l'utilisation des mathématiques dans d'autres domaines, ainsi que le succès de cette utilisation. Le dernier critère concerne l'origine de l'ontologie. Il nous semble important que le développement d'une ontologie des mathématiques ne vienne pas d'un présupposé métaphysique qui serait appliqué sur les mathématiques, mais soit développé directement à partir de la pratique des mathématiques.

Les ontologies développées – platonisme, structuralisme, fictionnalisme, constructivisme et formalisme – ne permettent pas de satisfaire les trois critères que nous avons développés. Le critère le plus problématique est le dernier : toutes les ontologies que nous avons abordées viennent d'un *a priori* métaphysique : le platonisme mathématique fait l'hypothèse de l'existence d'une réalité mathématique indépendante, le structuralisme suppose que les mathématiques parlent de structures et non d'objets, le fictionnalisme refuse l'existence d'objets abstraits, le constructivisme assimile existence et construction, et le formalisme affirme que les propositions mathématiques sont vides de sens.

Nous nous sommes alors intéressés à la méthode de Maddy, la philosophie seconde, qu'elle développe dans *Defending the Axioms*. À partir des pratiques des mathématiques, celle-ci développe une ontologie minimale, sans supposition métaphysique. Elle arrive à deux positions ontologiques similaires sur le plan des méthodes, mais qui diffèrent sur le plan de leur réflexion sur les pratiques mathématiques. Le *Thin Realism* est une ontologie réaliste minimale, tandis que l'*Arealism* ne suppose pas l'existence des objets mathématiques. Dans les deux cas, ces ontologies se déduisent des méthodes de la théorie des ensembles. Selon Maddy, la théorie des ensembles ne

donne pas suffisamment d'éléments pour permettre de trancher entre les deux positions. En ce qui concerne nos critères, les deux positions les satisfont.

Nous proposons alors de reposer autrement la question de la recherche d'ontologie, qui ne se fonde alors plus sur la recherche de la vérité, mais sur l'utilité mathématique de l'ontologie, en tant qu'elle accompagne la pratique du mathématicien. La solution n'est ni une ontologie unique, ni de dire que l'ontologie mathématique n'est pas importante, mais de constater ce qui est permis dans la pratique individuelle du mathématicien par le fait d'admettre plusieurs ontologies mathématiques.

Dans une telle approche de l'ontologie, le critère de vérité est détrôné, pour laisser plus de place à une dimension pragmatique, basée sur la pratique et la cohérence. Cela ne veut pas dire que la vérité n'a plus d'importance, simplement qu'elle se limite à celle qu'elle possède dans la pratique. Avant tout, la vérité en mathématique correspond à la cohérence des travaux faits dans ce domaine. Elle est également un outil pour que le mathématicien se repère dans ce qu'il fait, ainsi qu'une motivation pour lui participer au développement des connaissances mathématiques.

Pour continuer la réflexion amorcée dans ce travail, il serait intéressant de plonger directement dans la pratique mathématique, afin d'interroger directement des mathématiciens concernant l'ontologie mathématique qui leur sert de guide, ce en lien avec le domaine des mathématiques dans lequel ils travaillent, afin de mettre en évidence les liens entre ontologie et théorie mathématique. Cette enquête pourrait permettre également de mettre en avant l'influence de l'ontologie sur la pratique des mathématiques, et vice-versa. Cette proposition nous semble être une approche intéressante pour dynamiser un débat philosophique qui nous semble particulièrement figé.

Bibliographie

- ANGIUS, Nicola – PRIMIERO, Giuseppe – TURNER, Raymond, « The Philosophy of Computer Science », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/computer-science/>.
- BENACERRAF, Paul, « Mathematical truth », *The Journal of Philosophy*, 19 (1973), p. 661-679.
- BENACERRAF, Paul, « What Numbers Could not Be », *The Philosophical Review*, 1 (1965), p. 47-73.
- BISHOP, Errett, *Foundations of Constructive Analysis*, New-York – San Francisco – St. Louis – Toronto – London – Sydney, McGraw-Hill Book Company, 1967.
- BRIDGES, Douglas – Palmgren, Erik – Ishihara, Hajime, « Constructive Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2022 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/mathematics-constructive/>.
- BUENO, Otávio, « Nominalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition)*, ed. Edward N. Zalta, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>.
- COLYVAN, Mark, « Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2024 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/mathphil-indis/>.
- FIELD, Hartry, *Realism, Mathematics, and Modality*, Oxford, Basil Blackwell Ltd, 1989 (Philosophia Mathematica).
- FIELD, Hartry, *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism*, Oxford, Oxford University Press, 2016, 2nd ed.
- GÖDEL, Kurt, « Russel's mathematical logic (1944) », in *Collected works: Volume II: Publications 1938-1974*, Oxford, Oxford University Press, 1990, éd. révisée, p. 119-141.
- GÖDEL, Kurt, « What is Cantor's continuum problem? (1964) », in *Collected works: Volume II: Publications 1938-1974*, Oxford, Oxford University Press, 1990, éd. révisée, p. 254-270.
- GROTHENDIECK, Alexandre, *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Paris, Gallimard, 2022 (Tel).

- HESPEL, Bertrand, « Physique et non-dualité », in *La non-dualité : perspectives philosophiques, scientifiques, spirituelles*, ed. Jean-Michel Counet, Louvain-la-Neuve, Peeters, 2021 (Bibliothèque philosophique de Louvain, 112), p. 217-264.
- KANT, Deborah, « The Hidden Use of New Axioms », in *The Palgrave Companion to the Philosophy of Set Theory*, ed. Carolin Antos – Neil Barton – Giorgio Venturi, Palgrave Macmillan Cham, 2025 (Palgrave Companions), p. 103-129.
- KITCHER, Philip, *The Nature of Mathematical Knowledge*, New-York – Oxford, Oxford University Press, 1984.
- LADRIÈRE, Jean, *Les limitations internes des formalismes : étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentes dans la théorie des fondements des mathématiques*, Louvain – Paris, Nauwelarts – Gauthier-Villars, 1957 (Collection de logique mathématique).
- LAKATOS, Imre, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, ed. John Worrall – Elie Zahar, Cambridge, Cambridge University Press, 1976 (Cambridge Philosophy Classics).
- LENG, Mary, *Mathematics & Reality*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2010.
- LINNEBO, Øystein, « Platonism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2024 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2024/entries/platonism-mathematics/>.
- MADDY, Penelope, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2011.
- MADDY, Penelope, *Naturalism in Mathematics*, Oxford – New-York, Clarendon Press, 1997.
- MADDY, Penelope, *Realism in Mathematics*, Oxford – New-York, Clarendon Press, 1990.
- MADDY, Penelope, *Second Philosophy: A Naturalistic Method*, Oxford – New-York, Oxford University Press, 2007.
- MOSCHOVAKIS, Nicolas Yiannis, *Description Set Theory*, ed. J. Barwise – D. Kaplan – H.J. Keisler – P. Suppes – A.S. Troelstra, Amsterdam – New-York – Oxford, North-Holland Publishing Company, 1980 (Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, 100).
- PARSONS, Charles, « Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought », *The Bulletin of Symbolic Logic*, 1 (1995), p. 44-74.

- PASEAU, Alexander – MARFORI, Marianna Antonutti, « Naturalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = [<https://plato.stanford.edu/archives/sum2025/entries/naturalism-mathematics/>](https://plato.stanford.edu/archives/sum2025/entries/naturalism-mathematics/).
- PUTNAM, Hilary, « Mathematics without Foundations», *The Journal of Philosophy*, 1 (1967), p. 5-22.
- PUTNAM, Hilary, « What is Mathematical Truth? », in *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, Cambridge, Cambridge University Press, 1979, p. 60-78.
- RECK, Erich – SCHIEMER, Georg, « Structuralism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, forthcoming URL = [<https://plato.stanford.edu/archives/fall2025/entries/structuralism-mathematics/>](https://plato.stanford.edu/archives/fall2025/entries/structuralism-mathematics/).
- SHAPIRO, Stewart, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford, Oxford University Press, 1997.
- SMITH, Peter, *An introduction to Gödel's theorems*, Cambridge, Cambridge University Press, 2013 (Cambridge Introductions to Philosophy), 2nd ed.
- VAN FRAASSEN, Bas C., *The Scientific Image*, ed. L. Jonathan Cohen, Oxford – New-York, Oxford University Press, 1980 (Clarendon library of logic and philosophy).
- WEIR, Alan, « Formalism in the Philosophy of Mathematics », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2025 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = [<https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/formalism-mathematics/>](https://plato.stanford.edu/archives/spr2025/entries/formalism-mathematics/).
- WIGNER, Eugene P. (1960) « The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 (1960), p. 1-14.
- ZACH, Richard, « Hilbert's Program », in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2023 Edition)*, ed. Edward N. Zalta – Uri Nodelman, URL = [<https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/>](https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/hilbert-program/).

Table des matières

Introduction	1
Réalisme mathématique.....	5
Nominalisme mathématique	6
Platonisme mathématique.....	8
Structuralisme.....	14
Structuralisme non-éliminatif.....	15
Structuralisme éliminatif	16
Problèmes du structuralisme.....	17
Fictionnalisme	19
Constructivisme.....	21
Formalisme	23
Comment choisir ?.....	27
Exigences pour une ontologie des mathématiques	28
Adéquation à la pratique des mathématiciens	28
Introduction de nouveaux objets	29
Justification des axiomes	30
Décalage entre pratique et rédaction	32
Dimension collective	33
Preuves	Erreur ! Signet non défini.
Découverte et invention.....	Erreur ! Signet non défini.
Expérience de l'intuition	Erreur ! Signet non défini.
Autres mais j'ai pas de sources.....	Erreur ! Signet non défini.
Cohérence avec les applications des mathématiques	36
Physique	38
Algorithmique et informatique	43
Issue des mathématiques elles-mêmes (pas projection d'une ontologie déjà construite sur les mathématiques)	46
Analyse des ontologies présentées selon nos critères.....	49
Platonisme mathématique.....	49
Nominalisme.....	Erreur ! Signet non défini.
Structuralisme.....	52

Fictionnalisme	53
Constructivisme.....	54
Formalisme.....	56
Conclusion.....	Erreur ! Signet non défini.
Positions ontologiques de Maddy.....	58
Thin Realism	59
Arealism	59
Vérifier que les deux positions de Maddy correspondent aux critères..	Erreur ! Signet non défini.
Thin Realism	Erreur ! Signet non défini.
Arealism	Erreur ! Signet non défini.
Arealism vs Thin Realism	64
Une ontologie pragmatique	66
Conclusion.....	69
Bibliographie	71

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté de philosophie, arts et lettres

Place Cardinal Mercier, 31, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/fial